

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

Ertel, Hans: Kausalität, Teleologie und Willensfreiheit als Problemkomplex der Naturphilosophie. S.-Ber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1954, Nr. 1. 29 S. (1954).

● Bakst, Aaron: Mathematical Puzzles and Pastimes. New York: D. van Nostrand Company, Inc.; London: Macmillan and Co., Ltd. 1954. VII, 206 p. 7 s. net.

Das amüsant geschriebene Buch erfordert nur bescheidene mathematische Vorkenntnisse; es berichtet von allerlei interessanten Dingen, ohne strenge Beweise zu geben. Folgende Stichwörter mögen den Inhalt andeuten: Streichholzfiguren, Umfüllaufgaben, Ziffernsysteme und Teilbarkeitsregeln, Ewiger Kalender, Unimursale Figuren, Näherungswerte und Merkverse für π , Rollkurven, graphisches Rechnen, numerische Berechnung trigonometrischer Funktionen, merkwürdige Zahlen und Divisionen.

R. Sprague.

● Spoerel, Johannes: Mathematik von der Schule zur Hochschule. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1954. XI, 210 S. 85 Abb.

Das Buch ist aus Übungen und Arbeitsgemeinschaften mit Studenten und aus einer Einführungsvorlesung hervorgegangen, mit deren Abhaltung an der Technischen Universität Berlin Verf. seit 1946 betraut ist. Wie diese Vorlesung soll auch das Buch die Anfangsschwierigkeiten überwinden helfen, die der Übergang von der Oberschule zur Hochschule in Mathematik immer wieder bereitet. Diese Schwierigkeiten beruhen nach Ansicht des Verf. auf einer unzureichenden Vertrautheit der Studenten mit großen Teilen der Schulmathematik, auf fehlender Übung im formalen Rechnen und auf einer für die Hochschule unzweckmäßigen Form des Unterrichts und Auswahl des Stoffes der Schulmathematik. Diese Mängel unter eigener Mitarbeit des Lesers zu beheben, ist das Ziel des Buches. Aus diesem Grund ist ihm auch ein umfangreicher Aufgaben- und Übungsteil beigegeben. Im einzelnen bringt es: I. Ergänzungen zur Schulalgebra (Zahlen, algebraische Rechenoperationen, Determinanten 2. und 3. Grades, lineare Gleichungen mit 2 und 3 Unbekannten). II. Elementare Funktionen einer reellen Variablen (Elementare algebraische Funktionen, transzendente Grundfunktionen, Polarkoordinaten-, Parameter- und implizite Darstellung). III. Komplexe Zahlen und elementare Funktionen einer komplexen Variablen. IV. Elemente der Vektoralgebra. — Die Darstellung ist klar und übersichtlich. Sie geht auf die Schwierigkeiten, die dem Anfänger beim Eindringen in die höhere Mathematik an der Hochschule zu entstehen pflegen, mit großem Verständnis ein, ohne ihm das Maß an eigenem Nachdenken und Mitarbeiten abzunehmen, das ihm zugemutet werden muß. Dabei wahrt es stets die Verbindung zu den Anwendungen in Physik und Technik und bringt auch Näherungslösungen und Fehlerabschätzungen. So ist das Buch in gleicher Weise für Mathematiklehrer an Oberschulen geeignet, die in Arbeitsgemeinschaften oder einzelnen interessierten Schülern mehr bieten wollen als der Stoffplan vorsieht, und es wird auch allen denen willkommen sein, die aus beruflichen oder aus Neigungsgründen ihre verlorengegangenen mathematischen Grundkenntnisse auffrischen oder wiedererlangen wollen.

H. Rohrbach.

● Jaglom, A. M. und I. M. Jaglom: Nicht-elementare Aufgaben in elementarer Darstellung. Aufgaben zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Aufgaben aus verschiedenen Gebieten der Mathematik. (Bibliothek des Mathe-

matischen Zirkels, Bd. 5.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 543 S. R. 10,15 [Russisch].

Die Sammlung umfaßt 170 gut gewählte Aufgaben, die erstens mit vollständigen Lösungen und zweitens sämtlich mit Kurzantworten versehen sind. Die Lösungen und Antworten umfassen auch den größten Teil des Buches. Die Aufgaben des ersten Abschnittes enthalten unter anderm hübsche geometrisch-kombinatorische Beweise für den „Kleinen Fermat“ und das Theorem von Wilson und führen bis zum Buffon-schen Nadelproblem. Der zweite Teil umfaßt Aufgaben aus anderen Gebieten der Mathematik: Geometrie, (kombinatorische) Topologie, Analysis, Zahlentheorie. Einen Begriff von der Reichweite dieser Aufgaben mögen folgende stichproben-artige Angaben geben: Satz von Minkowski über die Anzahl der Gitterpunkte in konvexen Körpern, die Tschebyscheffschen Polynome und ihre Minimaleigen-schaft, die Theoreme von Mertens in der Primzahltheorie. *L. Schmetterer.*

Geschichte.

Gericke, H.: Die Stellung der Mathematik in der Kulturgeschichte. Nachr. Gießen. Hochschulges. **23**, 116—126 (1954).

Verf. versucht in diesem nur die Umrisse andeutenden Gießener Vortrag vom 8. II. 1954 die mathematische Grundstimmung innerhalb verschiedener Kultur-epochen in Wechselbeziehung zu gleichzeitig geltenden Lebens- und Weltanschau-ungen zu setzen. Ref. ist etwas skeptisch, da ihm die ideengeschichtlichen Einzelheiten für solches Unterfangen noch nicht hinreichend gesichert erscheinen. Die nicht uninteressante Gesamtkonzeption könnte wohl nur nach Vorlage einer sehr umfang-reichen und minutiös durchgearbeiteten Einzeldarstellung in ernsthafte Erwägung gezogen werden.

J. E. Hofmann.

Stamatis, E.: Über die Irrationalzahlen bei den Alten. Praktika Akad. Athen. **29**, 337—345 und deutsche Zusammenfassg. 345 (1954) [Griechisch].

Zum Beweis dafür, daß es bei den Griechen auch irrationale Zahlen (nicht nur inkommensurable Größen) gegeben habe, führt der Verf. einige Stellen an, in denen wirklich von solchen *ἀρῖθοι* die Rede ist. Der Satz Euklid X, 35, den Verf. ein-gehend arithmetisch interpretiert, handelt nur von inkommensurablen und kommen-surablen Strecken bzw. Flächen. Der Text der herangezogenen Aristotelesstelle (Metaphysik 1021 a 4), der von einer „inkommensurablen Zahl“ spricht, ist um-stritten. Th. Heath (Mathematics in Aristotle, dies. Zbl. **33**, 49) liest hier *κατὰ μὴ συμμετρὸν δὲ ἀριθμὸς οὐ λέγεται* an Stelle von: *κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται*.

K. Vogel.

Drachmann, A. G.: The plane astrolabe and the anaphoric clock. Centaurus **3**, 183—189 (1954).

Castro, Gustavo de: Dreihundert Jahre Wahrscheinlichkeitsrechnung. Inst. Actuários Portug., Bol. Nr. **10**, 1—15 (1954) [Portugiesisch].

Varga, Otto: L'influence de la géométrie de Bolyai-Lobatchevsky sur le développe-ment de la géométrie. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **5**, Suppl., 71—94 und russ. Zusammenfassg. 94 (1954).

Der Verf. weist auf die Tatsache hin, daß die Forschungen von Bolyai und Lobatchevsky über die nicht-euklidische Geometrie wirklich der Ursprung der modernen Entwicklung der Geometrie waren. In der Tat ist die moderne axiomati-sche Behandlung euklidischer und nicht-euklidischer Geometrien von Hilbert, Pasch und Dehn die erste Folge der Forschungen von Bolyai und Lobatchevsky. Dann gibt der Verf. eine geschichtliche Skizze über die projektiven und gruppen-theoretischen Begründungen der Geometrie von Cayley, Klein, v. Staudt usw., und auch der Minkowskischen Geometrie, die als zweites aus diesen Forschungen erwachsen sind. Am Schluß findet sich eine Einleitung in die differentialgeometrische

Betrachtungsweise — als der dritten Konsequenz —, die zuerst Riemann in seiner berühmten Dissertation zur Begründung der sogenannten Riemannschen Geometrie einführt und die dann von Ricci, Helmholtz, Christoffel, Levi-Civita u. a. weiter entwickelt worden ist. Als Fortführung dieser Betrachtungen entstanden die modernen Geometrien von Schouten, Cartan, Weyl, Eisenhart, Veblen, Kagan, Finsler, Berwald usw. In jeder dieser drei Richtungen ist der Verf. bestrebt, eine neue Analyse zu erreichen. Aber der Verf. erwähnt nicht die Geometrie höherer Ordnung und die gefaserten Räume, die jetzt von vielen Geometern sehr intensiv untersucht werden.

A. Kawaguchi.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

• Lange, Heinrich: Geschichte der Grundlagen der Physik. Band I: Die formalen Grundlagen: Zeit-Raum-Kausalität (Orbis Academicus). Freiburg-München: Verlag Karl Alber 1954. X, 356 S. DM 22,—.

Verf. möchte mit seinem Buch (dessen zweiter Teil über die materialen Grundlagen der Physik noch nicht erschienen ist) einen Beitrag liefern zu der dringend wünschenswerten Verbreitung des (im vorigen Jahrhundert aufgekommenen) geschichtlichen Bewußtseins unter den Naturwissenschaftlern, vornehmlich den Physikern. So bemüht er sich, die Beziehungen zwischen dem philosophischen, dem theologischen und dem „rein naturwissenschaftlichen“ Denken aufzuweisen. In einem systematischen ersten Teil versucht er, in Anlehnung an Kant, die philosophischen Voraussetzungen der Physik abzuhandeln. Ein Hauptanliegen des Buches ist es nachzuweisen, daß der christliche Glaube neben der griechischen Philosophie eine wesentliche Voraussetzung dafür ist, daß die neuzeitliche Physik entstehen konnte. — Ref. hält diese Weise zu fragen und nachzudenken für richtig, hat aber den Eindruck, daß die Durchführung des Verf.'s im einzelnen leider nicht so stichhaltig und klar ist, wie gewünscht werden muß. Vor allem wird der Sinn des vom Verf. offenbar besonders wichtigen Begriffes der „Grenzbestimmung“ nicht hinreichend deutlich.

G. Süßmann.

Reichenbach, Hans: Les fondaments logiques de la théorie des quanta. Utilisation d'une logique à trois valeurs. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 103—114 (1954).

Verf. empfiehlt die Verwendung der dreiwertigen Logik von Łukasiewicz für die Quantentheorie. Ausführliche Diskussionsbemerkungen von Bocheński, Bodiou, Destouches, Février, Feys, Gonseth, Heyting, Kurepa, Reichenbach, u. a. über den Begriff der Adäquatheit einer Logik, über die Verwendung einer anderen mehrwertigen Logik (Destouches), über die Bedeutung der Termini „énoncé de fait“ und „énoncé de droit“, sowie zum Problem der experimentellen Widerlegbarkeit einer Logik.

H. Hermes.

Woodger, J.-H.: Problems arising from the application of mathematical logic to biology. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 133—140 (1954).

Es handelt sich um logische Fragen, welche durch biologische Probleme angeregt worden sind. Verf. nennt eine voreindeutige zweistellige Relation eine Hierarchie (hierarchical order), wenn sie ein erstes Glied besitzt und wenn (in Russellscher Schreibweise) $\mathcal{C}'R = \tilde{R}_{po}'(B'R)$. Dies ist eine Vereinfachung der Definition, welche Verf. früher in seinem Buch „The Axiomatic Method in Biology“ (Cambridge 1937) gegeben hat. Verf. führt eine größere Zahl von Begriffen ein, welche im Zusammenhang mit Hierarchien von Interesse sind. So nennt er eine Teilmenge A eines Bereiches von R eine „assemblage“, wenn es zu ihr ein festes Element x gibt, so daß A genau diejenigen Elemente enthält, zu welchen x in der Relation R steht.

Verf. gibt eine Anzahl von Sätzen über Hierarchien, meist ohne Beweis. In der Diskussion verweist Kurepa auf den engen Zusammenhang zwischen den Hierarchien mit den von ihm früher (s. z. B. dies. Zbl. 14, 394) betrachteten „tableaux ramifiés“.

H. Hermes.

Johansson, Ingebrigt: *Symboles logiques dans l'enseignement des théories déductives.* Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 21—24 (1954).

Verf. vertritt die Ansicht, daß die systematische Verwendung logischer Symbole beim Unterricht wünschenswert sei, soweit es sich um den Aufbau eines deduktiven Systems handelt.

H. Hermes.

Guitel, G.: *Sur une représentation symbolique du processus logique d'une démonstration.* Collection de Logique mathématiques, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 25—28 (1954).

Verf. empfiehlt eine systematischere Benutzung von Graphen für die Analyse und Darstellung logischer Zusammenhänge.

D. Tamari.

Coombs, C. H., H. Raiffa and R. M. Thrall: *Some views on mathematical models and measurement theory.* Decision processes 19—37 (1954).

The authors review the role of mathematical models in a science and discuss the models used in measurement theory in terms of the theory of relations. By a mathematical model is meant a formal deductive system which, together with its interpretation, constitutes a „theory“.

S. Vajda.

Riguet, J.: *Quelques applications de la théorie des relations binaires.* Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 141—144 (1954).

Auf eine Colloquiumsfrage von van Dantzig antwortend, stellt Verf. die praktische Gleichwertigkeit der Begriffe „orientierter Graph“ und „binäre Relation“ (definiert als Menge von geordneten Paaren) fest und gibt Beispiele binärer Relationen aus Biologie, Informationstheorie, Theorie der Spiele und projektiver Geometrie, sowie ein Verzeichnis seiner Arbeiten über binäre Relationen und ihrer Anwendungen.

Jürgen Schmidt.

Burks, Arthur W., Don W. Warren and Jesse B. Wright: *An analysis of a logical machine using parenthesis-free notation.* Math. Tables Aids Comput. 8, 53—57 (1954).

Mit Hilfe der Łukasiewicz'schen klammerfreien Bezeichnung wird eine einfache formelle Sprache $L\langle C, W, P, F \rangle$ definiert: C ist die (endliche) Menge der Buchstaben („characters“), W eine Funktion, die jedem $\delta \in C$ eine ganze Zahl $W(\delta) \leq 1$ als sein Gewicht zuordnet [$D(\delta) = 1 - W(\delta)$ heißt der Grad von δ], $P(\emptyset \neq P \subset C)$ die Menge der Wahrheitskonstanten (Werte) einer card $P = m$ -wertigen Logik und F eine Funktion, die jedem δ mit $D(\delta) > 0$, den sogenannten Funktoren, eine Wahrheitsfunktion (Wahrheitswertetafel) mit $D(\delta)$ Argumenten zuordnet, während für δ mit $D(\delta) = 0$, d. h. Konstanten $\delta \in P$ oder Variablen $\delta \notin P$, $F(\delta) = \delta$. Jede endliche Folge Δ von Buchstaben, einschl. der leeren Δ , heißt eine Formel, deren Gewicht $W(\Delta)$ die Summe der Gewichte ihrer Buchstaben ist [$W(\Delta) = 0$]. $L(\Delta)$ ist die Länge (Anzahl der Buchstaben) von Δ , $H_i(\Delta)$, bzw. $T_i(\Delta)$, $i \geq 0$, die Folge der i ersten, bzw. letzten, Buchstaben („head“, „tail“). Δ ist eine positive Formel, wenn alle $T_i(\Delta)$, $i > 0$, positives Gewicht haben, und heißt sinnvoll („well-formed“), wenn außerdem $W(\Delta) = 1$. Für diese Definitionen und ihre Motivierung verweisen die Verff. auf P. C. Rosenbloom, The elements of mathematical logic (dies. Zbl. 41, 148) IV. 1. und die dort erwähnte Literatur. Die vorliegende Arbeit bringt weitere Sätze in dieser Richtung und skizziert eine darauf beruhende Methode, Wahrheitstafeln mit Hilfe moderner Rechenmaschinenkomponenten zu berechnen. Zu diesem Zweck definiert Verf. die Spezifizierungsfunktion S , die für die Variablen Konstanten einsetzen, dagegen andere Buchstaben nicht ändern; und dann, durch

Rekursion über die wachsenden Endabschnitte, die den möglichen Spezifizierungen S zugeordneten Wertbestimmungsfunktionen $E_S(A)$ (A positiv oder A): $E_S(A) = A$, $E_S(\delta A) = F\{S(\delta) H_{D(\delta)}[E_S(A)]\} T_a[E_S(A)]$, wo $a = [E_S(A)] - D(\delta)$. Diese Rekursion wird durch den aus S -Spezifizierer, Funktionswechsler und Register bestehenden Bewerter („evaluator“ — eine Art arithmetischer Einheit) verwirklicht. Für ein gegebenes, im Gedächtnis abgelagertes A mit v verschiedenen Variablen durchläuft die Maschine m^n große δ -Zyklen, deren jeder aus $L(A)$ kleinen δ -Zyklen besteht. Es wird bewiesen: Eine positive Formel A ist eine eindeutig bestimmte Folge von $W(A)$ sinnvollen Formeln $P_j(A): A = P_{W(A)}(A) \cdots P_1(A)$. II. Dann und nur dann, wenn L mindestens ein δ mit $W(\delta) < 0$ enthält, ist jede Formel A dieser Sprache Teilabschnitt einer in L sinnvollen Formel $\Phi A \Psi$. III. Für positives A ist $E_S(A) = \pi_{W(A)} \cdots \pi_1$ ($\pi_j \in P$; Folge von Konstanten) mit $\pi_j = E_S(P_j(A))$. Man kann so mehrere sinnvolle Formeln in eine positive Formel zusammenfassen und simultan berechnen. Zum Schluß betrachten die Verf. maximale Formellängen und Gewichte, die für den zweckmäßigen Entwurf der Maschine, insbesondere ihrer Gedächtnis- und Registerkapazität, von Belang sind.

D. Tamari.

● Markov, A. A.: Theorie der Algorithmen. Trudy mat. Inst. Steklov **42**, 374 S. (1954) [Russisch].

Dieses umfangreiche, aus Vorlesungen an der Leningrader Universität hervorgegangene Werk ist mit peinlichster Sorgfalt geschrieben und ist in der Tat ein Lehrbuch der vom Verf. begründeten Theorie der Algorithmen. Die grundlegenden Ergebnisse über unentscheidbare mathematische Probleme von Church, Turing, Kleene und insbesondere Post bis 1947, wie auch des Verf. bis 1952, werden in einer einheitlichen Theorie zusammengefaßt. Die Lektüre setzt keine besonderen mathematischen Kenntnisse, auch keine andere Literatur, voraus — alles wird „ab ovo“ ausführlich entwickelt, was natürlich viel Geduld erfordert. Das Buch ist also, trotz seines abstrakten Inhalts, auch einem weiteren, mathematisch und philosophisch interessierten Publikum im russischen Sprachkreis zugänglich. Dagegen werden die neuesten Fortschritte auf diesem Gebiet nicht behandelt: Turings Arbeit über die Unentscheidbarkeit des Wortproblems in Halbgruppen mit Kürzungsregeln (lies. Zbl. **37**, 301) wird nicht erwähnt; die letzten Arbeiten der russischen Schule (die die Novikovs über die Unentscheidbarkeit des Wortproblems in Gruppen (lies. Zbl. **47**, 349) und die Detlovs über die Äquivalenz normaler Algorithmen und rekursiver Funktionen [Doklady Akad. Nauk SSSR **90**, 249—252 (1953)] sind nur kurz zitiert. Auf eine genauere Darstellung des Inhalts dieses Buches kann hier verzichtet werden, da dieser im wesentlichen schon vom Verf. in zwei früheren Arbeiten in gedrängterer Form veröffentlicht wurde [Trudy mat. Inst. Steklov. **8**, 176—189 (1951); dies. Zbl. **48**, 3]. Der „Eingeweihte“ kann mit Hilfe der Rückverweisungen einzelne Abschnitte unabhängig lesen. Das umfangreiche sechste (letzte) Kapitel über assoziative Kalküle, die auf ein schon 1914 von Axel Thue formuliertes Problem zurückgehen, ist eine Fundgrube spezieller Probleme und wird sicher noch weitere Arbeiten anregen.

D. Tamari.

Skolem, Th.: Remarks on „elementary“ arithmetic functions. Norske Vid. selsk. Forhdl. **27**, Nr. 6, 6 p. (1954).

Es seien die Startfunktionen $1, x + y, xy, |x - y|, [x/y]$ zugrunde gelegt. Verf. betrachtet die Klasse aller derjenigen Funktionen, die aus den oben erwähnten durch Substitution, durch Summation der Form $\sum_{r=0}^x f(r)$ und durch Produktbildung $\prod_{r=0}^x f(r)$ entstehen. Es werden gleichwertige Systeme von Startfunktionen angegeben, z. B. $1, x + y, xy, \delta(x, y)$ (= Kroneckersymbol). Einige elementare Funktionen werden nach obigem Bildungsprozeß explizit konstruiert; einige all-

gemeine Relationen werden hergeleitet. Kurz wird auch die Klasse mit den Startfunktionen $0, 1, x + y, xy$ betrachtet, die echt in der obigen Klasse enthalten ist.

H. Ostmann.

Péter, Rózsa: Rekursive Definitionen, wobei frühere Funktionswerte von variabler Anzahl verwendet werden. Publ. math., Debrecen 3, 33—70 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 10, 241) hat Verf. gezeigt, daß die sog. Wertverlaufsrekursion auf gewöhnliche Rekursionen vom selben Typ (primitive bei einer Variablen, k -rekursive bei k Variablen) und Substitutionen zurückgeführt werden kann. Bei einer Wertverlaufsrekursion wird der Wert von $\varphi(n+1)$

durch n und $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)$ so gegeben, daß $\varphi(n+1) = \gamma\left(n, \prod_{i=0}^n p_i^{\varphi(i)}\right)$

(γ primitiv-rekursiv). In der vorliegenden Arbeit untersucht Verf. Rekursionen, bei denen der Funktionswert in komplizierterer Weise von früheren φ -Werten abhängt, wie z. B. bei $\varphi(m+1, n+1, a) = \prod_{i=0}^{a-1} \max(\varphi(m+1, n, i), \varphi(m, i, a))$.

Ein anderes Beispiel einer solchen „neuartigen“ Rekursion bietet eine rekursive Aufzählung der elementaren Funktionen (das sind solche, die aus 1 und Variablen durch endlich viele Additionen, Multiplikationen, arithmetische Subtraktionen und Divisionen, sowie endliche Summen- und Produktbildungen zusammengesetzt werden können). Verf. erläutert an diesen Beispielen ein allgemeines Verfahren, solche Rekursionen in gewöhnliche mehrfache Rekursionen umzuformen. Es besteht, kurz gesagt, darin, die Angaben über die Verwendung der früheren Funktionswerte durch rekursiv definierte Hilfsfunktionen zu beschreiben, die miteinander und mit der Hauptfunktion verschachtelt sind. Das entstehende System simultaner Rekursionen läßt sich zu einer mehrfachen Rekursion für φ zusammenfassen. Das Verfahren kann auch unter Verwendung von Funktionsfunktionen (vgl. R. Péter, dies. Zbl. 45, 4) durchgeführt werden, wobei sich eine primitive Rekursion der 2. Stufe ergibt. In einem Anhang erläutert Verf. die Zurückführung dieser Rekursion auf eine mehrfache der 1. Stufe. — Im 2. Teil der Arbeit diskutiert Verf. die Frage, welche mehrfachen Rekursionen in primitiv-rekursive umgeformt werden können. Am Beispiel der Funktion $\varphi(m, n) = 0$ falls $m \cdot n = 0$, $\varphi(m+1, n+1) = \beta(m, n, \varphi(m, \gamma(m, n, \varphi(m, n+1))))$, $\varphi(m+1, n)$ wird eine solche Umformung durchgeführt. Dabei ist wesentlich, daß in der Definition von $\varphi(m+1, n+1)$ nur Terme $\varphi(m, x)$ ineinandergeschachtelt sind, nicht aber solche der Form $\varphi(m+1, x)$. Dann können die (ungeschachtelten) Glieder $\varphi(m+1, x)$ in einem primitiv-rekursiven Prozeß schrittweise zu $\varphi(m+1, 0)$ abgebaut werden. Es bleibt schließlich eine verschachtelte Rekursion nach einer Variablen, die leicht primitiv dargestellt werden kann. Der allgemeine Fall wird analog behandelt, ist aber formal erheblich komplizierter. Daß eine einzige Schachtelung zweier Terme $\varphi(m+1, x)$ eine nicht primitiv-rekursive Funktion erzeugen kann, ergibt sich aus einer entsprechenden Umformung der bekannten Ackermannschen Funktion. Die erwähnte Aufzählung der elementaren Funktionen genügt dieser Bedingung, ist also primitiv-rekursiv darstellbar. Da diese Funktion nicht elementar sein kann (Diagonalverfahren), gewinnt Verf. einen neuen Beweis für den Satz von Ilona Bereczki (dies. Zbl. 49, 8), nach dem nicht alle primitiv-rekursiven Funktionen elementar sind. — Errata: S. 37, Z. 13 v. u.: $\varphi(m, i, a)$ statt $\varphi(m, i, r)$. S. 40, Z. 3 v. o.: φ_k statt ψ ; Z. 6 v. o.: φ_k statt φ .

W. Markwald.

Rice, H. G.: Recursive real numbers. Proc. Amer. math. Soc. 5, 784—791 (1954).

Die reelle Zahl a ist eine rekursive reelle Zahl, wenn sie Grenzwert ist einer rekursiven (= allgemein rekursiven) Folge a_i von rationalen Zahlen, welche rekursiv konvergiert, d. h. zu der es eine solche rekursive Funktion g gibt, daß $|a_m - a_n| < 1/N$ für $g(N) < m, n$. Der Bereich E dieser Zahlen bildet einen Körper; jede rekursive und rekursiv konvergente Folge von Zahlen aus E besitzt einen Grenzwert in E .

dabei ist der Begriff der rekursiven Folge von Zahlen aus E in der natürlichen Weise (definiert). Der durch Adjunktion von i ($i^2 = -1$) entstehende Körper $E(i)$ ist algebraisch abgeschlossen; der Beweis dieses letzten Satzes folgt dem konstruktiven Beweis von P. C. Rosenbloom für den Fundamentalsatz der Algebra [Amer. math. Monthly 52, 562—570 (1945)].

E. Specker.

Lacombe, Daniel: Sur le semi-réseau constitué par les degrés d'indécidabilité récursive. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1108—1109 (1954).

Es werden (ohne Beweis) zwei Theoreme über den Kleene-Postschen Halbverband D der rekursiven Definierbarkeitsgrade angegeben (Kleene-Post, dies. bl. 57, 247), die Aussagen über unendliche aufsteigende Folgen $u_0 < u_1 < u_2 < \dots$ von Graden machen. Zu gewissen solcher Folgen können Grade d_1, d_2 gefunden werden, so daß für beliebige Grade x ($E i$) $(x \leq u_i) \leftrightarrow x \leq d_1 \& x \leq d_2$. Daraus ergibt sich: (1) d_1 und d_2 haben keine größte untere Grenze (d. h. D ist kein Verband), (2) die u_i haben keine kleinste obere Grenze. (Beide Resultate auch bei Kleene-Post, loc. cit.) Neu ist die Herleitung dieser Sätze aus sehr allgemeinen Theoremen über D , sowie ihre Übertragung auf den Halbverband D_A der arithmetischen Grade.

W. Markwald.

Sobociński, Bolesław: Axiomatization of a conjunctive-negative calculus of propositions. J. comput. Systems 1, 229—242 (1954).

In einer klammerfreien Symbolik des (zweiwertigen) Aussagenkalküls (AK) seien N und K in dieser Folge die Symbole der Negation und der Konjunktion. M sei die Satzmenge des AK in N und K . M ist dadurch ausgezeichnet, daß M zusammenfällt mit der Satzmenge des intuitionistischen AK in N und K [K. Gödel, Ergebn. math. Kolloqu. 4, 40 (1933)]. Hieraus das Interesse an einer Axiomatisierung von M . Verf. liefert ein System S , welches das Geforderte leistet, bestehend aus S 1. $NKNKNprKNKNqrKNKpqr$, S 2. $NKNpKpq$, S 3. $NKNqKpKrq$, S 4. $NKNKpqNNKpNNq$. \mathfrak{R}_1 sei die auf Ausdrücke in N und K beschränkte Einsetzungsregel, \mathfrak{R}_2 die Abtrennungsregel in der Gestalt „Wenn $NK\alpha N\beta$ und α Elemente von M sind, so auch β “. Es wird gezeigt (1) die semantische Vollständigkeit von S in bezug auf \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 ; denn sonst müßte es einen kürzesten Ausdruck geben, der die klassische Matrix für K und N erfüllt, aber aus S in dem präzisierten Sinne nicht ableitbar ist. Diese Annahme wird zu einem Widerspruch geführt. Sodann (2) die (stärkere) syntaktische Vollständigkeit von S (die Hinzufügung eines aus S nicht ableitbaren Ausdrucks zu S hat zur Folge, daß p , folglich jeder Ausdruck in N und K , aus S ableitbar ist). Endlich (3) die Unabhängigkeit von S . Als erstes werden aus S 94 Ausdrücke in N und K abgeleitet, von denen die meisten noch nicht allgemein bekannt sind. In ihnen sind die 23 Sätze enthalten, auf die im folgenden Bezug genommen wird. Die in der vorbildlichen Darstellungsart der Warschauer Schule verfaßte Studie ist eine Rekonstruktion einer kurz vor dem Ausbruch des zweiten Weltkrieges publizierten Abhandlung, die ein Opfer des Krieges geworden ist.

H. Scholz.

Beneš, Václav Edvard: A partial model for Quine's „New foundations“. J. symbolic Logic 19, 197—200 (1954).

Ausgehend von dem endlichen Axiomensystem S von T. Hailperin für „New foundations“ [J. symbolic Logic 9, 1—19 (1944)] konstruiert Verf. im Rahmen der Zahlentheorie ein Modell, das sämtliche Axiome von S erfüllt mit Ausnahme desjenigen (P 9), das besagt, daß es eine Menge gibt, die die ε -Relation darstellt.

E. Specker.

Algebra und Zahlentheorie.

Andreoli, Giulio: Aritmetiche non peaniane, e loro relazioni coi numeri interi. (Coefficienti ed esponenti in un algoritmo.) Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. Nr. 4, 3—12 (1954).

Im Restklassenbereich (Rb.) einer Primzahl ist die Arithmetik der Beiwerte s die der Reste selbst, die Arithmetik der Exponenten σ dagegen eine Algebra. In Booleschen Algebren (B. A.) befolgen s und σ bei Addition \mathfrak{A} und Multiplikation \mathfrak{M} die B. Minimal-A. \mathfrak{B} . — Allgemein sei innerhalb eines Bestandes \mathfrak{E} an Elementen eine Vorschrift \mathfrak{B} der Verknüpfung zweier $a * b = c$ gegeben. Ist $a = b$ und $a * a = \binom{2}{*} a$, so heiße $\binom{2}{*}$ die (durch \mathfrak{B} entstehende) zweifach iterative Zahl (i. Z.). Mit gewissen Vertausch- und Anreihbarkeitsforderungen erklärt man leicht die höheren i. Z., die dem Gesetz $\binom{m}{*} a * \binom{n}{*} a = \binom{m+n}{*} a$ gehorchen. In der gewöhnlichen Arithmetik sind, wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, die i. Z. die natürlichen Zahlen; wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$, so sind σ die i. Z. In beiden Fällen genügen sie Peanos Forderungen (P. F.). Ist \mathfrak{E} der Rb. einer zusammengesetzten Zahl, so „schichten“ sich die i. Z. In einer B. A. stimmen die i. Z. bei \mathfrak{A} und \mathfrak{M} überein und sind nur der Werte 0, 1 fähig; ihre Arithmetik ist \mathfrak{B} . Diese i. Z. erfüllen eine der P. F. nicht, nämlich die der Verschiedenheit einer i. Z. von der vorhergehenden. Ähnliches gilt von der Matrizenrechnung über einer B. A., mag $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$ oder die Komposition $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ sein. Bei \mathfrak{C} gibt es eine von $C(3)$ abweichende Arithmetik mit drei nicht zyklischen Elementen 0, 1, 2. Sie kann sich in Sonderfällen zu $C(2)$ oder \mathfrak{B} vereinfachen. — Ein weiteres Beispiel i. Z. bietet die Topologie der V_2 mit den Anzahlen σ der bei ihrer Zusammenfügung vorzunehmenden Schritte. — Zum Schluß eine Bemerkung über s und σ bei der Vornahme 1/ u im Komplexen. — In Nr. 6, Z. 4 lies $a^* x + b^* x^*$; auf S. 12, letzte Zeile, lies $(n + m)^{-1}$ statt $n + m$. L. Koschmieder.

Walls, Nancy: On a certain type of space-tableau. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 82—86 (1954).

bertragung des von A. W. Young eingeführten Begriffs des einer Zerlegung von n in ganzzahlige Summanden zugeordneten (ebenen) „tableau“ [vgl. D. E. Rutherford, Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 7, 51—54 (1942)] auf den dreidimensionalen Fall unter Beschränkung darauf, daß die einzelnen, das „space-tableau“ aufbauenden, ebenen tableaux Standardtableaus sind. H. Rohrbach.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

● **Ferrar, W. L.:** Höhere Algebra. München: Verlag R. Oldenbourg 1954. 336 S. 31 Abb. DM 18,50.

Für dieses Buch treffen die gleichen Bemerkungen zu, die schon zu seinem ersten Teil „Elemente der Algebra“ gemacht wurden (vgl. dies. Zbl. 53, 7). In diesem zweiten Teil werden folgende Fragen der klassischen Algebra bzw. elementaren Analysis behandelt: Berechnung endlicher Summen, unendliche Reihen und deren Näherungswerte; Rechnen mit komplexen Zahlen (Moivresche Formel) und Anwendungen (trigonometrische Formeln, Kreisgeometrie); Differenzengleichungen; Wurzelverteilung algebraischer Gleichungen, symmetrische Funktionen der Wurzeln (Hauptsatz), Auflösung von Gleichungen 3. und 4. Grades, Resultanten; Partialbruchzerlegung, Rechnen mit Ungleichungen; Grundbegriffe der Kettenbruchtheorie. — Einige Formulierungen sind nicht sehr glücklich gewählt (z. B. auf S. 8 die Bestimmung des allgemeinen Gliedes einer endlichen Reihe). E. Lamprecht.

● **Kuro (Kurosch), A. G.:** Algebraische Gleichungen beliebigen Grades. (Kleine Ergnzungsreihe zu den Hochschulbchern für Mathematik. Nr. VI.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. 35 S.

Übersetzung ins Deutsche einer erweiterten Fassung eines Vortrags vor Schülern der Oberklassen sowjetischer höherer Schulen, der eine Übersicht über Ergebnisse und Methoden der allgemeinen Theorie algebraischer Gleichungen gibt. Nach kurzer Behandlung der Gleichungen 1. bis 3. Grades (letztere ohne den sog. casus irreducibilis) wird auf die Auflösbarkeit durch Radikale, Existenz der Lösungen, Anzahl

er reellen Lösungen, angenäherte Berechnung von Lösungen (regula falsi, Tangentenmethode) eingegangen. Den Abschluß bildet der Begriff des Körpers und ein Ausblick auf die Entwicklung der Algebra.

H. Rohrbach.

Gáspár, J.: Eine neue Definition der Determinanten. Publ. math., Debrecen 3, 757—260 (1954).

Es sei K_n der Ring der (n, n) -reihigen Matrizen über einem Körper K der Charakteristik 0. Unter einer Zeilen- (Spalten-) Kombination zweier Matrizen A, B aus K verstehe man eine Matrix C , deren i -te Zeile (Spalte) entweder die i -te Zeile (Spalte) von A oder die i -te Zeile (Spalte) von B ist ($i = 1, 2, \dots, n$). Ferner sei $C_n(A, B)$ die Menge der 2^n Zeilen- oder 2^n Spaltenkombinationen von A, B . Dann wird gezeigt: Ist φ eine nichtkonstante Abbildung von K_n auf K , die den Forderungen

$$\varphi(A + B) = \sum_{C \in C_n(A, B)} \varphi(C), \quad \varphi(A B) = \varphi(A) \varphi(B), \quad \varphi(a A) = a^n \varphi(A) \quad (a \in K)$$

genügt, so ist $\varphi(A)$ die Determinante von A . Bemerkenswert an dieser Kennzeichnung der Determinante ist, daß jede der drei Forderungen sich auf genau eine der drei Verknüpfungen für Matrizen bezieht (Addition, Multiplikation, Multiplikation mit einem Skalar). Statt K kann auch ein kommutativer, nullteilerfreier Ring der Charakteristik 0 mit Einselement zugrunde gelegt werden.

H. Rohrbach.

Veltkamp, G. W., H. J. A. Duparc and W. Peremans: A minimum problem on matrices. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1954—007, 2 p.

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (Math. Centrum Amsterdam, Rapport ZW 1954—003) wird gezeigt: $\min E'(L P)^{-1} L C L' (P' L')^{-1} E = E' (P' C^{-1} P)^{-1} E$, wobei C eine positiv-definite (m, m) -Matrix, L eine (k, m) -Matrix, P eine (m, k) -Matrix vom Range k , E eine $(k, 1)$ -Matrix und $k \leq m$ ist. Das Minimum der betrachteten Menge positiv-reeller Zahlen wird (für von E unabhängiges variables L) dann und nur dann angenommen, wenn $L = V P' C^{-1}$ ist mit beliebiger nicht-singulärer (k, k) -Matrix V .

H. Rohrbach.

Brenner, J. L.: A bound for a determinant with dominant main diagonal. Proc. Amer. math. Soc. 5, 631—634 (1954).

In Verschärfung von Ergebnissen von A. Ostrowski (dies. Zbl. 46, 12) und G. B. Price (dies. Zbl. 54, 8) beweist Verf. für Matrizen $A = (a_{ij})$ mit $a_{ii} \neq 0$, $\sigma_i |a_{ii}| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $0 \leq \sigma_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) die Abschätzung

$$(*) \quad |\det A| \geq \prod_{j < k} (|a_{jj}| - r_j + R_j) \cdot |a_{kk}| \cdot \prod_{j > k} (|a_{jj}| - l_j + L_j),$$

wobei

$$r_j = \sum_{t > j} \sigma_t |a_{jt}|, \quad R_j = |a_{jk}/a_{kk}| \sum_{t < j} |a_{kt}|, \quad l_j = \sum_{k \leq t < j} \sigma_t |a_{jt}|,$$

$$L_j = |a_{jk}/a_{kk}| \left(\sum_{t > j} |a_{kt}| + \sum_{t < k} |a_{kt}| \right)$$

ist. Eine Abschätzung von $|\det A|$ nach oben erhält man, indem man die in (*) auftretenden Vorzeichen $-, +, -, +$ je durch das entgegengesetzte ersetzt.

H. Rohrbach.

Brenner, J. L.: Bounds for determinants. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 452—454 (1954).

In Verallgemeinerung eines Satzes von Hadamard wird gezeigt: Ist A eine n, n -reihige Matrix und $n = r_1 + r_2 + \dots + r_s$ eine Zerlegung von n in zwei oder mehr positive Summanden, ferner für $i = 1, 2, \dots, s$ der Betrag der Hauptunterdeterminante aus gewissen r_i Zeilen größer als die Summe der Beträge der übrigen Unterdeterminanten dieser Zeilen, wobei die s auftretenden Zeilengruppen paarweise keine Zeile gemeinsam haben, so ist $\det A \neq 0$. Der Hadamardsche Satz ergibt sich für $r_1 = r_2 = \dots = r_s = 1$. Verf. gibt ferner Abschätzungen für $|\det A|$, die seine eigenen Ergebnisse (vgl. das vorangehende Referat) in entsprechender Weise verallgemeinern.

H. Rohrbach.

Mammana, Garmelo: Sul problema algebrico dei momenti. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 8, 133—140 (1954).

L'A. studia, con un nuovo metodo suggerito da un precedente lavoro del recensore (questo Zbl. 39, 69), il classico problema algebrico dei momenti:

$\sum_{i=1}^n p_i x_i^k = \mu_k$, ($k = 0, 1, \dots, 2n-1$), nelle $2n$ incognite $x_i, p_i > 0$, con $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2n-1}$ numeri reali assegnati. Nella prima parte si stabiliscono le condizioni necessarie e sufficienti per la risolubilità del problema, mentre nella seconda si ricavano le ulteriori condizioni cui devono soddisfare le μ_k affinché le x_i risultino tutte $\geq a$, oppure $\leq b$, con a e b numeri reali prefissati. A. Ghizzetti.

Savage, I. Richard and Eugen Lukacs: Tables of inverses of finite segments of the Hilbert matrix. National Bureau of Standards; Appl. Math. Ser. Nr. 39, 105—108 (1954).

Die exakten Inversen $\mathfrak{I}_n = (T_{ik}^n)$ der Matrizen $\mathfrak{H}_n = (h_{ik})$ (endliche Abschnitte der Hilbert-Matrix) mit $h_{ij} = (i+j-1)^{-1}$ für $i, j = 1, 2, \dots, n$ werden für $n = 2(1)10$ mitgeteilt. Die Berechnung erfolgte mittels Rekursionsformeln für die T_{ik}^n . Die mitgeteilten Matrizen sind u. a. von Interesse bei Testversuchen von Invertierungsverfahren; denn es handelt sich bei den \mathfrak{H}_n um schlecht konditionierte Matrizen (vgl. nachstehendes Referat). H. Unger.

Todd, John: The condition of the finite segments of the Hilbert matrix. National Bureau of Standards; Appl. Math. Ser. Nr. 39, 109—116 (1954).

Zur Beurteilung der Konditionierung einer Matrix $\mathfrak{A} = (A_{ij})$ sind von Turing (vgl. dies. Zbl. 33, 285) die Größen $M(\mathfrak{A}) = n \max_{i,j} |A_{ij}| \max_{i,j} |A_{ij}^{-1}|$ und $N(\mathfrak{A}) = n^{-1} \text{norm } \mathfrak{A} \text{ norm } \mathfrak{A}^{-1}$ vorgeschlagen worden, von Neumann und Goldstine (vgl. dies. Zbl. 31, 314) die Größe $P(\mathfrak{A}) = \lambda(\mathfrak{A})/\mu(\mathfrak{A})$ (λ betragsmäßig größter, μ kleinster Eigenwert von \mathfrak{A}), M, N und P werden im Zusammenhang mit der Invertierung einer Matrix, insbesondere von $\mathfrak{H}_n = ((i+j-1)^{-1})$ mit $i, j = 1, 2, \dots, n$ genauer untersucht. Am Beispiel für \mathfrak{H}_n wird für $n = 4, 5$ und 6 der Einfluß der schlechten Konditionierung bei der Berechnung der Inversen mittels Elimination praktisch gezeigt, indem mit den exakten Werten verglichen werden kann (vgl. vorstehendes Referat). Dabei wird auch der Einfluß von Rundungsfehlern studiert. Verwendet man aufgerundete Elemente in \mathfrak{H}_n , so versagt die Invertierung bei $n = 6$. Verwendet man dagegen nach geeigneter Umformung ganze Zahlen, so kann man diesen Fall noch erfassen. Die Zahlen M, N und P werden für \mathfrak{H}_4 und zwei weitere bekannte Matrizen einander gegenübergestellt. H. Unger.

Fan, Ky and A. J. Hoffman: Lower bounds for the rank and location of the eigenvalues of a matrix. National Bureau of Standards; Appl. Math. Ser. Nr. 39, 117—130 (1954).

Verf. stellen sich die Aufgaben: 1. Untere Schranken für den Rang r der Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ ($i, j = 1, \dots, n$) anzugeben, die in bequemer Weise aus den Koeffizienten a_{ij} berechnet werden können, 2. n nicht negative Zahlen q_1, q_2, \dots, q_n zu finden, so daß jeder Eigenwert λ von \mathfrak{A} in einem oder mehreren der Kreise $|\lambda - a_{ii}| \leq q_i$ ($i = 1, \dots, n$) liegt. Zunächst wird referierend auf die vorhandene Literatur eingegangen und darauf hingewiesen, daß bezüglich 1. bisher meist nur die Frage der Singularität behandelt wurde. Weiter wird der Zusammenhang der beiden Fragestellungen diskutiert. Mitgeteilt werden einige Sätze über untere Schranken von r . Es wird gezeigt, wie diese zur Lokalisierung von Eigenwerten auch mit der Vielfachheit s verwendet werden können. Für normale Matrizen werden drei Einschließungssätze mitgeteilt, von denen die ersten beiden die Einschließung von k Eigenwerten ($k \leq n$) einer normalen (n, n) -Matrix betreffen. Der dritte Satz bringt Aussagen über die Lage von Eigenwerten der normalen Matrix \mathfrak{A} der Ordnung n , wenn die Eigenwerte der normalen Matrix \mathfrak{M} der Ordnung m (m und n können verschieden sein oder nicht) in Kreisbereiche eingeschlossen werden können. H. Unger.

Fan, Ky: Inequalities for eigenvalues of Hermitian matrices. National Bureau of Standards: Appl. Math. Ser. Nr. 39, 131—139 (1954).

Im ersten Teil der Arbeit werden Ungleichungen für aufeinanderfolgende Eigenwerte λ_i ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$) einer Hermiteschen Matrix $\hat{H} = (a_{ij})$ der Ordnung n aufgestellt mit den Größen a_{ij} und $\sum_{j>i} a_{ij}^2$ ($1 \leq i \leq n$). Es gilt (1): $d_{n-i+1} \leq d_i$ ($1 \leq i \leq n$), wenn c_1, c_2, \dots, c_{n-1} und d_1, d_2, \dots, d_{n-1} nichtnegative Zahlen sind, so daß $c_i \geq 1$, $d_i \leq d_{i-1} c_i^2$ ($c_i^2 \geq 1$), ($1 \leq i \leq n-1$), $|a_{ii}| + \dots + c_i (\sum_{j>i} a_{ij}^2)^{1/2} \leq d_i$ ($1 \leq i \leq n$). Die Richtigkeit von (1) wird noch unter anderen Voraussetzungen bewiesen, ebenso die Ungleichung $\lambda_i \leq d_i$. Im zweiten Teil wird \hat{H} eine einfachere Hermitesche Matrix $\hat{H} = (b_{ij})$, mit den Eigenwerten $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n$ zugeordnet, deren Elemente wie folgt gebildet werden: $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_s < p_{s+1} = n$, $b_{ij} = a_{ij}$ wenn es einen Wert $k = 1, 2, \dots, s+1$ gibt, so daß $p_{k-1} < i \leq p_k$, $p_{k-1} < j \leq p_k$, im übrigen $b_{ij} = 0$. Es gilt: $\sum_{i=1}^h z_i \leq \sum_{i=1}^h \lambda_i$ ($1 \leq h \leq n$); ist \hat{H} positiv definit: $\prod_{i=1}^h \lambda_{n-i+1} \leq \prod_{i=1}^h z_{n-i+1}$ ($1 \leq h \leq n$). Mit den $b_i = (\sum_{j>p_k} a_{ij}^2)^{1/2}$, $p_{k-1} < i \leq p_k$, werden weitere Ungleichungen zwischen den λ_i und z_i aufgestellt. Die Beweise der Ungleichungen werden in der Arbeit mitgeteilt.

H. Unger.

Dolph, C. L., J. E. McLaughlin and I. Marx: Symmetric linear transformations and complex quadratic forms. Commun. pure appl. Math. 7, 621—632 (1954).

Die Arbeit behandelt die Transformation einer komplexen nicht-Hermiteschen, symmetrischen quadratischen Form $Q[z] = \sum_{j,k} a_{jk} z_j z_k$ (in den komplexen Veränderlichen z_1, z_2, \dots, z_n) auf „Hauptachsen“. Während es bei reellen symmetrischen Quadratformen und bei Hermitesch-symmetrischen Quadratformen immer eine Hauptachsentransformation gibt, ist das für eine komplexe symmetrische Quadratform nicht immer der Fall. Die Verf. geben eine notwendige und hinreichende Bedingung hierfür an und untersuchen Eigenschaften dieser Orthogonaltransformation. Weiterhin werden eine Darstellung der Eigenwerte in der Form $\lambda_k = [w^{(k)}] / H[w^{(k)}]$ durch sogenannte stationäre Vektoren $w^{(k)}$ und Extremal-Eigenschaften dieser Eigenwerte hergeleitet.

J. Heinhold.

Taussky, Olga: Generalized commutators of matrices and permutations of factors in a product of three matrices. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises, 67—68 (1954).

In Verallgemeinerung eines Satzes von K. Shoda für unimodulare Matrizen (lies. Zbl. 17, 51) wird gezeigt: Für irgend zwei nichtsinguläre Matrizen X, Y mit gleichen Determinanten lassen sich stets zwei nichtsinguläre Matrizen C, D bestimmen mit $X = C^{-1} D^{-1} Y C D$. Als Anwendung ergibt sich insbesondere die Aussage, daß eine zyklische Permutation der drei Faktoren eines nichtsingulären Matrizenprodukts $A_1 A_2 A_3$ dessen charakteristische Wurzeln ungeändert läßt; eine nicht-zyklische Permutation dieser Faktoren dagegen läßt nur das Produkt der charakteristischen Wurzeln ungeändert.

H. Rohrbach.

Sherman, S.: A correction to „On a conjecture concerning doubly stochastic matrices“. Proc. Amer. math. Soc. 5, 998—999 (1954).

Der Beweis in einer früheren Arbeit des Verf. (lies. Zbl. 48, 250) ist nicht stichhaltig, da die benutzte Erweiterung (S. 512, Zeile 3ff.) nicht immer durchführbar ist. Der Satz bleibt richtig für (3, 3)-reihige Matrizen. Verf. gibt das ihm von A. Horn mitgeteilte Gegenbeispiel für den Fall (4, 4)-reihiger Matrizen an.

H. Rohrbach.

Afriat, S. N.: Symmetric matrices, quadratic forms and linear constraints. Publ. math., Debrecen 3, 305—308 (1954).

Es sei A eine n -reihige symmetrische Matrix mit reellen Koeffizienten, die ebenfalls reelle Matrix U habe n Reihen und m Spalten, die linear unabhängig vorausgesetzt werden. χ sei eine einspaltige Matrix. Verf. diskutiert notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $\chi A \chi = 0$ unter den Bedingungen $\chi = 0$, $\chi U = 0$ ist. Endresultat ist ein Satz von H. B. Mann [Amer. math. Monthly 50, 430—433 (1943)]. S. a. G. Debreu, dies. Zbl. 46, 244. *M. Eichler.*

Sokolov, N. P.: Über die Anwendung räumlicher Matrizen auf die Untersuchung von kubischen ternären Formen über dem reellen Zahlkörper. Dopovidy Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 159—164 und russ. Zusammenfassg. 164 (1954) [Ukrainisch].

Es wird das vollständige System von Invarianten der reellen kubischen ternären Form und der entsprechenden räumlichen Matrix in bezug auf die reellen linearen Transformationen angegeben und auf dieser Grundlage eine Klassifikation der kubischen ternären Formen im reellen Gebiet durchgeführt, was bei Übersetzung in die geometrische Sprache die projektive Klassifikation der reellen ebenen Kurven dritter Ordnung ergibt.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Gantmacher, F. R. und M. A. Ajzerman: Über eine algebraische Aufgabe in der Theorie der automatischen Regelung. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 1 (69), 136—138 (1954) [Russisch].

Es wird folgende Aufgabe betrachtet: gegeben sind zwei reelle Polynome $D_1(p)$ und $D_2(p)$. Die Anzahl ihrer Nullstellen in jedem der vier Quadranten, auf den positiven und negativen Halbachsen und im Koordinatenanfangspunkt ist bekannt. Gefragt wird nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen, welchen diese Verteilung der Nullstellen genügen muß, damit das Polynom $D_1(p) \cdot D_2(p)$ den Hurwitzschen Stabilitätsbedingungen genügt. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Reihe von Sonderfällen angegeben. Für den allgemeinen Fall sind nur vier notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingungen aufgeführt.

H. Bilharz-P. Sagirow.

Uchiyama, Saburō: Sur le nombre des valeurs distinctes d'un polynôme à coefficients dans un corps fini. Proc. Japan Acad. 30, 930—933 (1954).

Es sei F_q ein endlicher Körper der Ordnung $q = p^v$, $p > 2$, $v \geq 1$, $f(X)$ ein Polynom n -ten Grades aus $F_q[X]$. Verf. untersucht die Anzahl $V(q)$ der verschiedenen Werte von $f(x)$, $x \in F_q$. Für $n = 2$ und $n = 3$ ($p > 3$) wird $V(q)$ explizit angegeben. Bei $n \geq 4$ gilt, falls das Polynom $f^*(u, v) = (f(u) - f(v))/(u - v)$ absolut irreduzibel ist, $V(q) > q/2$ für alle $p \geq p_0$. Durch Beispiele wird gezeigt, daß der Satz im allgemeinen nicht richtig bleibt, wenn die Voraussetzung über $f^*(u, v)$ fallengelassen wird. Der Beweis ist nur skizziert und soll an anderer Stelle ausführlich dargestellt werden.

H.-E. Richert.

Carlitz, L.: q -Bernoulli und Eulerian numbers. Trans. Amer. math. Soc. 76, 332—350 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 32, 3) definierte Verf. die rationalen Funktionen η_m der Unbestimmten q durch die symbolischen Formeln (in welchen nach der Entwicklung η^m durch η_m ersetzt wird) $(q\eta + 1)^m = \eta^m$ ($m > 1$), $\eta_0 = 1$, $\eta_1 = 0$ und die Polynome $\eta_m(x)$ durch $\eta_m(x, q) = ([x] + q^r \eta)^m$, wobei die Abkürzung $[x] = (q^x - 1)/(q - 1)$ benutzt wurde. Schließlich definierte Verf. noch $q^x \beta_m(x) = \eta_m(x) + (q - 1) \eta_{m+1}(x)$, $\beta_m(0) = \beta_m$. Für $q = 1$ ergeben sich für β_m bzw. $\beta_m(x)$ die Bernoullischen Zahlen bzw. die Bernoullischen Polynome. Unter Benützung der Abkürzung $\left[\begin{smallmatrix} x \\ m \end{smallmatrix} \right] = \frac{(q^x - 1)(q^{x-1} - 1) \cdots (q^{x-m+1} - 1)}{(q - 1)(q^2 - 1) \cdots (q^m - 1)}$ führt Verf. in der vorliegenden Arbeit die folgenden Definitionen ein: $A_{ms} = A_{ms}(q)$ durch $[x]^m = \left[\begin{smallmatrix} x \\ 1 \end{smallmatrix} \right]^m = \sum_{s=0}^m A_{ms} \left[\begin{smallmatrix} x+s-1 \\ m \end{smallmatrix} \right]$; ($m \geq 1$), $H_m = H_m(x, q)$ durch die symbolische Formel $(qH + 1)^m = xH^m$; $H_0 = 1$, $H_1 = 1/(x - q)$. Schließlich $A_m(x, q) = \sum_{s=1}^m A_{ms} x^{s-1}$ ($m > 1$). Verf. beweist zehn Sätze, von denen wir als Beispiele die

legenden erwähnen: Satz 1. Es sei $p \geq 3$, Primzahl, $q \equiv a \equiv 1 \pmod{p}$. Dann ist

$$p\beta_m \equiv -1 \pmod{p} \text{ für } p-1|m, \text{ bzw. } \equiv 0 \pmod{p} \text{ für } p-1 \nmid m.$$

Satz 2. Es seien $q \equiv a$ und x rationale Zahlen, die \pmod{p} ganz sind. Ferner sei $\alpha^s \equiv a^s \pmod{p}$ für jedes s . Sei $p^{-1}(p-1)w$ und $r \geq 1$. Dann ist $H^w(x) \cdot (x^r - 1)^r \equiv 0 \pmod{p^w, p^r}$. Die Arbeit enthält einige störende Druckfehler.

H. J. Kanold.

Sharma, A. and A. M. Chak: The basic analogue of a class of polynomials. *Ateneo Mat. Univ. Parma* **5**, 325–337 (1954).

Verff. betrachten Polynome $H_n(x)$ mit der definierenden Eigenschaft: $D_q(H_n(x)) = n H_{n-1}(x)$, wobei D_q einen durch $D_q(f(x)) = (f(qx) - f(x))/(q-1)x$ festgelegten Operator bedeutet. Zu einer solchen „ q -harmonischen“ Folge $\{H_n(x)\}$ gibt es stets eine Zahlenfolge $\{h_n\}$, so daß $H_n(x) = \sum_{v=0}^n h_v \frac{x^{n-v}}{[n-v]!}$ ist mit $[m]! = \prod_{\mu=1}^m \frac{q^\mu - 1}{q - 1}$. Aus der Folge der $H_n(x)$ werden durch Zusatzforderungen $(H_n[ax+b] = \tau_n H_n(x))$ oder $([b+ax] = \tau_n H_n(x))$, wobei a, b beliebige komplexe Zahlen sind und $H_n[ax+b] = \frac{h_0}{[n]!} (ax+b)_n + \dots + h_n$, mit $(ax+b)_n = \prod_{v=0}^{n-1} (ax+bq^v)$ Teilmengen herausgriffen, die q (I)-reguläre oder q (II)-reguläre Folgen heißen, sich durch notwendige und hinreichende Bedingungen charakterisieren lassen und für welche die zugehörigen h_n bestimmt werden können. Wegen des Auftretens von $\prod_{v=1}^n (q^v - 1)$ im Nenner von h_n bedarf der Fall, daß q eine Einheitswurzel ist, einer besonderen Behandlung. Die Bezeichnungsweise wurde von den Verff. gewählt wegen der starken Analogien der „harmonischen“ und „regulären“ Folgen $\{P_n(x)\}$, die Nielsen seiner Theorie der Bernoulli- und Eulerzahlen zugrunde legte [sie sind durch $P'_n(x) = P_{n-1}(x)$ und $P'_n(-x-1) = (-1)^n P'_n(x)$ festgelegt] und zu deren von M. Ward [Ann. Math., II. Ser. **31**, 43–51 (1930)] untersuchten Verallgemeinerungen, bei denen die zweite Funktionalbeziehung durch $P'_n(ax+b) = \tau_n P'_n(x)$ ersetzt ist. Den Untersuchungen der Verff. liegt zum Teil die in der vorliegenden Arbeit noch nicht verwirklichte Absicht zugrunde, die von L. Carlitz (dies. Zbl. **32**, 3) eingeführten Bernoulli- und q -Eulerzahlen und -polynome zu gewinnen.

P. Heuser.

Dieulefait, Carlos E.: Sulla legge di distribuzione degli zeri dei polinomi ortogonali classici di grado n , considerata al divergere di n . *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **17**, 36–46 (1954).

Verf. betrachtet Polynome, die der Differentialgleichung $(-q_1)(x-q_2)y'' + 2(x_1(x-q_2) + x_2(x-q_1))y' - n(n-1 + 2(x_1+x_2))y = 0$ genügen, und zeigt, daß sie in (q_1, q_2) orthogonal sind und sich in der Rodriguesschen Form darstellen lassen. Er setzt $\eta(z) = (z-q_1)^{x_1}(q_2-z)^{x_2}$, $q_1 < q_2$, und bemerkt im Anschluß an C. P. Castelli [Metron **1921**, 289] das Verteilungssatz der Nullstellen $x_{i,n}$ für $n \rightarrow \infty$ durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \eta(x_{i,n}) = \int_{q_1}^{q_2} p(x) \log \eta(x) dx.$$

Für die Legendreschen Polynome ($q_1 = -1$, $q_2 = 1$, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$) und die Hermite'schen Polynome ($q_1 = -\infty$, $q_2 = \infty$, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, $x \rightarrow \infty$, $4xq^2 \rightarrow 1$) wird der Grenzwert links berechnet und die dazugehörige Funktion $p(x)$ bestimmt. [Ref. merkt, daß die obige Differentialgleichung im wesentlichen die Differentialgleichung der Jacobischen Polynome ist, für die die Rodriguessche Form bekannt ist, vgl. G. Szegő, *Orthogonal polynomials* 4, 3 und auch 12, 7, 2 (dies. Zbl. **23**, 215).]

O. Volk.

G.-Rodeja E., E.: Note on determinants of hyperbolic sines and cosines. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. **14**, 200—203 (1954) [Spanisch und Englisch].

In analogy to the former paper (Rodeja, this Zbl. **46**, 243), case of ordinary sines and cosines, the following theorems on determinants of hyperbolic sines and cosines are proved: Put $\text{Ch}(k_1, \dots, k_n) = [\cosh k_i \theta_j]$. With reals θ_j and integers $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$,

$$\text{Ch}(k_1, \dots, k_n) / \text{Ch}(0, 1, \dots, n-1) \geq \prod_{i>j} (k_i^2 - k_j^2) / (n-1)! 1! 3! \dots (2n-3)!$$

Define Sh with \sinh in place of \cosh . With reals θ_j and integers $1 \leq k_1 < \dots < k_n$,

$$\text{Sh}(k_1, \dots, k_n) / \text{Sh}(1, 2, \dots, n) \geq \prod k_j \prod_{i>j} (k_i^2 - k_j^2) / 1! 3! \dots (2n-1)!$$

In either case the equality holds in the limit as all $\theta_j \rightarrow 0$.

T. Nakayama.

Gruppentheorie:

Hashimoto, Hiroshi: On a generalization of groups. *Proc. Japan Acad.* **30**, 548—549 (1954).

L'A. considère sous le nom de G -système un ensemble muni d'une opération notée multiplicativement et d'une application univoque notée $a \rightarrow a'$ vérifiant les lois suivantes: I $(a b) c = a (b c)$. II $(a' a) b = b$. III $(a b)' = b' a'$. Le groupe en est un cas particulier obtenu en ajoutant la condition supplémentaire III' qui remplace III: $a' a = b' b$. La structure d'un G -système est très simple: il existe un sous-ensemble G' de G tel que tout élément x de G se mette sous la forme $x = x' f$, où $x' \in G'$ et où f est un idempotent de G ; cette représentation est unique. Le groupe G' est constitué par l'image de G dans l'application $a \rightarrow a'$. L'A. donne des conditions nécessaires et suffisantes équivalentes à la condition III' pour que G soit un groupe, par exemple: G ne possède qu'un élément idempotent.

L. Lesieur.

Tamura, Takayuki: Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4. *J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci.* **5**, 17—27 (1954).

L'A. donne une liste de tous les demi-groupes d'ordre 4. Il l'obtient en classant ces demi-groupes d'une façon logique. Ses résultats coïncident avec ceux de G. E. Forsythe (ce Zbl. **64**, 20).

L. Croisot.

Tamura, Takayuki: On a monoid whose submonoids form a chain. *J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci.* **5**, 8—16 (1954).

L'A. détermine tous les demi-groupes dont les sous-demi-groupes forment une chaîne par rapport à la relation d'inclusion. Si un tel demi-groupe est fini, c'est un demi-groupe cyclique dont l'ordre n vérifie une relation de la forme $p^m \leq n \leq p^m + 2$ où p est un nombre premier, et il contient comme sous-demi-groupe un groupe cyclique d'ordre p^m . S'il est infini, c'est un groupe et il est la réunion d'une chaîne croissante de groupes cycliques d'ordre p^m , p étant un nombre premier fixé.

R. Croisot.

Kimura, Naoki: Maximal subgroups of a semigroup. *Kodai math. Sem. Reports* **1954**, 85—88 (1954).

Cette note est une contribution à l'étude des demi-groupes ayant au moins un élément idempotent. L'A. remarque d'abord qu'à chaque idempotent d'un tel demi-groupe est associé un sous-demi-groupe maximal admettant cet idempotent comme élément unité. En appelant élément inversible un élément a d'un demi-groupe D tel que l'on ait $a D = D a = D$, il montre, d'une part, qu'un demi-groupe D possède au moins un élément inversible si et seulement si il possède un élément unité e , d'autre part, que s'il en est ainsi l'ensemble des éléments inversibles forme un groupe qui est le plus grand sous-groupe de D admettant e comme élément unité; cette étude a été reprise récemment indépendamment par E. S. Ljapin [*Mat. Sbornik*, n. Ser. **38**, 373—388 (1956)]. Enfin, l'A. montre l'existence des sous-groupes maximaux d'un demi-groupe (ayant au moins un idempotent) et il les caractérise; cette question avait déjà été traitée dans des cas particuliers par A. H. Clif-

rd [Ann. of Math., II. Ser. **41**, 1037–1049 (1941)] et S. Schwarz [Czechosl. math. J. **3**, 7–21 (1953)].

R. Croisot.

Kimura, Naoki: On some examples of semigroups. Kodai math. Sem. Reports **1954**, 89–92 (1954).

Le but de cette note est de donner un exemple de demi-groupe simple à gauche simplifiable à gauche (ou simple à droite et simplifiable à droite) qui ne soit pas groupe. L'A. en donne trois exemples; l'un d'eux avait déjà été introduit par Baer et F. Levi (ce Zbl. **4**, 338).

R. Croisot.

Tamura, Takayuki: Note on unipotent inversible semigroups. Kodai math. m. Reports **1954**, 93–95 (1954).

En utilisant les résultats de A. H. Clifford et D. D. Miller (ce Zbl. **35**, 294), l'auteur ramène l'étude de la structure des demi-groupes ayant un seul idempotent qui est élément net à celle des demi-groupes ayant un élément zéro qui soit leur unique idempotent. L'étude de la classe de ces demi-groupes, évidemment très générale puisqu'elle contient tous les demi-groupes sans élément idempotent auxquels on adjoint un élément zéro, est annoncée par l'A. qui doit en faire l'objet d'un autre article.

R. Croisot.

Tamura, Takayuki and Naoki Kimura: On decompositions of a commutative semigroup. Kodai math. Sem. Reports **1954**, 109–112 (1954).

Les A.A. considèrent un demi-groupe D et les équivalences régulières définies sur D telles que le demi-groupe-quotient ait tous ses éléments idempotents (c'est-à-dire, un "band", d'après la terminologie de A. H. Clifford); ils constatent l'existence d'une équivalence de ce type plus fine que toutes les autres. En particulier, si D est un demi-groupe commutatif, cette équivalence est définie de la manière suivante: $a \sim b$ si et seulement si il existe une puissance de a qui soit multiple de b et une puissance de b qui soit multiple de a .

R. Croisot.

Numakura, Katsumi: A note on the structure of commutative semigroups. J. Japan Acad. **30**, 262–265 (1954).

Es sei H eine kommutative Halbgruppe mit 1 und 0. Bedeutet $a \sim b$ ($a, b \in H$) die Gültigkeit von $\bigcap_{n=1}^{\infty} H h a^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} H h b^n$ für alle $h \in H$, so erweist sich \sim als Kongruenzrelation in H . Jede \sim -Klasse K ist Unterhalbgruppe von H mit mindestens einem idempotenten Element e_K . $K e_K$ ist der Suschkewitsch-Kern von K . [Ann. **99**, 30–50 (1928)] von K , falls e_K existiert. Die Vereinigung aller K , die idempotente Elemente existieren, ist Unterhalbgruppe von H . *A. Jaeger.*

Higman, D. G.: Remarks on splitting extensions. Pacific J. Math. **4**, 545–555 (1954).

Soit N abelscher Normalteiler einer Gruppe G , so gibt es nach einem Satz des (dies. Zbl. **47**, 27) genau dann ein G -Komplement für N ($G = N C$, $N \cap C = 1$), wenn zu jedem Primteiler p von $|G:1|$ in einer p -Sylowgruppe S von G ein S -Komplement für $N \cap S$ existiert. In der vorliegenden Arbeit wird mit einem von H. Zassenhaus stammenden Beispiel gezeigt, daß dieses Kriterium sich nicht auf beliebige N ausdehnen läßt. (Dem Ref. war durch mündliche Mitteilung seit längerer Zeit ein solches Beispiel von H. Wielandt bekannt.) Verf. beweist nun unter Zuhilfenahme des eingangs erwähnten Satzes für beliebiges $N: C$ ist genau dann G -Komplement für N , wenn C minimal mit der Eigenschaft $G = N C$ ist, und wenn zu jedem Primteiler p von $|G:1|$ eine p -Sylowgruppe S von G existiert, für deren Normalteiler $N \cap S$ es ein S -Komplement in C gibt. Hierin ist offenbar der Schur-Zassenhaus'sche Satz enthalten, daß ein beliebiger Normalteiler N von G ein G -Komplement besitzt, wenn $(G:N, N:1) = 1$ ist. Dieser Fall erfährt eine Reihe von Kennzeichnungen. — Für das dem Komplementierbarsein entgegengesetzte Verhalten $N \subseteq \Phi(G)$

Frattiniuntergruppe, wird mit dem obigen Kriterium für abelsches N eine Charakterisierung angegeben, die sich auf die Einbettung der höheren Kommutator-

gruppen von N in eine p -Sylowgruppe von G bezieht. — Schließlich untersucht Verf. das mit dem Vorstehenden eng verwandte Problem des Konjugiertseins von G -Komplementen. Es ergibt sich: Ist N abelsch, so sind genau dann die G -Komplemente von N unter G konjugiert, wenn für eine p -Sylowgruppe S von G die S -Komplemente für $N \cap S$ in S konjugiert sind. (Der Satz war vom Ref. l. c. ohne Beweis ausgesprochen worden.) Eine Beantwortung der Vermutung (s. H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie I, S. 132, dies. Zbl. 18, 9), daß bei $(G:N, N:1) = 1$ für beliebiges N alle G -Komplemente konjugiert sind, gelingt Verf. nicht. Er gibt zwei äquivalente Vermutungen an; sie beruhen im wesentlichen auf der Tatsache, daß die Ausgangsvermutung gleichbedeutend damit ist, daß unter jeder Gruppe A von Automorphismen von N mit $(A:1, N:1) = 1$ und zu jedem Primteiler p von $N:1$ eine p -Sylowgruppe von N existiert, die unter A invariant ist. W. Gaschütz.

Tannaka, Tadao: On the normal form of cohomology groups. J. math. Soc. Japan 6, 16—31 (1954).

Sei Ω eine abelsche Gruppe mit der abelschen Operatorengruppe G . Verf. verallgemeinert die in Spezialfällen bekannten Normalformen von Kozyklen von G in Ω auf beliebige Dimension $n > 0$ [O. Schreier, Monaths. Math. Phys. 34, 165—180 (1926) für $n = 2$, und R. Lyndon, dies. Zbl. 31, 198 für trivial wirkendes G] durch Einführung einer schwachen und starken Normalität: Bei einer direkten Zerlegung $G = A \times B$ heißt ein Kozyklus f schwach-normal, wenn $f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 1$ falls irgendein $\gamma_i = 1$, und f den Rekursionen $f(\beta_1, \dots, \beta_i, \alpha_{i+1}\beta_{i+1}, \dots, \alpha_n\beta_n) = f(\beta_1, \dots, \beta_{i+1}, \alpha_{i+2}\beta_{i+2}, \dots, \alpha_n\beta_n) \cdot f(\beta_1, \dots, \beta_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)^{\beta_{i+1} \cdots \beta_n}$ mit $\alpha_i \in A$, $\beta_i \in B$ genügt. Die starke Normalität, die die schwache zur Folge hat, wird für endliches abelsches G durch komplizierte Formeln definiert, die die Schreierschen Bedingungen verallgemeinern. Ein Hauptergebnis der Arbeit ist die Feststellung der Existenz eines stark-normalen Kozyklus in jeder Kohomologiekategorie, was nur in Fällen niedriger Dimensionen bewiesen wird. Damit gelingt die Lösung eines wichtigen kohomologietheoretischen Problems, der Konstruktion eines (normalen) Kozyklus f als Funktion auf $G \times \dots \times G$ aus seinen Werten für spezielle Argumente (im wes. für eine Basis der abelschen Gruppe G); dabei können sämtliche Relationen zwischen diesen speziellen Werten von f angegeben werden. — Als Anwendung bestimmt Verf. die (-1) - und 3-dimensionalen Kohomologiegruppen der Multiplikationsgruppe K^\times eines bzyklischen Körpers $K = K_1 \cdot K_2$ mit der Gruppe G : Mit den Normoperatoren N, N_1, N_2 für K, K_1, K_2 gilt $H_3(G, K^\times) \cong (N_1 K_1^\times \cap N_2 K_2^\times) / N K^\times$. — Die starke Normalität wurde mit Hilfe von Inzidenzmatrizen auch von S. Takahashi (dies. Zbl. 48, 258) eingeführt, der auch zu der gleichen Deutung von $H_3(G, K^\times)$ gelangt. (Bem. des Ref.: Die schwache Normalität läßt sich für nicht notwendig abelsche Gruppen G bez. einer Untergruppe von G verallgemeinern, was zu verschiedenen kohomologietheoretischen Anwendungen führt.) W. Jehne.

Čarin, V. S.: Über die Automorphismengruppen nilpotenter Gruppen. Ukrain. mat. Žurn. 6, 295—304 (1954) [Russisch].

Diese Arbeit schließt sich inhaltlich an eine von A. I. Mal'cev an [dies. Zbl. 43, 23; englische Übersetzung in Amer. math. Soc., Translat. 2, 1—21 (1955)] und ist auch eine Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 53, 11; 54, 11). Eines der Hauptbeweismittel in Mal'cevs Theorie war die Tatsache, daß jede auflösbare Gruppe von Matrizen mit Elementen aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper eine Untergruppe von endlichem Index enthält, deren Matrizen sich simultan auf Dreiecksgestalt transformieren lassen. Verf. zeigt zunächst, daß eine ähnliche Aussage auch bei Matrizen mit Elementen aus einem algebraisch nicht abgeschlossenen Körper, nämlich dem Körper der rationalen Zahlen, gilt. Eine auflösbare Gruppe G von nicht-singulären Matrizen mit rationalen Elementen hat einen Normalteiler H , dessen Matrizen sich simultan auf Dreiecksgestalt mit 1 in der Haupt-

gonale transformieren lassen (solche Matrizen werden in der englischen Literatur oft häufig als „unitriangular“ bezeichnet), während die Faktorgruppe G/H eine endliche Erweiterung einer freien Abelschen Gruppe endlichen oder abzählbaren Ranges ist. Beim Beweis dieses Satzes benutzt Verf. die Tatsache, daß eine multiplikative Gruppe algebraischer Zahlen von beschränktem Grad das direkte Produkt einer endlichen und einer freien Abelschen Gruppe von höchstens abzählbarem Rang ist. Der obige Hauptsatz gestattet es, verschiedenen abstrakt gegebenen Gruppen eine konkretere Gestalt zu verleihen. Wir erinnern zunächst an den Begriff der relativen Zentralreihe. I sei eine Gruppe von Automorphismen einer Gruppe G . Eine Normalreihe $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ heiße Zentralreihe relativ zu I , wenn alle Automorphismen von I jedes G_i invariant lassen und in den Faktorgruppen G_i/G_{i+1} den identischen Automorphismus induzieren. Wenn insbesondere die Faktorgruppen torsionsfreie Abelsche Gruppen von endlichem Rang sind, dann ist I nilpotent und ebenfalls torsionsfrei und von endlichem Rang. (Hierzu vergleiche man H. J. Zbl. 38, 163.) Wenn weiter G selbst eine nilpotente torsionsfreie Gruppe von endlichem Rang ist und I auflösbar ist, dann hat G eine Zentralreihe relativ zu einem gewissen Normalteiler Δ von I , dessen Faktorgruppe I/Δ eine endliche Erweiterung einer freien Abelschen Gruppe endlichen oder abzählbaren Ranges ist. Unter den gleichen Bedingungen für G ist eine lokal-nilpotente Automorphismengruppe I sogar nilpotent und hat einen Normalteiler endlichen Ranges, dessen Faktorgruppe wiederum frei Abelsch von höchstens abzählbarem Rang ist; außerdem hat I nur endlich viele Elemente endlicher Ordnung. Schließlich erweist sich eine Gruppe mit einer Normalreihe der obigen Form, deren Faktoren alle nichtzyklische Untergruppen der additiven Gruppe der rationalen Zahlen sind, als eine endliche Erweiterung einer nilpotenten Gruppe.

K. A. Hirsch.

Ree, Rimhak: On ordered, finitely generated, solvable groups. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 48, 39—42 (1954).

Verf. beweist, daß eine endlich erzeugte, auflösbare, geordnete Gruppe G dann und nur dann nilpotent ist, wenn sie die Maximalbedingung für Untergruppen erfüllt. Ohne die Maximalbedingung braucht eine geordnete, endlich erzeugte, auflösbare Gruppe nicht nilpotent zu sein. Zum Beispiel kann eine endlich erzeugte, zweistufig metabelsche Gruppe geordnet werden (d. h. F/F'' , wobei F eine endlich erzeugte freie Gruppe und F'' die zweite Ableitung ist). Übrigens kann in der ersten Hälfte des Satzes die Bedingung, daß die Gruppe G geordnet ist, auch fortgelassen werden, da für endlich erzeugte Gruppen die Maximalbedingung für Untergruppen eine Folge der Nilpotenz ist.

K. A. Hirsch.

Lyndon, R. C.: On Burnside's problem. Trans. Amer. math. Soc. 77, 202—215 (1954).

Die Gruppe B besitze q Erzeugende und sei dadurch definiert, daß die p -te Potenz (p Primzahl) jedes Elements gleich 1 ist. Mit B_n/B_{n+1} werden die Faktoren der absteigenden Zentralreihe von B bezeichnet; für die freie Gruppe mit q Erzeugenden mögen F_n/F_{n+1} die entsprechende Bedeutung haben. Der Rang von F_{n+1} sei $\psi(n)$. Die Gruppe B_n/B_{n+1} ist das direkte Produkt einer gewissen Anzahl $\psi(n)$ zyklischer Gruppen der Ordnung p , wobei $\psi(n) \leq \psi(n)$. Verf. beweist:

I. $\psi(n) = \psi(n)$ für $n < p$. II. $\psi(p) = \psi(p) - \binom{p+q-1}{p} + q$. III. $\psi(p+1) = \psi(p+1) - \binom{q}{2} \binom{p+q-2}{p-1}$ für $p > 2$. IV. $\psi(p+2) = \psi(p+2) - 3p+1$ für $p > 3$ und $q = 2$. Diese Resultate waren im wesentlichen schon P. Hall 1949 bekannt, ohne daß sie veröffentlicht worden sind. Die Hauptrolle beim Beweis spielt die von Magnus stammende Darstellung einer freien Gruppe durch Potenzreihen und der Kalkül von Fox (dies. Zbl. 50, 256; 55: 17). R. Kochendörffer.

Loś, J.: On the complete direct sum of countable Abelian groups. Publ. math., Debrecen 3, 269—272 (1954).

Eine abelsche Gruppe G heißt divisibel (nach Szele algebraisch abgeschlossen), wenn $G = 2G = 3G = \dots$ ist. Reduziert heißt die abelsche Gruppe G , wenn sie keine von 0 verschiedene divisible Untergruppe enthält. Als Verallgemeinerung eines Satzes von A. P. Mischina (dies. Zbl. 45, 303) wird bewiesen, daß die komplette direkte Summe von unendlich vielen abzählbaren reduzierten torsionsfreien abelschen Gruppen ($\neq 0$) keine (diskrete) direkte Summe von abzählbaren Gruppen ist. Eine Folgerung hiervon und von bekannten Sätzen von R. Baer und T. Szele ist, daß eine komplette direkte Summe von abzählbaren torsionsfreien abelschen Gruppen dann und nur dann eine direkte Summe von abzählbaren Gruppen ist, wenn die Summanden mit endlich vielen Ausnahmen divisible sind. Der Beweis stützt sich auf folgenden Satz: Ist S^* bzw. S die komplette bzw. diskrete direkte Summe der torsionsfreien Gruppen G_1, G_2, \dots ($\neq 0$), so enthält die Faktorgruppe S^*/S eine divisible Untergruppe von der Mächtigkeit des Kontinuums. L. Rédei.

Sąsiada, E.: On abelian groups every countable subgroup of which is an endomorphic image. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 359—362 (1954).

Kertész and Szele (this Zbl. 46, 20) proposed the problem of finding the groups G which possess to every subgroup H an endomorphism onto H , and they solved it for finitely generated abelian groups (this Zbl. 52, 21). The author now solves the problem for countable abelian groups by showing that such groups are of one of the following five types: (1) groups possessing a free abelian direct summand of infinite rank; (2) free abelian groups of finite rank; (3) primary abelian groups whose elements have bounded orders; (4) primary abelian groups which can be homomorphically mapped onto the direct sum of the cycles of order p^n , one for each $n = 1, 2, \dots$; (5) direct sums of a group of type (2) and for each p a group of type (3) or of type (4), the trivial group being allowed in each case. More generally he shows that in a (not necessarily countable) abelian group every countable subgroup is an endomorphic image if it is of one of the above types. B. H. Neumann.

Ehrenfeucht, A.: On a certain problem of K. Kuratowski and A. Mostowski in the theory of groups. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 471—473 (1954).

Sei \mathfrak{M} die additive Gruppe der ganzzahligen Maße μ auf der Menge C der natürlichen Zahlen [$\mu(X)$ ganz, $\mu(X \cdot Y) = \mu(X) \cdot \mu(Y)$ für $X \cdot Y = O$, $X, Y \subseteq C$]; ist \mathfrak{M} isomorph der Gruppe C^c aller ganzzahligen Funktionen auf der Menge c der Teilmengen von C ? Verf. zeigt, daß \mathfrak{M} isomorph ist der Gruppe H_P der homomorphen Abbildungen von P in die additive Gruppe der ganzen Zahlen; dabei ist P die Gruppe der beschränkten ganzzahligen Funktionen auf C . Aus der Kontinuums-hypothese folgt, daß P eine freie abelsche Gruppe ist (Ref., dies. Zbl. 41, 363), und daß somit H_P und C^c isomorph sind. E. Specker.

Scherk, Peter and J. H. B. Kemperman: Complexes in Abelian groups. Canadian J. Math. 6, 230—237 (1954).

G sei eine additive abelsche Gruppe der Ordnung $|G| \leq \infty$, A und B seien Komplexe von G mit $|A|$ bzw. $|B|$ Elementen, ferner $A + B = \{a + b\}$ mit $a \in A, b \in B$. Für $|A| + |B| > |G|$ ist nach der multiplikativen Fassung des Satzes von Mann (vgl. H. B. Mann, dies. Zbl. 46, 42) $A + B = G$. Daher sei $|A| + |B| \leq |G|$. Dann gilt nach Cauchy und Davenport (dies. Zbl. 29, 344), falls G Primzahlordnung hat, $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$. Nach I. Choula (ohne Beweis; dies. Zbl. 12, 247) gilt dies mit einer Zusatzbedingung auch für zyklische Gruppen zusammengesetzter Ordnung. Verff. untersuchen nun bei festem ganzzahligen $k \geq 1$ die Gültigkeit von $|A + B| \geq |A| + |B| - k$ und verwandter Aussagen, unter verschiedenen zusätzlichen Bedingungen, für beliebige abelsche Gruppen G . Die Beweise beruhen auf der oben genannten Methode von Mann und den von den Verff. in nachstehend referierter Arbeit benutzten Verfahren. H. Rohrbach.

Kemperman, J. H. B. and Peter Scherk: On sums of sets of integers. Canadian Math. 6, 238—252 (1954).

Verff. gehen von der folgenden Modifikation des Satzes von Mann aus: Ist $\lambda > 0$ und $0 \in \mathfrak{A}$, $0 \in \mathfrak{B}$, $n \notin \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so gibt es ein m mit

$$C(n) - C(n - m) \geq A(m) + B(m), \quad 0 < m \leq n, \quad m \notin \mathfrak{C}, \quad a + n - m \in \mathfrak{C}$$

ir jedes $a \in \mathfrak{A}$, $a \in m$. Sie beweisen mehrere Sätze verwandter Art, deren jeder ein Mannschen Satz impliziert. Als Beispiel sei erwähnt: Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ Mengen mit $0 \in \mathfrak{A}$, $0 \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset [0, n]$, $\mathfrak{B} \subset [0, n]$, $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cap [0, n] = \mathfrak{C} \cap [0, n]$ und $C(n) = A(n) + B(n)$, so gibt es ein m mit $m \in \mathfrak{A}$, $m \in \mathfrak{B}$, $C(n) = C(n - m) + A(m) + B(m) - 1$ und $\lambda m \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$, $\lambda m \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ für jedes ganze λ mit $\lambda m \in [0, n]$. Dabei bedeutet $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ die größte Teilmenge \mathfrak{D} von $[0, n]$ mit $(\mathfrak{A} - \mathfrak{D}) \cap [0, n] = \mathfrak{C} - \mathfrak{D}$. Der Hauptinhalt der Arbeit besteht in der Übertragung und Verallgemeinerung dieser Sätze — bei denen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ als endliche Teilmengen der additiven Gruppe der ganzen rationalen Zahlen verstanden werden — auf additive Gruppen \mathfrak{G} mit der Ordnungsbeziehung: Für je zwei Elemente g', g'' von \mathfrak{G} gilt $g + g' = + g''$ für alle $g \in \mathfrak{G}$ (vgl. hierzu auch v. d. Corput-Kemperman, dies. Zbl. 36, 5). Verff. erhalten weitere Aussagen durch Anwendung des Hintereinandensprinzips $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cap [0, n] = \mathfrak{C} \cap [0, n] \iff (\mathfrak{A} + \tilde{\mathfrak{C}}) \cap [0, n] \subset \mathfrak{B}$. Dabei bedeutet allgemein die Inversion $\tilde{\mathfrak{A}}$ von \mathfrak{A} die Menge der $n - a \in [0, n]$ mit $a \in \mathfrak{A}$. Schließlich weisen sie darauf hin, daß die Ergebnisse auch bei Einführung von Gewichten $f(g)$ gültig bleiben (vgl. v. d. Corput, dies. Zbl. 30, 16), wobei jedoch im Unterschied zu v. d. Corput $f(g)$ nur als negative, nichtabnehmende, reellwertige Funktion vorausgesetzt wird.

H. Rohrbach.

Yoneda, Nobuo: On the homology theory of modules. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I 7, 193—227 (1954).

Sei A ein Ring mit Einselement. Der Verf. untersucht die Homologie- und Kohomologietheorie von A -Moduln im Sinne von Eilenberg-Steenrod, Foundations of Algebraic Topology (dies. Zbl. 47, 414). Eine Sequenz A -projektiver Moduln (X)

$$\cdots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow 0$$

mit einem Homomorphismus $X_0 \rightarrow A$ heißt projektive Auflösung des A -Moduls A , wenn die Sequenz $\cdots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ exakt ist. Dabei heißt ein A -Modul X bekanntlich A -projektiv, wenn ein A -Homomorphismus von X in einen Faktormodul $R = Q/P$ eines A -Moduls Q stets aus einem Homomorphismus von X in Q erhalten werden kann: Jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow & \\ Q & \rightarrow & R \rightarrow 0 \end{array}$$

mit exakter Horizontalen läßt sich durch einen Homomorphismus $X \rightarrow Q$ kommutativ erweitern. Ist B ein weiterer A -Modul, so erhalten wir aus (X) die Sequenz der Tensorprodukte bezüglich A :

$$(X \otimes B) \quad \cdots \rightarrow X_2 \otimes B \rightarrow X_1 \otimes B \rightarrow X_0 \otimes B \rightarrow 0.$$

Da $X \otimes B$ eine 0-Sequenz (ein formaler Komplex) ist, können wir die Homologiegruppen $H_n(X \otimes B)$ bilden. Es stellt sich heraus, daß diese Homologiegruppen nicht von der speziellen projektiven Auflösung X abhängen, d. h. ist auch X' eine projektive Auflösung von A , so ist $H_n(X \otimes B) = H_n(X' \otimes B)$ für alle n , die Gruppen $T_n(A, B) = \text{Tor}_n^A(A, B) = H_n(X \otimes B)$ sind also Invarianten des Paares (A, B) von A -Moduln. Für $T_n(A, B)$ gelten die folgenden charakteristischen Regeln: I. Jeder Homomorphismus $f: A \rightarrow A'$ induziert Homomorphismen $f_*: T_n(A, B) \rightarrow T_n(A', B)$. Es gilt: $f_* = \text{Identität}$, falls $f = \text{Identität}$, $(f - g)_* = f_* - g_*$. II. Ist $(A): 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A \rightarrow 0$ exakt, so existieren für $n > 0$

Homomorphismen $\varepsilon_*: T_n(A, B) \rightarrow T_{n-1}(A, B)$ derart, daß die Sequenz

$$T(A, B): \dots \rightarrow T_n(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} T_{n-1}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} T_{n-2}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \dots$$

$$\dots \rightarrow T_0(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} T_0(A, B) \rightarrow 0$$

exakt ist. Hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & A & \rightarrow & A \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & A' & \rightarrow & A' \rightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Horizontalen A, A' , so erhält man aus dem Homomorphismus $f: A \rightarrow A'$ einen Homomorphismus $f_*: T(A, B) \rightarrow T(A', B)$. III. $T_n(A, B) = 0$ für $n > 0$, falls A A -frei ist. IV. $T_0(A, B) = A \otimes B$. Entsprechende Regeln I' bis IV' gelten in bezug auf das zweite Argument B . — Der Sequenz X und dem Modul B läßt sich noch ein anderer formaler Komplex zuordnen: Bezeichnet $\text{Hom}_A(X_i, B)$ die Gruppe aller A -Homomorphismen von X_i in B , so erhalten wir aus der Auflösung X eine aufsteigende 0-Sequenz

$$\text{Hom}_A(X, B): \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_A(X_0, B) \rightarrow \text{Hom}_A(X_1, B) \rightarrow \dots$$

Der n -te Homologiefaktor dieser Folge ist wieder von der Wahl der projektiven Auflösung X von A unabhängig, so daß wir ihn mit $E^n(A, B) = \text{Ext}_A^n(A, B)$ bezeichnen dürfen. Für $E^n(A, B)$ gelten ebenfalls Regeln I. bis IV., bzw. I' bis IV': die in II. auftretende exakte Sequenz $E(A, B)$ ist dabei aufsteigend, d. h. der ε_* entsprechende Operator ∂_* bildet $E^n(A, B)$ in $E^{n-1}(A, B)$ ab. Statt III' gilt: $E^n(A, B) = 0$ für $n > 0$, falls B A -injektiv ist. Statt IV. gilt $E^0(A, B) = \text{Hom}_A(A, B)$. $T_n(A, B)$ ist in A und B symmetrisch: $T_n(A, B) = T_n(B, A)$. Ist Y eine injektive Auflösung von B , so ist $E^n(A, B)$ zum n -ten Homologiefaktor der aufsteigenden 0-Sequenz $\text{Hom}_A(A, Y)$ kanonisch isomorph. Der Verf. untersucht dann den Zusammenhang zwischen den Gruppen $E^n(A, B)$ und den Erweiterungen von B mit A . Eine exakte Sequenz

$$(E_n) \quad 0 \rightarrow B \rightarrow E_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow E_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

heiße dabei eine n -fache Erweiterung von B mit A . Die n -fachen Erweiterungen von B mit A lassen sich zu Äquivalenzklassen zusammenfassen: $E_n \sim E'_n$ bedeute: Es gibt endlich viele Erweiterungen $E_n^0 = E_n, E_n^1, \dots, E_n^k = E'_n$ und für jedes $i = 1, \dots, k-1$ Homomorphismen h^i von E_n^{i-1} in E_n^i oder von E_n^i in E_n^{i-1} . Dabei soll jedes h^i A und B jeweils identisch abbilden. (Die genaue Definition der Homomorphismen zwischen Diagrammen lese man in der Arbeit nach.) Hauptergebnis ist der Klassifizierungssatz: Den Klassen äquivalenter Erweiterungen $E_n(A, B)$ entsprechen eineindeutig die Elemente von $E^n(A, B)$. Sind $p, q \geq 0$ und E_p eine p -fache Erweiterung von B mit A sowie F_q eine q -fache Erweiterung von C mit B , so erhält man aus E_p und F_q in naheliegender Weise eine $(p+q)$ -fache Erweiterung $E_p \circ F_q$ von C mit A . Diese Multiplikation überträgt sich auch auf die Äquivalenzklassen. Wegen des Klassifizierungssatzes ist dadurch ein Produkt zwischen den Elementen aus $E^p(A, B)$ und den Elementen aus $E^q(B, C)$ definiert. Der Verf. definiert dann unabhängig von den Erweiterungen ein Produkt

$$\odot: \quad E^p(A, B) \times E^q(B, C) \rightarrow E^{p+q}(A, C), \quad p, q \geq 0,$$

welches bilinear und assoziativ ist und für $p, q \geq 0$ mit den durch die Erweiterungen-Multiplikation induzierten Produkten übereinstimmt. Ist $\alpha \in E^0(A, B) = \text{Hom}(A, B)$, so ist die Linksmultiplikation von $E^n(B, C)$ mit α identisch mit dem durch α induzierten Homomorphismus von $E^n(B, C)$ in $E^n(A, C)$. Ähnlich hängt die Multiplikation mit den Elementen aus $E^1(A, B)$ mit den oben definierten Korand-

operatoren zusammen. Zum Schluß wird kurz auf den Zusammenhang dieser Theorie mit der Homologietheorie assoziativer Systeme eingegangen. Die Bezeichnungen für die Homomorphismen usw. sind sehr zweckmäßig; leider wird die Lektüre der Arbeit durch manche Druckfehler gelegentlich etwas behindert.

H. Liptin.

Reiner, Irving: Symplectic modular complements. Trans. Amer. math. Soc. **7**, 498—505 (1954).

Let Γ_{2n} be a symplectic modular group of order $2n$, i. e. it is a group of $2n$ -rowed integral matrices \mathfrak{M} satisfying $\mathfrak{M} J \mathfrak{M}' = J$, where $J = \begin{pmatrix} 0 & I^{(n)} \\ -I^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$. Let j, k be

integers $\leq n$. An integral matrix $\begin{pmatrix} A^{(j,n)} & B^{(j,n)} \\ C^{(k,n)} & D^{(k,n)} \end{pmatrix}$ is called a normal (j, k) array, if it satisfies that $A B'$ and $C D'$ are symmetric and that $A D' - B C' = (I^{(j)}, 0)$ or $\begin{pmatrix} I^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}$. Evidently, $A = (I^{(j)}, 0)$, $B = 0$, $C = 0$, $D = (0, I^{(k)})$ gives a normal

array. In fact, every normal array can be transformed by multiplying a symplectic modular matrix to such a normal array. Consequently, every normal array can be completed into a symplectic modular matrix.

L. K. Hua.

Osima, Masaru: On the representations of the generalized symmetric group. Math. J. Okayama Univ. **4**, 39—56 (1954).

The totality $S(n, m)$ of permutations of nm symbols i_j ($1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$) commutative with $(1_1 2_1 \cdots m_1)(1_2 2_2 \cdots m_2) \cdots (1_n 2_n \cdots m_n)$ form a group of order $n! m^n$, called the generalized symmetric group, which calls our attention in connection with the modular representation theory of (ordinary) symmetric groups [Brauer-Robinson, this Zbl. **29**, 199; Osima, Canadian J. Math. **6**, 511—521 (1954)] besides some other significance. The present paper studies first the representation theory of $S(n, m)$ and then applies it to the said context. Thus, for a permutation W of n letters, let W^* be the element of $S(n, m)$ which arises when we reflect W on the suffixes j of our nm symbols i_j . The totality of such W^* ($W \in S_n$) form a subgroup S_n^* of $S(n, m)$ isomorphic to S_n , and we have $S(n, m) = S^* \mathfrak{L}$, $S_n^* \cap \mathfrak{L} = 1$, where \mathfrak{L} is the commutative invariant subgroup of $S(n, m)$ generated by the cycles $Q_j = (1_j 2_j \cdots m_j)$ ($1 \leq j \leq n$). With a primitive m -th root ω of 1, let $\zeta(a_j)$ be the character $Q_j \rightarrow \omega^{a_j}$ of \mathfrak{L} . Let $n(k)$ ($0 \leq k \leq m-1$) be the number of a_j equal to k ; thus $\sum_k n(k) = n$. The set of elements of $S(n, m)$ leaving $\zeta(a_j)$ invariant, by transformation, has a structure $S^*(n(k)) \mathfrak{L}$ where $S^*(n(k))$ is a subgroup of S_n^* directly decomposed into some subgroups $S_{n(k)}^*$ isomorphic to $S_{n(k)}$, whose characters of $S^*(n(k)) \mathfrak{L}$, which have $\zeta(a_j)$ as component when restricted to \mathfrak{L} , are in correspondence with the irreducible characters of $S^*(n(k))$, whence to n -tuples $[\chi_0] [\chi_1] \cdots [\chi_{m-1}]$ of Young diagrams $[\chi_k]$ of respective node number $n(k)$. In this way it is seen that the irreducible characters of $S(n, m)$ are in 1-1 correspondence with star diagrams (Robinson, this Zbl. **36**, 154) $[\chi]_m^* = [\chi_0] \cdots [\chi_{m-1}]$ of n nodes. Their degrees are determined. Further, Robinson's (this Zbl. **36**, 155) results on ordinary symmetric groups are generalized to the present case. In particular is derived a generalization of the so-called Murnaghan-Nakayama recursion formula [reviewer, Japanese J. Math. **17**, 89—108 (1941)], which is combined in the rest of the paper, a detailed reproduction of the author's paper i. e., with results of Brauer (this Zbl. **50**, 24) and Thrall-Robinson (this Zbl. **43**, 260) to give some relation between decomposition numbers of a symmetric group belonging to n -blocks of the same weight and to prove, among others, that the Cartan matrices of n -blocks with the same weight have the same elementary divisors. T. Nakayama.

Taylor, Robert L.: Covering groups of nonconnected topological groups. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 753—768 (1954).

Eine Überlagerung der topologischen Gruppe G besteht aus einer topologischen

Gruppe E und einem stetigen offenen Homomorphismus Φ von E auf G , dessen Kern diskret ist. G wird nicht als zusammenhängend vorausgesetzt; die das Einselement e enthaltende Komponente von G wird mit G_0 bezeichnet. Einfach zusammenhängend heißt G , falls dies für G_0 zutrifft. Die Überlagerung $\Phi: E \rightarrow G$ heißt eigen, falls $\Phi^{-1}(G_0)$ zusammenhängend ist. Zweck der Arbeit ist eine Klassifizierung der eigenen Überlagerungen nicht zusammenhängender Gruppen. Ist nämlich $p: G_0^* \rightarrow G_0$ eine eigene Überlagerung mit einfach zusammenhängendem G_0^* und $\Phi: E \rightarrow G$ irgendeine eigene Überlagerung, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus W von G_0^* in E derart, daß $\Phi \circ W = p$ gilt. Die Untergruppe $W^{-1}(e)$ von $\pi = p^{-1}(e)$ heißt der Typus der Überlagerung $\Phi: E \rightarrow G$. Ist Q eine Untergruppe von π , $K = G_0^*/Q$ und $\Phi: K \rightarrow G_0$ durch $\Phi(x^*Q) = p(x^*)$, $x^* \in G_0^*$, definiert, so besteht eine natürliche ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Klassen untereinander isomorpher zum Typus Q gehörender eigener Überlagerungen von G und den Klassen untereinander isomorpher topologischer Fortsetzungen von $\Phi: K \rightarrow G_0$. Dabei heißt ein stetiger Homomorphismus $\Psi: E \rightarrow G$ topologische Fortsetzung von $\Phi: K \rightarrow G_0$, falls K Untergruppe der topologischen Gruppe E ist und $\Psi(E) = G$, $\Psi|K = \Phi$, $\Psi^{-1}(e) = \Phi^{-1}(e)$ gilt. Notwendige und hinreichende Bedingungen, damit G eigene, zum vorgegebenen Typus $Q \subset \pi$ gehörende Überlagerungen besitzen soll, werden mittels der Kohomologietheorie abstrakter Gruppen ausgedrückt. Es wird noch gezeigt, daß von den drei ein-dimensionalen kompakten Lieschen Gruppen mit zwei nicht einfach zusammenhängenden Komponenten, die eine genau eine eigene einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt, die andere zwei nicht isomorphe solche Überlagerungen und die dritte keine solche Überlagerung besitzt.

T. Ganea.

Jennings, S. A.: Substitution groups of formal power series. Canadian J. Math. 6, 325—340 (1954).

Die Menge der formalen Potenzreihen $f(x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ mit Koeffizienten a_2, a_3, \dots aus einem kommutativen Ring R bildet nach der Substitution $g(f(x))$ als Multiplikation eine Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(R)$. Der Fall, daß R der Körper der komplexen Zahlen ist, wurde sogar für mehrere Unbestimmte schon von S. Bochner und W. T. Martin (Several complex variables, dies. Zbl. 41, 52) und von M. Gotô (dies. Zbl. 45, 159) betrachtet. Für obigen Fall gilt: Ist S ein Unterring von R , so ist $\mathfrak{G}(S)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}(R)$. Sind S, T Ideale von R mit $ST = 0$, so sind $\mathfrak{G}(S), \mathfrak{G}(T)$ elementweise vertauschbar. Ist sogar $R = S \oplus T$, so ist $\mathfrak{G}(R) = \mathfrak{G}(S) \otimes \mathfrak{G}(T)$. Ist S ein Ideal von R , so ist $\mathfrak{G}(S)$ normal in $\mathfrak{G}(R)$ mit $\mathfrak{G}(R/S) \approx \mathfrak{G}(R)/\mathfrak{G}(S)$. Es wird noch eine Anzahl struktureller Eigenschaften von \mathfrak{G} festgestellt, ferner in \mathfrak{G} eine Topologie eingeführt, in welcher insbesondere als eine Umgebung des Einselements jede (normale) Untergruppe \mathfrak{G}_r gilt, die aus den speziellen Elementen $F_r: x + a_{r+1} x^{r+1} + a_{r+2} x^{r+2} + \dots$ besteht ($r = 1, 2, \dots$, $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}$). Nachher sei $R = K$ ein Körper von der Charakteristik 0. Für jedes $k (= 1, 2, \dots)$ bilden die Elemente

$$G_k(x) x(1 - k \wedge x^k)^{-1/k} = x + \wedge x^k + (1 + k) \wedge^2 x^{2k+1/2!} + \dots$$

eine (einparametrische) abelsche Untergruppe $\{G_k(x)\}$ ($x \in K$). Die $G_k(x)$ bilden in dem Sinne eine Basis von \mathfrak{G} , daß sich die Elemente von \mathfrak{G} eindeutig als $G_1(x_1) G_2(x_2) \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} G_1(x_1) \dots G_n(x_n)$ schreiben lassen. Ferner wird \mathfrak{G} topologisch durch die zwei Untergruppen $\{G_1(x)\}, \{G_2(\beta)\}$ erzeugt. Es wird noch im Zusammenhang mit $\mathfrak{G}(K)$ auf übliche Weise eine Liesche Algebra eingeführt. Außerdem wird $\mathfrak{G}(R)$ für den Fall untersucht, daß $R = \mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen ist. L. Rédei.

Nomizu, Katsumi: On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups. Ann. of Math., II. Ser. 59, 531—538 (1954).

Let \mathfrak{M} be a compact homogeneous space of a connected nilpotent Lie group; then \mathfrak{M} has the form $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$, where \mathfrak{G} is a simply connected nilpotent Lie group and \mathfrak{D}

discrete subgroup (Mal'cev, this Zbl. 34, 17). If \mathfrak{g} denotes the Lie algebra of \mathfrak{G} , on Th. 1: There is a canonical isomorphism between the cohomology algebras \mathfrak{M} and \mathfrak{g} : $H^*(\mathfrak{M}) \cong H^*(\mathfrak{g})$. This generalizes results of Matsushima (this Zbl., 310); it is proved by regarding \mathfrak{M} as a principal fibre bundle with compact fibre (group) and showing (i) that $H^*(\mathfrak{M})$ is isomorphic to the cohomology algebra $H^*(C')$ of the complex C' of differential forms on \mathfrak{M} which are invariant under the action of the fibre, and (ii) that $H(C') \cong H(C)$, where C is the complex of differential forms on \mathfrak{G} right-invariant under \mathfrak{G} , which, with the known relation $H(C) \cong H^*(\mathfrak{g})$, proves the result. Corollaries include the fact that \mathfrak{M} is orientable and has vanishing Euler characteristic. — If $I^*(\mathfrak{M})$ denotes the complex of differential forms on \mathfrak{M} invariant under \mathfrak{G} , and $I^*(\mathfrak{g})$ the complex of invariant cochains on \mathfrak{g} , then on Th. 2: $I^*(\mathfrak{M}) \cong I^*(\mathfrak{g})$. Since every invariant cochain on \mathfrak{g} is closed, $I^*(\mathfrak{g})$ is identical with the cohomology algebra obtained from $I^*(\mathfrak{g})$, but this is not in general isomorphic to $H^*(\mathfrak{g})$, as an example shows. Thus the theory of invariant integrals in general does not apply to compact homogeneous spaces of non-compact Lie groups.
P. M. Cohn.

Matsushita, Shin-ichi: Sur quelques types des théorèmes de dualité dans les groupes topologiques. I. II. Proc. Japan Acad. 30, 849—854, 957—962 (1954).

The author proves the imbeddability of a maximally almost periodic topological group G into a compact group by a direct method. Let $A(G)$ denote the ring of most periodic continuous complex valued functions on G with the ordinary product. Let $\Phi^0(A(G))$ denote the collection of homomorphisms of $A(G)$ into the complex numbers with the weak topology. Hence $\Phi^0(A(G))$ is compact Hausdorff. Let furthermore $\mathfrak{S}_{\alpha, \alpha}$ denote the collection of isometries of $A(G)$ induced by the right and left translations on G respectively. Let \mathfrak{B} denote the set of all bounded reversible linear operators S of $A(G)$ into itself with (a) $(Sf)^* = S^*f^*$ ($*$ = complex conjugation), (b) $S(fg) = (Sf)(Sg)$, (c) $S1 = 1$, and finally (d) S commutes elementwise with $\mathfrak{S}_{\alpha, \alpha}$. The idea is to show first that there is a natural 1-1 correspondence between $\Phi^0(A(G))$ and \mathfrak{B} . It seems to the reviewer that this correspondence has not been completely established (although it undoubtedly exists in the way indicated by the author). The author associates with any $\varphi \in \Phi^0(A(G))$ an S_φ satisfying (a), (b), (c), (d) and with $\|S_\varphi f\| = \|f\|$ for any $f \in A(G)$. But he does not show that S_φ is an onto map, and therefore the invertibility of S_φ does not necessarily follow. Once the 1-1 correspondence between $\Phi^0(A(G))$ and \mathfrak{B} is established, the topology of $\Phi^0(A(G))$ can be carried over to \mathfrak{B} and it is shown that thus \mathfrak{B} is turned into a compact topological group in which $\mathfrak{S}_{\alpha, \alpha} \cong G$ is dense. This result lends itself to an interpretation of various types of duality. In particular in the second part of the note, the relationships between a group G and its dual group \hat{G} in case of a locally compact abelian G are interpreted and studied in terms of the concepts considered above.
W. T. van Est.

Følner, Erling: Note on a generalization of a theorem of Bogoliouboff. Math. Scand. 2, 224—226 (1954).

Die Note setzt Kenntnis der in dies. Zbl. 56, 27 besprochenen Abhandlung des Verf. voraus. Es wird u. a. gezeigt, daß in dem dortigen Hauptresultat die Bezeichnung „ E relativ dicht“ durch die schwächere „ $\bar{m} E > 0$ “ ersetzt werden kann, wobei ist \bar{m} das „upper Weyl mean measure“. Die Ungleichung $q \leq k^2$ ist dann durch $q \leq (\bar{m} E)^{-2}$ zu ersetzen.
W. Maak.

Arens, Richard: Homeomorphisms preserving measure in a group. Ann. of Math., II. Ser. 60, 454—457 (1954).

A continuous homeomorphism T of the real line which is also measure-preserving is clearly a linear function. The purpose of the paper is to generalize this result to any locally compact connected one-dimensional abelian group G . The author proves

that in this case T is of the form $T(x) = A(x) + b$ where b is an element of G and A is an automorphism of G . Actually leaning on local decomposition theorems of L. Pontrjagin (Topological Groups, this Zbl. 22, 171) he assumes in addition Hausdorff's second axiom of countability for G . The proof proceeds via the local structure of such groups and makes use of elementary techniques of local Haar measure.

Chr. Pauc.

Verbände. Ringe. Körper:

Andreoli, Giulio: Operazioni binarie. Scale di operazioni. *Ricerca, Rivista Mat. pur. appl.* 5, Nr. 3, 3—11 (1954).

Manche, z. T. wohlbekannte, formelle Eigenschaften binärer Operationen werden dargestellt, ohne genauere Sätze zu formulieren oder Literatur anzugeben. Unter „Operationenleiter“ versteht der Verf. eine Gesamtheit von Operationen, die aus einer von ihnen durch iterierte Anwendung einer Transformation φ (und ihrer Umkehrung) auf den Grundbereich hervorgehen. Ausgehend von der gewöhnlichen Addition komplexer Zahlen als Operation vom „Rang“ (0) $(+)$ und der exponential-logarithmischen Transformation erhält man $a \cdot b = \exp(\log a + \log b)$,

$a + b \equiv \exp(\log a + \log b)$ oder auch $a + b = \log(\exp a + \exp b)$ für alle ganzen r , mit dem distributiven Gesetz $(a + b) + c = (a + c) + (b + c)$, und gelangt zu Operationen über Vektoren $X = (\dots, x_i, \dots)$ mit ähnlichen Eigenschaften: $X + Y \equiv X (+) Y \equiv (\dots, x_i + y_i, \dots)$, $X \times Y \equiv X (+) Y \equiv (\dots, x_i + y_i, \dots)$, wo $r = r(i)$ und s irgend-

eine ganze Zahl. [Bem. des Ref.: Einige Druckfehler und die irrtümliche Nummerierung der §§ sind nicht sinnstörend. Dagegen seien folgende Ungenauigkeiten angeführt: (S. 3) Die verschiedenen Operatorenarten zweiter Ordnung für nichtassoziative Operationen sind leicht genau anzugeben. (S. 4) Es wird nicht gesagt, daß $[a, b] \rightarrow r \Leftrightarrow (b, a) \rightarrow r$, d. h. $[a, b] = (b, a)$. (S. 5) Als Bedingungen für die schon Abel (lange vor Lie) bekannte Transformierbarkeit assoziativer Operationen auf eine einzige, z. B. Addition, kann die Differenzierbarkeit durch Stetigkeit und die Gruppeneigenschaft durch die der Halbgruppe ersetzt werden — s. z. B. E. Cartan, *Mém. Sci. math.* 42, 11 (1930); D. Tamari, *C. r. Acad. Sci. Paris* 228, 1092—1094 (1949). — In der Arbeit werden Transformationen wie Permutationen behandelt, die Vieldeutigkeit des Logarithmus im Komplexen vernachlässigt und der Körperbegriff („corpo“) seines üblichen Sinnes entleert: (S. 8) $X (-) Y$ definiert keine additive Gruppe, da die $X = (x_1, 0)$ kein $-X$ besitzen ($r(1) = 0$, $r(2) = 1$).]

D. Tamari.

Hsu, L. C.: Note on an abstract inversion principle. *Proc. Edinburgh math. Soc.*, II. Ser. 9, 71—73 (1954).

Verf. verallgemeinert einen Typ von Umkehrformeln von E. T. Bell (vgl. dies. Zbl. 36, 296) für Funktionen über endlichen Mengen durch Hinzunahme von Operatoren negativen Grades (reziproken Operatoren).

E. Lamprecht.

Okhuma, Tadashi: Sur quelques ensembles ordonnés linéairement. *Proc. Japan Acad.* 30, 805—808 (1954).

Pour une chaîne ordonnée E soit $G(E)$ le groupe des automorphismes de E . La chaîne E est homogène, si le groupe $G(E)$ est transitif sur E ; E est „homogène uniquement“ (h. u.) si, quels que soient $a, b \in E$, il existe un seul automorphisme $\in G(E)$ appliquant a en b . La chaîne J des entiers est h. u.; chaque E h. u. qui n'est pas isomorphe à J est isomorphe à un sous-groupe partout dense du groupe additif

es nombres réels (Lemme 1); il existe une chaîne pareille (Th. 1); il y en a même
 80 dont les types d'ordre sont deux à deux distincts. *G. Kurepa.*

Roşculeţ, Marcel N.: Algèbres linéaires non associatives. Acad. Republ. popul.
 omîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. **6**, 251–261, russ. u. französ. Zusammenfassg.
 2 (1954) [Rumänisch].

Cette note est consacrée à la construction d'exemples d'algèbres non commu-
 tives et non associatives à un nombre fini d'éléments, où la loi ordinaire de la
 norme (savoir, la norme du produit égale le produit des normes des facteurs) soit
 satisfaite. La méthode inductive de l'A. est analogue à celle de A. Albert [Ann. of
 math., II. Ser. **43**, 161–177 (1942); plus part. §§ 5, 6]. *M. Benado.*

Toyoda, Goro and Akira Hattori: On the multiplicative group of simple algebras.
 math. Soc. Japan **6**, 262–265 (1954).

Ist B Teilalgebra einer zentral-einfachen Algebra A über dem Körper F , A^*
 w. F^* die Gruppe der regulären Elemente von A bzw. F , so erfährt A^* durch die
 Transformationen $t B t^{-1}$, $t \in A^*$, eine transitive Permutationsgruppendarstellung
 auf den Konjugierten von B . Es wird einfacher und allgemeiner als in Hattori,
 math. Zbl. **48**, 263 bewiesen, daß F der Kern dieser Darstellung ist. *W. Gaschütz.*

Azumaya, Gorô: Strongly π -regular rings. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ.,
 Ser. I **12**, 34–39 (1954).

Verf. behandelt gewisse Regularitätseigenschaften in Ringen im Anschluß an
 Arbeiten von Arens, Kaplansky und Jacobson (dies. Zbl. **32**, 7; **35**, 303). Es
 sei A ein Ring und $a \in A$. Das Element a heißt regulär, wenn es ein $x \in A$ mit
 $axa = a$ gibt. Es heißt rechts (links)-regulär, wenn ein $x \in A$ mit $a^2x = a$ ($xa^2 = a$)
 existiert. Schließlich heißt a streng-regulär, wenn a sowohl rechts- wie links-regulär
 ist. Diese Regularitätsdefinitionen für Ringelemente ordnen sich, wie die vom Verf.
 bewiesenen Sätze zeigen, in die entsprechenden Regularitätsbegriffe für Ringe von
 Endomorphismen-Kaplansky und v. Neumann ein. A heißt von beschränktem Index, wenn
 die Exponenten aller nilpotenten Elemente von A beschränkt sind. Die kleinste
 obere Schranke dieser Exponenten heißt der Index von A . Verf. zeigt zunächst: In
 einem Ring von beschränktem Index ist jedes rechts-reguläre Element auch links-
 regulär und also streng-regulär. Ein rechts-reguläres Element a ist genau dann streng-
 regulär, wenn die Mengen der Rechtsannullatoren von a und a^2 übereinstimmen.
 Ein Ringelement heißt (rechts-, links-) π -regulär, wenn eine geeignete Potenz von
 a (rechts-, links-) regulär ist. Entsprechend heißt ein Element streng- π -regulär,
 wenn es sowohl rechts- wie auch links- π -regulär ist. Verf. beweist weiter: Ist a ein
 streng- π -reguläres Ringelement, und ist etwa a^n rechts-regulär, so ist a^n sogar
 streng-regulär. Es gibt dann ein Ringelement z mit $az = za$ und $a^{n+1}z = a^n$.
 Diese strengere π -Regularität folgt der π -Regularität. Der Index eines streng- π -regu-
 lären Elements a ist die kleinste ganze Zahl n , für die a^n rechts-regulär (gleichwertig:
 links-regulär) ist. Es wird gezeigt: Ist A ein Ring von beschränktem Index, so ist
 jedes rechts- π -reguläre Element von A auch streng- π -regulär und sein Index ist
 nicht größer als der Index von A . Ist A speziell eine Algebra (nicht notwendig end-
 lichen Ranges) über einem kommutativen Körper, und ist a ein algebraisches Element,
 so stimmt der Index von a mit seinem Jacobson'schen Index [Ann. of Math., II. Ser.
69, 695–707 (1945)] überein. Schließlich wird bewiesen, daß im Falle eines Ringes
 von beschränktem Index die Begriffe π -Regularität, rechtsseitige (linksseitige)
 Regularität und strenge π -Regularität zusammenfallen. *H.-J. Kowalsky.*

Levitzi, Jakob: On p -soluble rings. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 216–237
 (1954).

Zur Terminologie vgl. die frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **50**, 261). $N(S)$
 das maximale zweiseitige Nilideal des Ringes S , $N^*(S)$ die Summe aller Rechts-
 nilideale von S . Dann und nur dann liegen alle Rechtsnilideale eines Rechtsideals

R von S in $N(S)$, wenn $(*) N^*(R) \cdot R \subseteq N(S)$ gilt. Aus diesem Lemma wird eine Reihe von Sätzen über I -Ringe und FI -Ringe (das sind solche, deren sämtliche homomorphe Bilder ebenfalls I -Ringe sind) abgeleitet, von denen der folgende erwähnt sei: Gilt $(*)$ für eine Menge $\{R_i\}$ von rechten FI -Idealen von S und ist jedes $R_i = N(R_i)$ streng regulär, so ist $A = \sum R_i$ ebenfalls FI -Ring. Ein Ring S heißt P -Ring, wenn $S - N(S)$ kein nilpotentes Element $\neq 0$ enthält. Ein Ideal, das ein P -Ring ist, heißt P -Ideal. Der P -Sockel eines Ringes S ist die Summe aller rechten P -Ideale. Er umfaßt auch alle linken P -Ideale und ist ein zweiseitiges Ideal. S heißt P -auflösbar, wenn S eine Kompositionsreihe zweiseitiger Ideale A_σ besitzt, wobei $A_{\sigma+1} = A_\sigma$ stets der P -Sockel von $S - A_\sigma$ ist. Es werden verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß ein I -Ring bzw. FI -Ring P -auflösbar ist. Eine Folge von Idempotenten $e_{11}^{(1)}, e_{11}^{(2)}, \dots$ heißt eine D -Folge, wenn jedes $e_{11}^{(n)}$ zu einem System $e_{ik}^{(n)}$ von m_n^2 , $m_n \geq 2$, Matrixeinheiten gehört und stets $e_{ik}^{(n)} \in e_{11}^{(n-1)} S e_{11}^{(n-1)}$ gilt. S erfüllt die D -Bedingung, wenn jede D -Folge nur endlich viele Elemente enthält. Es wird gezeigt, daß ein FI -Ring S dann und nur dann P -auflösbar ist, wenn die D -Bedingung für jedes primitive Bild von S gilt oder wenn jedes primitive Bild in S P -auflösbar ist. Für den Spezialfall der algebraischen Algebren A gilt sogar: A ist dann und nur dann P -auflösbar, wenn A die D -Bedingung erfüllt. Jeder FI -Teilring eines P -auflösbaren FI -Ringes ist P -auflösbar. Über die Nilteilinge eines P -auflösbaren FI -Ringes wird ebenfalls eine Reihe von Sätzen bewiesen. Auch ein neuer Beitrag zum Kuroschschen Problem wird gegeben.

G. Köthe.

Nagata, Masayoshi: Some remarks on local rings. II. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 109—120 (1954).

Zur Untersuchung der Frage, wie weit sich die Eigenschaft eines regulären lokalen Integritätsbereiches \mathfrak{o} , ganz abgeschlossen zu sein, auch auf seine vollständige Hülle \mathfrak{o} überträgt, benutzt Verf. die Begriffsbildungen Henselscher Stellenring (vgl. dies. Zbl. 51, 26; für das maximale Primideal \mathfrak{m} von \mathfrak{o} wird eine dem Henselschen Lemma entsprechende Eigenschaft gefordert). „Henselization“ eines ganz abgeschlossenen lokalen Integritätsbereichs (Zerlegungsring zum maximalen Primideal; dieser ist ein Henselscher Erweiterungsring) und Weierstraßscher Ring (regulärer Henselscher Stellenring, der enthalten ist in einem System regulärer Henselscher Stellenringe, das bezüglich Restklassenbildung nach minimalen Primidealen in einem abgeschwächten Sinne abgeschlossen ist und deren fast endliche ganze Erweiterungen endliche Erweiterungsmoduln sind). — Kriterien dafür, daß reguläre Henselsche Stellenringe \mathfrak{o} in ihrer vollständigen Hülle \mathfrak{o} ganz abgeschlossen sind (z. B. Weierstraßsche Ringe), und dafür, daß die Henselization eines regulären Stellenrings ein Weierstraßscher Ring ist: Anwendungen auf Potenzreihenringe. — Die anfangs genannte Übertragbarkeit der ganzen Abgeschlossenheit gilt, falls \mathfrak{o} von endlich erzeugbarem Typus über einem speziellen Bewertungsring \mathfrak{v} der Charakteristik 0 oder über einem Körper K ist (Quotientenring zu einem maximalen Primideal eines über \mathfrak{v} bzw. K endlich-erzeugbaren Ringes mit einer Zusatzbedingung). — Unter ähnlichen allgemeineren Erzeugbarkeitsvoraussetzungen läßt sich die Nullteilerfreiheit der vollständigen Hülle eines lokalen Integritätsbereiches nachweisen (Weiterführung früherer Untersuchungen des Verf., vgl. dies. Zbl. 53, 18).

E. Lamprecht.

Rosenberg, Alex and Daniel Zelinsky: On Nakayama's extension of the $x^n(x)$ theorems. Proc. Amer. math. Soc. 5, 484—486 (1954).

Consider the condition $(*)$ for a ring A with center Z that every element x of A satisfies $x^{n_1(x)} \alpha_1 + \dots + x^{n_r(x)} \alpha_r \in Z$, with r fixed nonzero elements α_i of Z and with $0 < n_1(x) < n_2(x) < \dots < n_r(x)$ ($i = 2, \dots, r$). A non-commutative primitive ring A is shown to satisfy $(*)$ if and only if it is an algebraic algebra over its center and this

ter is an absolutely algebraic field of prime characteristic; in this case every element x of A satisfies indeed $x^{n(x)} - x^{m(x)} = 0$, $0 < n(x) < m(x)$. Further, if a simple ring A satisfies (*) with χ_1 in no primitive ideal and with bounded $n_i(x)$, then A is a subdirect sum of a commutative ring and total matrix algebras with bounded number of elements, and there are n, m with $0 < n < m$ such that $x^n = x^m \in Z$ for every $x \in A$.

T. Nakayama.

Moriya, Mikao: Zur Fortsetzung der 2-Cozyklen in einem kommutativen Ring. *Abh. J. Okayama Univ.* **4**, 1—19 (1954).

The author develops the additive symmetric 2-cohomology theory of a ring \mathfrak{R} . The case of the maximal order \mathfrak{R} of a p -adic number field was investigated by the author (this Zbl. **44**, 267). Let \mathfrak{R}_0 be a subring of \mathfrak{R} such that \mathfrak{R}_0 contains the identity and \mathfrak{R} has a linearly independent basis $\{1, \theta, \dots, \theta^{n-1}\}$. The main result is the following extension theorem. Let j be an additive symmetric 2-cocycle of \mathfrak{R}_0 over an \mathfrak{R} -module \mathfrak{M} . Then there exists for arbitrary element $\mu \in \mathfrak{M}$ one and only one 2-cocycle j^* of \mathfrak{R} over \mathfrak{M} which is an extension of j such that $j^*(x, \theta^i) = 0$ for $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j^*(x\theta, \theta^i) = 0$ for $j = 0, 1, \dots, n-2$ ($x \in R_0$) and $j^*(\theta, \theta^{n-1}) = \mu$ holds. The proof consists of stepwise elementary computations.

Y. Kawada.

Kinohara, Akira: A note on the relative 2-dimensional cohomology group in complete fields with respect to a discrete valuation. *J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A* **1**, 1—7 (1954).

Let k be a complete field under a discrete valuation, K a finite extension of k , $\mathfrak{D}, \mathfrak{o}$ be their principal orders. The author proves by elementary computations that the additive symmetric relative 2-cohomology group $H(\mathfrak{D}, \mathfrak{o} : \mathfrak{D}/\mathfrak{P}^r)$ of \mathfrak{D} relative to \mathfrak{o} with coefficients in $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}^r$ is isomorphic to $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}^r$ if $\mathfrak{P}^r \supseteq \mathfrak{D}$ (the relative different $D(K/k)$) and isomorphic to $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}$ if $\mathfrak{P}^r \not\subseteq \mathfrak{D}$ under the assumption that $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}[\theta]$ holds.

Y. Kawada.

Ikeda, Masatoshi, Hiroshi Nagao and Tadashi Nakayama: Algebras with vanishing n -cohomology groups. *Nagoya math. J.* **7**, 115—131 (1954).

Über Algebren mit Radikal geben die klassischen Sätze der Wedderburnschen Theorie nur sehr wenig Auskünfte. Nach den bisherigen Ergebnissen versprechen von G. Hochschild [Ann. of Math., II. Ser. **46**, 58—67 (1945)] eingeführten Kohomologiegruppen für assoziative Algebren brauchbare Klassifikationsprinzipien nicht halbeinfachen Fälle zu liefern. — In einer Reihe vorausgegangener Publikationen (Ikeda, dies. Zbl. **52**, 31; Nagao, dies. Zbl. **52**, 271; Nakayama, dies. Zbl. **52**, 271) haben sich die Verff. bemüht, das Verschwinden der n -Kohomologiegruppen einer Algebra A möglichst unmittelbar durch Struktureigenschaften von A kennzeichnen. Die vorliegende Arbeit ist ein weiterer Schritt in dieser Richtung; es wird bewiesen: Ist A Algebra mit Eins über dem Körper Ω , N ihr Radikal, und verschwinden für alle endlichdimensionalen, zweiseitigen A -Moduln die n -Kohomologiegruppen von A , so ist (1) A/N separabel, (2) für jedes Linksideal l von A der A -Linksmodul $1 \cdot Q_l^{n-1}$ ein (M_0) -Modul (Nagao und Nakayama, dies. Zbl. **51**, 263); dabei ist

$$Q_l^{n-1} = A \times \underbrace{\dots \times A}_{n-2} \times l, \text{ } \times \text{ Kroneckerprodukt bez. } \Omega,$$

$$x(x_1 \times \dots \times x_{n-2} \times x_{n-1}) = x x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{n-1}$$

$$- x \times x_1 x_2 \times \dots \times x_{n-1} + \dots + (-1)^n (x \times \dots \times x_{n-2} x_{n-1}),$$

A ; $x_i \in A$, $i = 1, \dots, n-2$; $x_{n-1} \in l$. Umgekehrt folgt für separables A/N (2) das Verschwinden aller n -Kohomologiegruppen von A . Ist A Frobeniusalgebra und nicht halbeinfach, so läßt sich hieraus in Verallgemeinerung eines Resultates von Hochschild (dies. Zbl. **29**, 342) folgern: Es gibt zu jedem n einen zweiseitigen A -Modul m , dessen n -Kohomologiegruppe $H^n(A, m) \neq 0$ ist.

W. Gaschütz.

Eilenberg, Samuel: Algebras of cohomologically finite dimension. *Commentarii math. Helvet.* **28**, 310—319 (1954).

Die von M. Ikeda, H. Nagao und T. Nakayama (s. vorstehend. Referat) erzielten Resultate über die kohomologietheoretischen Dimensionen von Algebren werden im Rahmen der vom Verf. und H. Cartan entwickelten „Homological Algebra“ formuliert und bewiesen. Es handelt sich um die folgenden drei Sätze: A sei eine Algebra über einem Körper K , N ihr Radikal, $\Gamma = A/N$, Γ^* inverser Ring zu Γ , $\Omega = A/\Gamma^*$. Dann gilt (I) $\dim A = 1$, g.l. $\dim \Omega = 1$, $\dim_{\Omega} \Gamma$. (II) Ist Γ separabel, so ist $\dim A = 1$, $\dim_{\Gamma} \Gamma$. (III) Ist $\dim A < \infty$, so ist Γ separabel. Die hierbei auftretenden dimensionstheoretischen Begriffe sind folgendermaßen definiert: $\dim A$ ist die größte Zahl n , für die ein A -Modul A existiert, dessen n -te Kohomologiegruppe $H^n(1, A) \neq 0$ ist. $1. \dim_{\Gamma} A$ für einen A -Modul A ist die kleinste Zahl n , für die eine exakte Folge $0 \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ projektiver A -Moduln X_i existiert. l. g.l. $\dim A = \sup 1. \dim_{\Gamma} A$ über alle A -Moduln A . Existiert kein derartiges n , so werden die betreffenden Dimensionen $-\infty$ gesetzt. — Zur Redaktion der Arbeit kann folgendes nicht unerwähnt bleiben: Sie erschien etwa $1\frac{1}{2}$ Jahre vor dem Buch H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*. Dennoch wird der Leser mehrfach auf dieses verwiesen. Es wäre wünschenswert, wenn dieses, leider auch anderenorts zu beobachtende, esoterische Verfahren nicht zur Regel beim Publizieren würde.

W. Gaschütz.

Nagao, Hiroshi: On Γ -relative cohomology groups of an associative algebra. *J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., Ser. A* **5**, 15—29 (1954).

Let A be an algebra, over a field, Γ a left ideal of A , and m an A - A -module with $m\Gamma = 0$. On restricting oneself to those cochains f of A in m which satisfy $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ whenever $x_n \in \Gamma$, one gets the notion of Γ -(relative) cohomology groups $H_{\Gamma}^n(A, m)$ of A in m , introduced by the reviewer (this Zbl. **52**, 271) in order to solve a certain extension problem of algebras and used by Nagao-Ikeda-Reviewer (cf. the last review but one) in determining the structure of algebras whose n -dimensional cohomology groups all vanish: for the last cf. also Eilenberg (cf. the preceding review). The present paper gives in turn a structural characterization of algebras with vanishing n -dimensional Γ -cohomology groups, on extending the mentioned case of ordinary cohomology groups. Thus the main theorem states: Let A be finite over the ground field and have unit element. Let N be the radical of A . Then the n -dimensional Γ -cohomology groups of A all vanish, if and only if $\alpha)$ $A/(N + \Gamma A)$ is separable, $\beta)$ the A -left (projective) dimension of Γ is $\leq \text{Max}(0, n-2)$, and $\gamma)$ for any left ideal I_1 of A containing ΓA , the A -left dimension of I_1 is $\geq n-1$. Here $\gamma)$ may be replaced by its weaker form with $N + \Gamma A$ in place of general I_1 . Further, $\beta)$ and $\gamma)$ may be replaced by the condition $\delta)$ for every left ideal I_1 of A containing ΓA , the A -left dimension of I_1/Γ is $\leq n-1$, or its weaker form with $N + \Gamma A$ in place of I_1 . The case of algebras of infinite rank is studied too. For the proof is made effective use of the following second modification of cohomology groups, denoted by $H_{[\Gamma]}^n(A, m)$ (with m, Γ as above), in which n -cochains are multilinear functions $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ ($x_1, \dots, x_n \in A$; $x_{n+1} \in \Gamma$) in m while the coboundary operation is as usual. The exact sequence $\dots \rightarrow H_{\Gamma}^n(A, m) \rightarrow H^n(A, m) \rightarrow H_{[\Gamma]}^n(A, m) \rightarrow H_{\Gamma}^{n+1}(A, m) \rightarrow \dots$ and several forms of the reduction theorem (of Hochschild's type) are proved and used in proving the above results.

T. Nakayama.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Kolden, K.: On the prime divisors of homogeneous polynomials which decompose into linear factors in a normal field. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 139—159 (1954).

Eine (auch in den Voraussetzungen) mit kleinen Unklarheiten behaftete und etwas weitläufig gefaßte Arbeit. Im Grundproblem handelt es sich um ein primitives binäres homogenes Polynom $f(x, y) = A x^n + \dots + B y^n$ n -ten Grades über einem Ring \mathfrak{A} der ganzen rationalen Zahlen ($A, B \neq 0$), von dem noch angenommen wird, daß es über einem Galoisschen Zahlkörper $F(\theta)$ n -ten Grades mit der Galoisschen Gruppe G in der Form $f(x, y) = \prod_{a \in G} (\alpha^{(a)} x + \beta^{(a)} y)$ zerlegbar ist, wobei

$\beta \in F(\theta)$ gelten und „ (a) “ die Ausübung des Automorphismus a bezeichnen soll. Es fragt sich nach denjenigen Primzahlen $p \nmid (\mathfrak{A})$ mit $p \nmid A, B$, für die es zwei Elementen $x, y \in \mathfrak{A}$ mit $p \nmid f(x, y)$, $p \nmid (x, y)$ gibt. Diese p werden kurz die Primdivisoren von f genannt, in Zeichen: $p \nmid f$. Verf. beachtet nicht, daß sich das Problem andererseits auf den Fall $A = 1$ reduzieren läßt. Man setze $f(x, A y) = A g(x, y)$, dann für $g(x, y) = x^n + \dots + A^{n-1} B y^n = \prod_{a \in G} \left(x + \frac{\beta^{(a)} N(\alpha)}{\alpha^{(a)}} y \right)$ die Erfülltheit

an $f(x, y)$ gestellten Forderungen mit 1 statt A folgt; N bezeichnet die Norm in F , $N(\alpha) = A \cdot N(\alpha)$. Dabei haben f und g dieselben Primdivisoren. Denn ist $p \nmid g$, so gilt sofort $p \nmid f$. Umgekehrt, wenn $p \nmid f$ ist, d. h. $(p \nmid A, B)$ und (x, y) für passende $x, y \in \mathfrak{A}$ Bedingungen $p \nmid f(x, y)$, $p \nmid (x, y)$ erfüllt sind, so nehme man ein $A' \in \mathfrak{A}$ mit $A A' \equiv 1 \pmod{p}$, $(x, A') = 1$. Es gilt $p \nmid f(x, A A' y)$, also $p \nmid g(x, A' y)$, hier gilt $p \nmid (x, A' y)$. Das beweist die Möglichkeit der Reduktion auf den Fall $A = 1$. Dann darf $\alpha = 1$ also $f(x, y) = \prod_{a \in G} (x + \alpha^{(a)} y)$ angenommen werden,

bei $\alpha = A B \alpha$ ein ganzes Element von $F(\theta)$ ist. Die Beantwortung des Problems schiebt nunmehr auf Grund klassischer Tatsachen mit größerer Klarheit als auf 142 der Arbeit. Die auf den binären Fall bezüglichen Resultate werden zur ähnlichen Untersuchung homogener Polynome von mehreren Unbestimmten verwendet. Auch dieser allgemeine Fall ließe sich entsprechend kürzer betrachten. Einige leichte Beispiele werden auch ausgearbeitet. L. Rédei.

Mann, H. B.: On an exceptional phenomenon in certain quadratic extensions. *Canadian J. Math.* **6**, 474—476 (1954).

Es sei Ω ein separabler und zyklischer Oberkörper des Körpers Σ . Der Relativgrad l sei eine Primzahl. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, damit folgendes gilt: Es gibt ein Element ω in Ω , so daß ω^β in Σ , $\omega^{\beta-1}$ nicht in Σ , $\beta \geq 2$. Zu den Bedingungen gehört: $\Omega = \Sigma(i)$, so daß also Ω ein imaginär-quadratischer Relativkörper über Σ ist. N. Hofreiter.

Masuda, K.: Hasse factor systems reduced mod p . *J. reine angew. Math.* **193**, —165 (1954).

Die von Hasse eingeführte Kennzeichnung galoisscher Algebren durch Faktorensystemklassen (dies. Zbl. **39**, 270) und die vom Verf. früher untersuchte direkte Zerlegung geeigneter Faktorensysteme (dies. Zbl. **47**, 269) wird in dieser Arbeit benutzt, um die Theorie der n -ten Potenzreste mod. p auf beliebige Normalkörper verallgemeinern. Die Grundlage hierfür bildet der Satz von E. Noether über die Existenz einer p -Normalbasis, der im Rahmen der Hasseschen Begriffsbildungen formuliert und bewiesen wird. Weiter spielt ein Satz von A. A. Albert eine Rolle (dies. Zbl. **24**, 146), der feststellt, wann die Zerlegungsgruppe eines Primideals, welches nicht in der Ordnung der Galoisgruppe aufgeht, abelsch ist. Durch Kombination der Sätze von Noether und Albert ergibt sich die angestrebte Verallgemeinerung für Primideale ohne höhere Verzweigung als eine Aussage über direkte Zerlegungen von Faktorensystemen mod. p . R. Kochendorffer.

Jehne, Wolfram: Zur modernen Klassenkörpertheorie. *S.-Ber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl.* **1954**, Nr. 3, 8 S. (1954).

Let K be a Galois extension of an algebraic number field Ω , with Galois group g . $G_{K/\Omega}$ be Weil's (this Zbl. **44**, 29) group for K/Ω , which is an extension of the

idèle-class group C_K of K by \mathfrak{g} with a certain canonical factor set, homomorphically mapped on the Galois group $\mathfrak{G}_{K/\Omega}$ over Ω of the maximal abelian extension of K and possesses certain properties in connection with this homomorphic map, transfer map, Artin-Chevalley symbol and intermediate fields. It is asserted first that the algebraic commutator group $G'_{K/\Omega}$ of $G_{K/\Omega}$ coincides with the topological one, so that $G_{K/\Omega}/G'_{K/\Omega}$ is isomorphic to C'_Ω by the transfer map, refining one of the said properties of $G_{K/\Omega}$ in Weil, l. c. Then the algebraic and topological commutator groups of $\mathfrak{G}_{K/\Omega}$ also coincide. [For these cf. also a paper by Witt (this Zbl. 57, 264) following the present one.] For a fixed K/Ω the groups $G_{K/\Omega}$ with intermediate Galois extensions Λ/N are uniquely determined by the said properties. The homomorphism of $G_{K/\Omega}$ onto $\mathfrak{G}_{K/\Omega}$ is characterized uniquely by that it induces for every place of K the canonical isomorphism of the local Weil group and Frobenius group. Further, the factor group $N_{K/\Omega}$ of the multiplicative group of Ω modulo the elements which are everywhere norm for K/Ω is seen to be finite and to have exponent dividing $[K:\Omega]$ (l. c. m. of local degrees). The order of $N_{K/\Omega}$ is reduced to three factors, and a system of generators of $N_{K/\Omega}$ is obtained for abelian K/Ω in terms of Teichmüller's 3-cocycle. The result seems to lie in close relationship to recent results of Artin-Tate. A detailed exposition is promised elsewhere.

T. Nakayama.

Whaples, G.: Generalized local class field theory. II. Existence theorem III. Second form of existence theorem. Structure of analytic groups. IV. Cardinalities. Duke math. J. 21, 247—255, 575—581, 583—586 (1954).

II. The existence theorem for the generalized local class field theory in the sense of the author (this Zbl. 47, 37), Moriya-Reviewer [Proc. Imp. Acad. Tokyo 18, 39—44 (1942), 19, 132—137 (1943)] is given. Thus let k be a regular local field (Author, l. c.), $[k]$ its residue field, of characteristic $p \neq 0$, and π a fixed prime element. Let k^\times be the multiplicative group of k , and $k_{(\pi)}^\times$ be the group of elements $\equiv 1 \pmod{\pi^i}$. For a subgroup g of k^\times , set $g_{(\pi)} = g \cap k_{(\pi)}^\times$. Further, the image group (relative to π) $[g]_{(\pi)}$ ($i \geq 0$) is defined to be $\{[\lambda]_i | 1 \equiv \lambda \pi^i \pmod{g_{(\pi)}}\}$ ($[\lambda]$ denoting the residue class of λ), while $[g]_{(\infty)}$ is defined to be $\{[\lambda] | \lambda \in g_{(\infty)}\}$. If there is i ($< \infty$) with $k_{(\pi^{i+1})}^\times \subset g$, g is said to have conductor π^{c+1} where c is the smallest i with the property. Further, g is called analytic if it has a conductor π^{c+1} and if for every i with $0 < i \leq c$ there is $u_i(x) \in o[x]$ with degree > 0 satisfying $1 + u_i(\xi) \pi^i \in g$ for all $\xi \in o$, o denoting the ring of integers in k ; the notion actually does not depend on the choice of π . The main theorem of the paper states that a subgroup g of k^\times is the norm group of a finite abelian extension if and only if it is analytic and of finite index. The proof starts with an ingenuous application of the author's (this Zbl. 55, 26) former result on additive polynomials (a. p.) to replace the above $u_i(x)$ with $w_i(x)$ such that $[w_i(x)]$ is a nonzero a. p. (in $[k]$). This leads to two key lemmas that the intersection of two analytic groups is analytic and that the elements of an extension field K having norm in an analytic group in k form an analytic group in K . Then, after showing that the norm group of a finite (separable) extension is analytic, and after studying the conductor and image groups of norm groups of cyclic extensions of degree p , the existence of a cyclic extension of degree p having norm group with any set of image groups possible for a group of index p is shown. This last is then used to reduce the existence theorem for an analytic group of index p to the one for such a group with lower conductor, and also to apply Chevalley's (this Zbl. 8, 53) method of transition from groups of index p^n to those of index p . These combined lead to the above main theorem. — III. To the author's existence theorem for generalized local class field theory (Part II) is given a second form, which is more convenient than the original one in several respects. The new formulation describes norm groups of abelian extensions (whence analytic subgroup of k^\times) (cf. the review of the author's cited paper for notations) in terms of the Artin

asse mapping [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 6, 146–162 (1928)] and Witt vectors (this Zbl. 16, 51). Thus let \mathfrak{w} be the ring of Witt vectors with residue class field $[k]$, and $\chi \in [k] \rightarrow \mathfrak{R} \chi$ (resp. $R \chi$) be the Teichmüller (this Zbl. 13, 293) multiplicative representative mapping of $[k]$ into \mathfrak{w} (resp. k). With $F(y) = \prod_{0 \leq p \leq \nu} (1 - y^p)^{a_p/p}$, set, for $\alpha = \sum_{v=0}^{\infty} (\mathfrak{R} \alpha_v) p^v \in \mathfrak{w}$, $E(\alpha, x) = \prod_{v=0}^{\infty} (F((R \alpha_v) x))^{p^v}$. Further, let \mathfrak{Q} be the ring of linear transformations on \mathfrak{w} generated by the multiplication of \mathfrak{w} on \mathfrak{w} itself and the transformation P defined by $P\left(\sum_{v=0}^{\infty} (\mathfrak{R} \alpha_v) p^v\right) = \sum_{v=0}^{\infty} (\mathfrak{R} \alpha_v)^p p^v$. On \mathfrak{Q} one can introduce a valuation by setting $|\sum \alpha_v P^v| = \max_v |\alpha_v|$ where $|\cdot|$ on the right-hand side is the ordinary valuation on \mathfrak{w} . With these notations, the present new existence theorem, i. e. the new characterization of analytic subgroups of k^\times reads as follows: a subgroup g of k^\times with conductor π^{c-1} is analytic if and only if there is $L \in \mathfrak{Q}$ such that $|L| = 1$ and all the elements $L \alpha_i \pi^i$ ($\alpha_i \in \mathfrak{w}$; $i = 1, \dots, c$) lie in g . Further, if g is analytic, with conductor π^{c-1} , and $\subset k_{(1)}^\times$, there is a sequence of $L_{ij} \in \mathfrak{Q}$ ($i = 1, \dots, c$; $j = i, \dots, c$) such that $|L_{ii}| = 1$ and g is generated by k_{c-1}^\times and $F_i(\alpha) = \prod_{\mu=i}^c E(L_{i\mu} \alpha, \pi^\mu)$ ($\alpha \in \mathfrak{w}$, $i = 1, \dots, c$). — IV. It is shown that if k is a regular local field whose residue class field has prime characteristic and cardinal $\mathfrak{s} \geq \mathfrak{s}_0$, then k has \mathfrak{s} analytic groups of finite index and $2\mathfrak{s}$ pseudoanalytic groups of finite index, where a subgroup g of the multiplicative group of k is defined to be pseudoanalytic if it has a conductor and its conjugate groups are open, in the sense of the author (this Zbl. 55, 26). This shows that the condition of analyticity in the author's (Part II, III) existence theorem for the generalised local class field theory can not be replaced by the weaker condition of pseudoanalyticity. The proof makes much use of the construction in the last of the cited papers.

T. Nakayama.

Terada, Fumiyuki: On a generalized principal ideal theorem. Tôhoku math. J., II. Ser. 6, 95–100 (1954).

Verf. hatte früher (dies. Zbl. 41, 172) die folgende Verallgemeinerung des Hilbertschen Hauptidealsatzes bewiesen: K sei der absolute Klassenkörper über einem endlich-algebraischen Zahlkörper k und Z ein solcher Zwischenkörper von K/k , daß k zyklisch ist. Dann wird jedes ambige Ideal aus Z in K ein Hauptideal. Dessenatz hatte Verf. in der oben genannten Arbeit auf ein Verlagerungsproblem in der Gruppentheorie zurückgeführt und dafür einen Beweis gegeben. Weil sein Beweis sehr rechnerisch war, versucht Verf. hier einen anderen Beweis zu geben, indem er sich einem Gedanken von W. Magnus (dies. Zbl. 5, 245) die Gruppe der linearen Transformationen heranzieht.

M. Moriya.

Terada, Fumiyuki: Complex multiplication and principal ideal theorem. Tôhoku math. J., II. Ser. 6, 21–25 (1954).

Es sei Ω ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, und K der absolute Klassenkörper zu Ω . Nach dem Hauptidealsatz der Klassenkörpertheorie ist jedes Ideal in Ω ein Hauptideal in K . Nach Hasse läßt sich mit Hilfe der Theorie der komplexen Multiplikation zu jedem m mit $Nm \equiv 1 \pmod{12}$ ein erzeugendes Element in K explizit angeben (dies. Zbl. 2, 330). Verf. ergänzt die Ausführungen Hasses dadurch, daß er auch für die m mit $Nm \equiv 5 \pmod{12}$ Erzeugende in K findet. Das ist deshalb von Bedeutung, weil es, falls die Diskriminante von Ω nicht prim ist zu 12, nicht immer in jeder Idealklasse von Ω ein Ideal m mit $Nm \equiv 1 \pmod{12}$ gibt.

P. Roquette.

Gut, Max: Relativquadratische Zahlkörper, deren Klassenzahl durch eine vorgegebene ungerade Primzahl teilbar ist. Commentarii math. Helvet. 28, 270–277 (1954).

Es sei p eine ungerade Primzahl und k ein algebraischer Zahlkörper von endlichem Grade, der die p -te Einheitswurzel ζ enthält und in welchem wenigstens ein p teilerfremdes Primideal \mathfrak{p} von k den absoluten Grad 1 hat. Alsdann sei γ eine ganze Zahl aus k , die zu $2p$ teilerfremd und quadratischer Rest mod \mathfrak{p} ist: $\gamma = c^2 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, wo c ganz rational ist. Somit sei $K = k(u)$, wobei u eine Wurzel der Gleichung

$$u^2 - (\lambda^{2p} \gamma + 2) u + 1 = 0, \quad \lambda = 1 - \zeta,$$

ist. Nun sei z_1 eine Wurzel der Gleichung $z^{2p} - (\lambda^{2p} \gamma + 2) z^p + 1 = 0$. Dann wird bewiesen, daß $K(z_1)$ ein Unterkörper des absoluten Klassenkörpers von K ist, der in bezug auf K den Relativgrad p hat. Folglich ist die Klassenzahl von K durch p teilbar. Somit läßt sich zeigen, daß es unendlich viele in bezug auf k relativquadratische Zahlkörper gibt, deren Klassenzahlen durch p teilbar sind. *Z. Suetuna.*

Shimura, Goro: A note on the normalization-theorem of an integral domain. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 4, 1—8 (1954).

Es sei k entweder ein Körper mit einer diskreten Bewertung und \mathfrak{o} der zugehörige Bewertungsring von k , oder es sei k ein endlich-algebraischer Zahlkörper und \mathfrak{o} der Ring der ganzzahligen Zahlen von k . Eine Menge $(x) = (x_0, \dots, x_n)$ von $n+1$ Elementen eines Erweiterungskörpers von k heiße homogen über k , wenn die Menge aller Polynome $F(X) \in k[X] = k[X_0, \dots, X_n]$ mit $F(x) = 0$ ein homogenes Ideal bildet. — Satz: Ist die Menge $(x) = (x_0, \dots, x_n)$ homogen und von der Dimension $r+1$ über k , so gibt es eine Menge von homogenen Formen $(y) = (y_0, \dots, y_r)$ ($y_0 \in \mathfrak{o}[x]$), so daß alle x_r ganz über $\mathfrak{o}(y)$ sind. Der Beweis benutzt „Reduktionen modulo \mathfrak{p} “ von algebraischen Mannigfaltigkeiten. Verf. zeigt an einem Beispiel: Ist k algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen über dem komplexen Zahlkörper C , $t \in k$, $t \notin C$ und \mathfrak{o} der Ring der t -ganzen Elemente von k , so gilt der obige Satz mit k und \mathfrak{o} im allgemeinen nicht mehr. *E. Lamprecht.*

Deuring, Max: Zur Transformationstheorie der elliptischen Funktionen. Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. math.-naturw. Kl. 1954, 95—104 (1954).

Zur Aufstellung der Zerlegungsgesetze in den Klassenkörpern eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers, die durch Teilwerte der Weberschen Funktion $\tau(z; \omega_1, \omega_2)$ erzeugt werden können, mußte H. Weber weitere Funktionen heranziehen. Verf. zeigt, daß man mit der Funktion $\tau(z; \omega_1, \omega_2)$ allein zum Ziel kommen kann, indem er die für $p > 3$ gültige Kongruenz

$$\tau(pz; p\omega_1, \omega_2) \equiv \tau(z; \omega_1, \omega_2)^p \pmod{p}$$

beweist, aus der man die Frobenius-Kongruenz gewinnen kann. *H. Reichardt.*

Zahlentheorie:

● **Griffin, Harriet:** Elementary theory of numbers. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) London: McGraw-Hill Publishing Company Ltd. 1954. IX, 203 p. 36 s.

Vorliegende leicht verständliche Darstellung der elementaren Zahlentheorie (keine algebraischen Vorkenntnisse erforderlich) ist ein Grenzfall zwischen Ober- und Universitätslehrbuch und hat folgenden Inhalt: Natürliche, ganze und rationale Zahlen und Teilbarkeit; lineare diophantische Gleichungen und größter gemeinsamer Teiler; Primzahlen und Primfaktorzerlegung; Kongruenzen und prime Restklassen; Bestimmungskongruenzen und Hauptsatz über simultane Kongruenzen; Fermatscher und Wilsonscher Satz und Möbiusfunktion; die Exponenten primitiver Restklassen und Primitivwurzeln; Gaußscher Index einer primitiven Restklasse modulo p und Eulersches Kriterium; Legendre- und Jacobi-Symbol und das quadratische Reziprozitätsgesetz; Überblick über einige klassische Probleme; Arithmetik der Polynome mit Koeffizienten aus einem Körper (hier sollte jedoch die Identität durch die Gleichheit aller Koeffizienten und nicht durch die aller Werte erklärt

den): elementare Fragen der additiven Zahlentheorie. — Zu allen behandelten Fragen werden durchgerechnete Beispiele, zahlreiche Übungen sowie historische Bemerkungen angegeben. *E. Lamprecht.*

• Hardy, G. H. and E. M. Wright: An introduction to the theory of numbers. Oxford: At the Clarendon Press 1954. XVI, 419 p. 42 s.

Die dritte Auflage dieses bereits zum Standardwerk gewordenen Buches, dem eine deutsche Übersetzung in Vorbereitung ist, unterscheidet sich von beiden vorangehenden Auflagen (1938, dies. Zbl. 20, 292; 1945) vor allem darin, daß der inzwischen entdeckte elementare Beweis des Primzahlsatzes aufgenommen wurde, während die ersten beiden Auflagen keinen Beweis dieses Satzes brachten. Der vorgetragene Beweis beruht auf der Formel von A. Selberg und benutzt dessen Darstellung (dies. Zbl. 36, 306), kürzt sie aber durch Verwendung von Integralen ab (E. M. Wright, dies. Zbl. 49, 164). Im übrigen sind nur an wenigen Stellen Ergänzungen oder Ergänzungen vorgenommen worden, z. B. Irrationalität von π , Umkehrung des kleinen Fermatschen Satzes, Kriterien für Primzahleigenschaft, Einführung algebraischer Zahlen, neuere Ergebnisse in der Geometrie der Zahlen. Ebenso sind die für das Buch so charakteristischen und wertvollen Anmerkungen zu den einzelnen Kapiteln auf den neuesten Stand gebracht worden. — Die dritte Auflage mußte nach dem Tode Hardys vom zweiten der Verff. allein besorgt werden. Man darf ihm dafür danken, daß er Stil und Eigenart des Buches lebendig erhalten hat. *H. Rohrbach.*

Kurepa, G.: Über die Binomialzahlen. Conseil Acad. RPF Yougoslavie, Bull. 2, 9—10 (1954).

Rao, K. Subba: Some properties of Fibonacci numbers. I. Bull. Calcutta math. Soc. 46, 253—257 (1954).

At first it is proved that between n and $2n$ always lie one or two Fibonacci numbers $(u_1 = 1, u_2 = 2, u_{k+1} = u_k + u_{k-1})$. From $u_k = ((\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^{k+1} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})^{k+1}) / \sqrt{5}$ then asymptotical formulas for the number of $u_k \leq n$ and the number of digits of u_k are derived. It is also proved that the number of u_k with the same number of digits, say n , for n large enough, equals 4 or 5. Reviewer remarks that this is right for all values of $n > 1$. *W. Verdenius.*

Iyer, R. V. et M. Delcourte: Nombres triangulaires remarquables. Mathesis 63, Suppl. 9/10, 11—15 (1954).

Iyer, R. V.: Nombres triangulaires spéciaux. Mathesis 63, Suppl. 9/10, 16—23 (1954).

Verff. untersuchen besondere Dreieckszahlen $\binom{N+1}{2}$, deren Ziffernfolge in einem B -adischen System gewissen Bedingungen genügt. *H. J. Kanold.*

Thébault, Victor: Sur les nombres qui terminent les carrés parfaits. Mathesis Suppl. 9/10, 8—11 (1954).

Verf. denkt sich die Quadrate der natürlichen Zahlen im B -adischen System geschrieben mit $B \equiv 2 \pmod{4}$ und untersucht die letzten drei Stellen. *H. J. Kanold.*

Thébault, Victor: Suites de carrés parfaits remarquables. Mathesis 63, Suppl. 9/10, 1—8 (1954).

Verf. untersucht gewisse spezielle Fragestellungen, die aus der Darstellung natürlicher Zahlen im B -adischen System entspringen, und gibt einige numerische Beispiele an. Als typisch sei genannt die Diskussion der Gleichung $\overline{abba} + 1 = \overline{(cc+1)^2}$. *H. J. Kanold.*

Thébault, Victor: Sur des produits de nombres entiers consécutifs. Mathesis Suppl. 9/10, 254—261 (1954).

Es bedeuten x, y, c natürliche Zahlen. Verf. beweist mit elementaren Methoden

die Unmöglichkeit einiger einfacher Sonderfälle von $x(x+1) \cdots (x+n) = c y^2$. P. Erdős zeigte bereits 1939 die Unmöglichkeit für $c = 1$ und beliebige x, y (dies. Zbl. **21**, 207). Vgl. weiterhin eine zweite Arbeit von P. Erdős (dies. Zbl. **43**, 43) und Arbeiten von O. Rigge (dies. Zbl. **21**, 10; **22**, 308). *H. J. Kanold.*

Urz, W. R.: Two Diophantine cubics. Portugaliae Math. **13**, 121—123 (1954).

The paper deals with the diophantine equations (1) $x^3 + y^3 = z x y$ and (2) $x^3 + y^3 = z(x - y)$. The following theorem is proved: The equation (1) has no integral solutions for $z = 1$ or for z an odd prime unless z is of the form (3) $3n^2 + 3n + 1$, n an integer. In case $z = 2$, there is exactly one solution (1, 1, 2), and when the prime z is of the form (3) the only solutions are (x_0, y_0, z) and (y_0, x_0, z) where $x_0 = n(n+1)^2$, $y_0 = -n^2(n+1)$. For the equation (2) all the integral solutions are found. *S. Selberg.*

Wilson, Neil Y.: Conjectures as to a factor of $2^p \pm 1$. Edinburgh math. Notes **39**, 6—9 (1954).

Verf. stellt auf Grund numerischer Berechnungen 7 Vermutungen von folgendem Typ auf: Es bedeute $d = 3, 4, 5, 6, 8, 12$ und 24 ; $p \equiv 1 \pmod{d}$ sei eine Primzahl. Behauptung: Die Kongruenzen $2^{(p-1)/d} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ sind erfüllt für gewisse p , deren Struktur näher angegeben wird. Verf. bemerkt jedoch nicht, daß für $d = 5$ seine Vermutungen leicht als richtig erwiesen werden können, während die Vermutung für $d = 5$ falsch ist. *H. J. Kanold.*

Sagastume Berra, A. E.: Das Problem von Schönberg. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A **10**, 7—17 (1954) [Spanisch].

Das nach dem Komponist Arnold Schönberg benannte Problem besteht in der Auffindung derjenigen Permutationen $a_0 = 0, a_1, \dots, a_{n-1}$ von $0, 1, \dots, n-1$, für die alle $n-1$ Intervalle $i_k = a_k - a_{k-1}$ ($k = 1, \dots, n-1$) paarweise $\equiv \pmod{n}$ sind, d. h. gerade die $n-1$ Restklassen $\equiv 0 \pmod{n}$ durchlaufen. (Die i_k entsprechen den musikalischen Intervallen zwischen den n Tönen einer Oktave.) Hinreichend und notwendig für die Existenz von Lösungen ist, daß n gerade und $a_{n-1} \equiv n/2 \pmod{n}$ sei (leichter, elementarer Beweis). Es handelt sich also in diesem Fall darum, möglichst alle Lösungen zu finden. In dieser Richtung wird folgendes beigetragen, um aus bekannten Lösungen eventuell neue durch Transformationen zu erhalten: 1. S (Symmetrie): $a_k^S = (n/2) - a_{n-k-1} \pmod{n}$; 2. Z (Zyklus): $a_k^Z = a_{n-k} - a_n \pmod{n}$, wo h durch $i_h \equiv n/2 \pmod{n}$ bestimmt ist; S und Z erzeugen die Vierergruppe. 3. T_p (Multiplikationen): $a_k^{T_p} = p a_k \pmod{n}$, wo $(p, n) = 1$; diese erzeugen eine Gruppe der Ordnung $\varphi(n)$, mit deren Hilfe man alle Lösungen auf solche mit $a_1 = d < n/2$, d Teiler von n , zurückführen kann. Beispiele und Tabellen geben alle Lösungen bis $n = 10$, aber nur einige für $n = 12$. *D. Tamari.*

Carlitz, L.: Some partition formulas. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 149—154 (1954).

Durch Vergleich von Fourierentwicklung und Produktdarstellung von elliptischen Funktionen werden verschiedene Identitäten gewonnen, aus denen gewisse Kongruenzen folgen. Z. B. gilt

$$\sum_0^{\infty} a(3m+2) x^m = 3 \prod_1^{\infty} \frac{(1-x^{3n})^3 (1-x^{6n})^3}{(1-x^n)^4 (1-x^{2n})^4}$$

und hieraus folgt $a(9m+8) \equiv 0 \pmod{9}$, wobei $a(m)$ durch

$$\prod_1^{\infty} (1-x^n)^{-1} (1-x^{2n})^{-1} = \sum_0^{\infty} a(m) x^m$$

gegeben ist.

K. Prachar.

Brauer, Alfred: Elementary estimates for the least primitive root. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises, 20—29 (1954).

Es bezeichnen g, g' die primitiven Wurzeln mod einer ungeraden Primzahl p .

part, daß g positiv und minimal, ferner g' minimal ist. Auf elementarem Wege
 stehen $g' \leq p^{r-1} \cdot r$ ($r = 2^k$), $g' \leq p^{t-1} \cdot t$, wobei k die Anzahl der verschie-
 denen Primfaktoren von $p-1$ und t die Maximalzahl von aufeinanderfolgenden zu
 -1 nicht primen ganzen Zahlen ist. Ist dabei $4p-1$, so gilt ähnliches für g
 und g' . Gilt $p = 2^s q + 1$ mit einer Primzahl $q = 11, 2^s \cdot 1 (3 + 2 \nmid 2)$, so ist
 $\leq \frac{1}{2} p$. Letzteres zeigte Kanold (dies. Zbl. 39, 36) für genügend große p . Im
 all $s = 1$ gilt sogar $g \leq (2^s p)^{2/5} + 3 (2^s p)^{1/5} + 1$. Es folgen noch verschiedene
 Feststellungen bezüglich der primitiven Wurzeln mod p^2 im Intervall $0, p$.

L. Rédei.

Stolt, Bengt: Über den kleinsten positiven quadratischen Nichtrest. *Math. Scand.*
Scandinav. **2**, 187—192 (1954).

Für den kleinsten positiven ungeraden quadratischen Nichtrest η^* mod einer
 geraden positiven Primzahl p gilt nach T. Nagell (dies. Zbl. 36, 302; 46, 267) bzw.
 M. (dies. Zbl. 51, 281) die Abschätzung $\eta^* \leq p^{1/2} (p \neq 3, 5, 7, 11, 13, 23, 59, 109,$
 $1)$. Für $p \equiv 1 \pmod{8}$ gilt nach Nagell sogar $\eta^* \leq (\frac{1}{2}(p+1))^{1/2} (p \neq 17)$.
 M. beweist mit ähnlicher elementarer Methode, daß für $p \equiv 5 \pmod{8}$ die Ab-
 schätzung $\eta^* \leq (\frac{1}{2} p)^{1/2} (p \neq 5, 13, 37, 61, 109)$ gilt, und meldet ähnliches für
 $\equiv -1 \pmod{8}$ an.

L. Rédei.

Mordell, L. J.: On intervals containing an affinely equivalent set of n integers
Proc. Amer. math. Soc. **5**, 854—859 (1954).

Theorem I: Ist $k \geq 2$ eine natürliche Zahl, so gibt es für beliebige ganze
 Zahlen x_1, \dots, x_n ($n \geq 2$) weitere ganze Zahlen y_1, \dots, y_n , $a (\not\equiv 0 \pmod{k})$, b
 part, daß $y_r \equiv a x_r + b \pmod{k}$ gilt ($r = 1, \dots, n$) und die y_1, \dots, y_n in
 dem Intervall von der Länge L liegen, wobei $n L^{n-1} \leq 2^{n-1} k^{n-2}$ ist. Dieser Satz
 wurde für Primzahlen k in einer schwächeren Form von A. Thue und mit vorigem L
 im Ref. (dies. Zbl. 44, 263) bewiesen. Es gilt noch das im allgemeinen etwas
 schwächere Theorem II: Ist λ die kleinste natürliche Zahl mit $(\lambda + 1)^n - \lambda^n \geq k^{n-2}$,
 ist $L = 2\lambda$ bzw. $L = 2\lambda - 1$ eine passende Zahl, je nachdem „ \geq “ bzw. „ $=$ “
 ist. Im ersten Fall paßt auch $L = 2\lambda - 1$, wobei λ die kleinste natürliche Zahl
 ist $(\lambda + 1)^n - \lambda^n \geq 2k^{n-2}$ ist. Für den zweiten Fall wird bewiesen (Theorem
 I), daß $L = 2\lambda - 1$ unter Umständen bestmöglich ist. Die Beweise sind kurz,
 ills zu knapp gefaßt.

L. Rédei.

Szász, P.: Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem
 Modul des Einheitsquadrats. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **5**, 35—38 und russische
 Zusammenfassung. 39 (1954).

Man nenne zwei komplexe Zahlen $a = b i$, $c = d i$ miteinander kongruent
 mod $(1, i)$, wenn $a = c$, $b = d \pmod{1}$ ist. Es sei gegeben eine komplexe Zahl
 $z = \alpha + \beta i$ ($0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$) mit irrationalen α, β und ein Parallelogramm J
 der Gaußschen Zahlenebene ohne mod $(1, i)$ kongruente Punkte und vom Inhalt
 $|J| (\leq 1)$. Es bezeichne $N_z(n, J)$ die Anzahl derjenigen Punkte $v z$ ($v \leq n$),
 die mod $(1, i)$ einem Punkte von J kongruent sind. Sind $\alpha, \beta, 1$ linear unabhängig,
 gilt bekanntlich $|N_z(n, J) - n M(J)| = o(n)$. Für spezielle Parallelogramme läßt
 sich genauer beweisen. Und zwar, wenn J_q ($q = 1, 2, \dots$) ein Parallelogramm ist,
 dessen Seitenvektoren A, B , $A = B i$ sind, wobei $A = \min \{(q\alpha), (q\beta)\}$, $B =$
 $\alpha x \{ (q\alpha), (q\beta) \}$ sind und (v) den Bruchteil von v bezeichnet (also $M(J_q) = A$
 v), so bleibt $|N_z(n, J_q) - n A|$ für $n = 1, 2, \dots$ unter einer von α, β, q abhängigen
 Schranke, die gegen Verschiebungen von J_q invariant ist. (Dabei brauchen $\alpha, \beta, 1$
 nicht linear unabhängig zu sein.) Die im Grunde sehr leichte Arbeit ist etwas unklar
 gefaßt und mit mehreren kleinen Druckfehlern behaftet.

L. Rédei.

Val'fiš (Walfisz), A. Z.: Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.
VI. *Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze* **20**, 1—20 (1954) [Russisch].

(Teil XV, dies. Zbl. 39, 40.) Sei k gerade und ≥ 4 . Sei $A_{2k}(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte $(j_1, j_2, \dots, j_{2k})$ (j_m ganz; $1 \leq m \leq 2k$) in der Kugel $z_1^2 + \dots + z_{2k}^2 \leq x$ des $2k$ -dimensionalen Raumes der z_1, \dots, z_{2k} und $\Gamma_{2k}(x)$ das Volumen dieser Kugel. Sei $P_{2k}(x) = A_{2k}(x) - \Gamma_{2k}(x)$ und mit $M_{2k} = \pi^k/2 \Gamma(k)$ möge

$$(1) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \equiv a \pmod{2}}} \sup \frac{P_{2k}(n)}{\inf M_{2k} n^{k-1}} = \frac{P_{2k,a}}{Q_{2k,a}} \quad (a = 0 \text{ oder } 1, k \text{ gerade und } \geq 4)$$

gesetzt werden. Es wird gezeigt: $P_{2k,a} = Q_{2k,1-a} + 2$; wenn P_{2k}, Q_{2k} die (1) entsprechenden Grenzwerte ohne die Einschränkung $n \equiv a \pmod{2}$ bedeuten, so gilt $P_{2k,0} = P_{2k}, Q_{2k,1} = Q_{2k}$; ferner gilt mit $Z(k) = (1 - 2^{-k}) \zeta(k)$:

$$P_{2k,0} = \zeta(k-1)/Z(k), \text{ für } k \equiv 0 \pmod{4}, \text{ und} \\ 0 \leq P_{2k,0} - \zeta(k-1)/Z(k) + 2\theta_{2k}/Z(k) \leq 1,04 \cdot 2^{-2k} + k+1,$$

für $k \equiv 2 \pmod{4}$ ($k \geq 6$), wobei $\theta_{2k} = \sum_{\alpha=2}^{\infty} 2^{\alpha(1-k)} \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-k} [\Sigma' = \Sigma \text{ über die } u \text{ mit } u \equiv 1, -1/3, \dots, -1/(2^{\alpha-1}-1) \pmod{2^{\alpha}}, \text{ bei festem } \alpha]$ gesetzt wurde; für jedes gerade $k \geq 6$ gilt

$$0 \leq P_{2k,1} - \zeta(k-1)/Z(k) + 2^k \theta_{2k}/Z(k) \leq k^{-1} 2^{-k^2+7k/3-2}.$$

Man vergleiche dazu die Arbeit des Verf., dies. Zbl. 40, 17 und die dort zitierte Literatur. K. Prachar.

Lomadze, G. A.: Zur Darstellung der Zahlen durch Summen von Quadraten. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 20, 47—87 (1954) [Russisch].

Sei $r_s(n)$ die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl n als Summe von s Quadraten ganzer Zahlen. Sei

$$Q_s(n) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} n^{s/2-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 < h \leq k, (h,k)=1} \left(\frac{S(h,k)}{k} \right)^s e\left(-n \frac{h}{k}\right) \quad (s \geq 5),$$

wobei $S(h,k)$ die Gaußsche Summe $\sum_{j=1}^k e\left(\frac{hj^2}{k}\right)$ bedeutet ($e(x) = e^{2\pi i x}$).

Mordell [Quart. J. Math. 48, 93—104 (1917)] zeigte

$$\vartheta_3^s(0|\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_s(n) q^n + \sum_{t=1}^l \alpha_s^{(t)} \vartheta_3^{s-8t}(0|\tau) \vartheta_0^{4t}(0|\tau) \vartheta_2^{4t}(0|\tau),$$

wo $\vartheta_i(z|\tau)$ ($i=0, 1, 2, 3$) die vier Thetafunktionen ($q = e^{i\pi\tau}$, $\text{Im } \tau > 0$, $8l < s \leq 8l+8$ und $\alpha_s^{(t)}$ geeignete reelle Konstanten sind. [Es ist $\vartheta_3^s(0|\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} r_s(n) q^n$.] Verf. formt die zweite Summe (über die Produkte der drei ϑ -Funktionen) in gewisser (ziemlich komplizierter) Weise um und erhält so Formeln für $r_s(n)$ in den Fällen $25 \leq s \leq 32$. Eine einfachere davon ist

$$r_{26}(n) = \frac{4}{2702765} \{4096 \cdot 2^{12} n + (-1)^{(n-1)/2}\} \sigma_{12}^*(u) + \\ + \frac{201988}{41581} \sum_{x_1^2 + \dots + x_{18}^2 = n} (x_1^4 - 3 x_1^2 x_2^2) - \frac{938912}{41581} \sum_{x_1^2 + \dots + x_{18}^2 = n} (x_1^8 - 28 x_1^6 x_2^2 + 35 x_1^4 x_2^4) \\ + \frac{256}{2702765} \sum_{x_1^2 + x_2^2 = n} (x_1^{12} - 66 x_1^{10} x_2^2 + 495 x_1^8 x_2^4 - 462 x_1^6 x_2^6);$$

dabei ist $n = 2^u u$, u ungerade, $\sigma_k^*(u) = \sum_{n \equiv \delta \pmod{d}} \left(\frac{-1}{\delta}\right) d^k$, $\left(\frac{-1}{\delta}\right)$ — Restsymbol.

[Siehe auch die Arbeit des Verf., Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 16, 231—275 (1948); dies. Zbl. 40, 162.] K. Prachar.

Lomadze, G. A.: Über die Summation einer singulären Reihe. II. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 20, 21—45 (1954) [Russisch].

In einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 52, 279) wurde eine gewisse singuläre Reihe für ungerades $s \geq 3$ (in der Bezeichnung des zitierten Referates; in diesem Referat wurde irrtümlich behauptet, Verf. hätte die Reihe schon in der damaligen Arbeit für alle $s \geq 3$ summiert) summiert. Es gelingt dem Verf., in dieser Arbeit diese singuläre Reihe auch für gerades $s \geq 4$ zu summieren, was vorher nur für $s = 6, 8$ bekannt war. Die Auswertung der Reihe erfordert ziemlich umfangreiche Rechnungen.

K. Prachar.

Ward, Morgan: Prime divisors of second order recurring sequences. Duke math. J. 21, 607—641 (1954).

The author considers second order recurring sequences (W) defined by $W_{n+2} = P W_{n+1} - Q W_n$ ($n = 0, 1, \dots$), where W_0, W_1, P and Q are fixed given integers and $Q \neq 0$. Calling a prime factor a divisor of the sequence if it divides at least one of its elements the author proves that the sequence possesses an infinite number of distinct prime divisors provided that the ratio of the roots α and β of its characteristic polynomial $x^2 - P x + Q$ be not a root of unity. Moreover he discusses the cases in which this last condition is not satisfied. In particular the assertion also holds if the roots are equal. Remark. In the proof a sequence (M) is introduced by taking $M_n = (A^n - B^n)/(A - B)$. This should be $M_n = (\alpha - \beta)^{n-1} (A^n - B^n)/(A - B)$. Then on page 609, line 6, one has to take $F = (\alpha - \beta)^2 (A - B)^2$ and the relation $\left(\frac{F}{p}\right) = \left(\frac{B}{p}\right)$ is obvious since $A - B$ is a rational integer ($= W_0$).

H. J. A. Duparc.

Carlitz, L.: Note on irregular primes. Proc. Amer. math. Soc. 5, 329—331 (1954).

Es bedeuten B_v bzw. E_v die durch die symbolischen Gleichungen $(B + 1)^n = B^n$ bzw. $(E + 1)^n = (E - 1)^n = 0$ mit $B_v = B^v$ bzw. $E_v = E^v$ definierten Bernoullischen bzw. Eulerschen Zahlen. Bekanntlich heißt eine Primzahl $p > 2$ irregulär, wenn sie in wenigstens einem der Zähler von B_2, B_4, \dots, B_{p-3} als Teiler enthalten ist. Analog definiert Verf.: p heiße irregulär in bezug auf die Eulerschen Zahlen, wenn $p | E_2 E_4 \cdots E_{p-3}$. Verf. zeigt mit Hilfe bekannter Kongruenzen auf einem sehr einfachen Wege, daß es unendlich viele irreguläre Primzahlen gibt und daß es auch unendlich viele in bezug auf die Eulerschen Zahlen irreguläre Primzahlen gibt. Das erste dieser Ergebnisse war schon in schärferer Form von K. L. Jensen [Nyt Tidsskr. for Math. 26, 73—83 (1915)] bewiesen worden.

H. J. Kanold.

Ricci, Giovanni: Funzioni aritmetiche e quasi-asintoticità. Rend. Sem. mat. fis. Milano 24, 88—106 (1954).

Zunächst führt Verf. folgende Symbolik ein: Sind drei Folgen gegeben $(x_n), (a_n), (b_n)$, dann wird gesetzt $x_n \sim \sigma a_n, x_n \sim \tau b_n$, wenn $\lim (x_n/a_n) = \sigma, \lim (x_n/b_n) = \tau$ (dabei ist ∞ zugelassen). Gilt dies nicht für die ursprünglichen Folgen, sondern für die Folgen $(x'_n), (a'_n), (b'_n)$, welche aus den gegebenen Folgen durch ein Summierungsverfahren S hervorgehen, so wird gesetzt $x_n \sim \sigma a_n(S)$ usw. Mit Hilfe dieser Symbolik wird nun eine Übersicht über die asymptotischen Eigenschaften vieler zahlentheoretischen Funktionen gegeben. Nennt man eine Folge (x_n) , quasiasymptotisch zur Folge (a_n) , $(x_n \sim a_n)$, wenn für alle n und jedes $\varepsilon > 0$ bis auf eine Menge von asymptotischer Dichte 0

$$(1) \quad (1 - \varepsilon) a_n < x_n < (1 + \varepsilon) a_n$$

ist, so wird gezeigt, daß dies genau dann der Fall ist, wenn es eine Folge (ν_L) von natürlichen Zahlen mit der Dichte 1 gibt, so daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $L_0(\varepsilon)$ gibt, so daß (1) für $n = \nu_L$ und alle $L \leq L_0(\varepsilon)$ gilt. Verf. definiert nun die Symbole $x_n \simeq a_n, x_n \approx a_n$ usw. wo in (1) nur die linke bzw. rechte Hälfte verlangt wird, gibt dazu einige Beispiele und bestimmt mit Hilfe der Brunschen Methode solche quasiasymptotische Schranken für die Differenzen aufeinanderfolgender Primzahlen.

E. Hlawka.

Moser, Leo and Max Wyman: On an array of Aitkin. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 48, 31—37 (1954).

Es seien die Zahlen G_n definiert durch die symbolische Gleichung (in welcher nach der Entwicklung G^k durch G_k ersetzt wird) $G_{n+1} = (G+1)^n$; $G_0 = G_1 = 1$. Die G_n haben vielerlei kombinatorische Bedeutung. Eine Tabelle von A. C. Aitkin erlaubt es, die G_n durch wiederholte Additionen zu berechnen. Bezeichnet man die in dieser Tabelle in der m -ten Zeile und n -ten Spalte stehende Zahl mit $G_{m,n}$, so gilt die symbolische Gleichung $G_{m,n} = (G+1)^m G^n$. Ferner ist $G_{m,n} = \frac{1}{e} \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)^m \frac{r^n}{r!}$. Bezeichnet p eine Primzahl, so ist $G_{n+mp} = G_{m,n} \pmod{p}$. Verf. definieren weiterhin Zahlen B_n , die $B_{n+1} = (B+1)^n$, $B_0 = 0$, $B_1 = 1$ erfüllen. Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x} \int_0^x e^{-t} dt$ und für jede Primzahl $p \geq 2$ die Kongruenz $B_p \equiv -(1/1! + 1/2! + \dots + 1/(p-1)!) \pmod{p}$.

H. J. Kanold.

Schinzel, A.: Sur une propriété du nombre de diviseurs. Publ. math., Debrecen 3, 261—262 (1954).

Es sei $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$. Verf. beweist den Satz: h und m seien natürliche Zahlen. Dann gibt es eine natürliche Zahl n , so daß $\tau(n) \tau(n \pm i) > m$ für $i = 1, 2, \dots, h$.

H. J. Kanold.

Analysis.

● **Picone, M. e G. Fichera:** Trattato di analisi matematica. Vol. I: Fondamenti dell'algebra e del calcolo infinitesimale nel campo reale e in quello complesso. Rom: Tumminelli 1954. VI, 520 p.; 93 fig. Lire 5700,—.

Der Charakter des auf drei Bände berechneten Lehrbuches ist bestimmt durch das Ziel, sowohl den Studierenden der Mathematik eine solide Grundlage in der Analysis zu geben als auch den Studierenden der Physik und technischen Wissenschaften für die Anwendungen die mathematischen Kenntnisse zu vermitteln. Inhalt: Kapitel 1. Matrizen und Determinanten. Kap. 2. Grenzwerte, reelle Funktionen. Kap. 3. Differentialrechnung für Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen. Kap. 4. Integralrechnung. Kap. 5. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

O. Volk.

● **Tolstov, G. P.:** Lehrgang der Analysis. Bd. I. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 551 S. R. 11,40 [Russisch].

Dieses Lehrbuch, das zwei Bände umfassen soll, wendet sich an Studierende der Universitäten und technischen Hochschulen. Verf. ist bestrebt, eine nicht allzu umfangreiche Darstellung der Grundlagen der Differential- und Integralrechnung zu geben, die den Studierenden das Eindringen in den Stoff möglichst erleichtert, jedoch nicht auf Kosten des Niveaus, der Gründlichkeit in der Formulierung der Begriffsbildungen und der Strenge der Beweise. Dementsprechend ist die Darstellungsweise breit und anschaulich gehalten, sie reicht aber nicht weit über die Fundamente hinaus. Die Auffassung des Stoffes und die Art seiner Behandlung dürften im Rahmen des geringeren Umfangs am ehesten zu vergleichen sein mit denjenigen in dem bekannten Lehrbuch von Mangoldt-Knopp. Im vorliegenden ersten Band reicht der Umfang in der Einleitung über den Begriff der reellen Zahlen und den Grenzbegriff bis zu den Elementen der Reihenlehre und dem Bolzano-Weierstraßschen Satz, in der Differentialrechnung bis zur Taylorreihe und der einschlägigen Untersuchung der Funktionen und Kurven einschließlich der Elemente der Differentialgeometrie (bis zur Theorie der Evolute), in der Theorie des unbestimmten Integrales bis zur Integration einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung und

in der Theorie des bestimmten Integrales bis zu geometrischen Anwendungen und den uneigentlichen Integralen. In der für jede Behandlung des Stoffes besonders wichtigen Gestaltung des Begriffes des bestimmten Integrales beschränkt sich dabei Verf. auf stetige Funktionen mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen im Definitionsintervall. Nach dem Beweise der Existenz einer (nötigenfalls verallgemeinerten) Stammfunktion für diese Funktionen wird das bestimmte Integral über das unbestimmte eingeführt und auf diesem Wege werden auch seine Eigenschaften bewiesen. Die Riemannsche Summendefinition wird hinterher als Eigenschaft des Integrales eingebaut und auf die allgemeine Definition mit Hilfe der Ober- und Untersummen bzw. der Darboux'schen Integrale wird ganz verzichtet. Dafür werden die Elemente der Theorie der komplexen Zahlen gebracht und mit ihrer Hilfe Differential- und Integralrechnung im Bereich der komplexen Funktionen einer reellen unabhängigen Veränderlichen behandelt. Die numerischen und graphischen Methoden sind verhältnismäßig wenig berücksichtigt; die Auswahl der Beispiele und durchgerechneten Aufgaben ist umfangreich und vielseitig. Die weitgehende Anwendbarkeit des Kalküls in den verschiedensten Wissenszweigen kommt hierbei genügend zum Ausdruck. — Wie ersichtlich, befaßt sich der erste Band ausschließlich mit den Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen, es bleiben jedoch noch eine ganze Reihe von Fragen in bezug auf sie unerledigt, z. B. Ausbau der Reihenlehre, Funktionalreihen, unendliche Produkte, konvexe Funktionen, Funktionen von beschränkter Schwankung, Weierstraßscher Approximationssatz, Fourierreihen u. a. Ein endgültiges Urteil über dieses Lehrbuch wird man sich erst nach Erscheinen des zweiten Bandes bilden können.

E. Svenson.

Ostrowski, Alexander: Mathematische Miszellen. XXII. Über gewisse Ungleichungen zwischen monotonen Zahlenfolgen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **57**, 85—89 (1954).

Es seien zwei Folgen von je n reellen Zahlen $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ bzw. $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ gegeben, die für ein $\varepsilon > 0$ den Bedingungen $x_{v+1} - x_v \leq 2\varepsilon$, $y_{v+1} - y_v \leq 2\varepsilon$ ($v = 1, 2, \dots, n-1$) genügen. Ferner möge jedem x_v wenigstens ein y_{μ_v} und jedem y_v wenigstens ein $x_{\mu'_v}$ entsprechen, so daß $|x_v - y_{\mu_v}| \leq \varepsilon$, $|y_v - x_{\mu'_v}| \leq \varepsilon$ gilt. Dann gilt $|y_i - x_i| \leq u\varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$), wo u die größte ungerade Zahl ist, die in n enthalten ist; die Schranke u ist für jedes n die beste.

L. Fuchs.

Menger, Karl: Variables de diverses natures. Bull. Sci. math., II. Sér. **78**, 229—234 (1954).

Nach Erwähnung des früher dargelegten Unterschiedes (dies. Zbl. **52**, 45 (2)) zwischen einer reellen Variablen (eines Symbols) und einer naturwissenschaftlichen Variablen geht Verf. auf letztere, die „variablen Größen“ (quantités variables) der Physik, und auf Funktionen von solchen Größen ausführlicher ein. „Eine variable Größe ist, wenn man will, eine reelle Funktion mit dem (abstrakten) Definitionsbereich A “. Sind u und v solche Größen, mit den Definitionsbereichen A und B , und ist P eine eindeutige Abbildung von A auf B , so heißt v eine Funktion von u (bezüglich P), wenn aus $u(a_1) = u(a_2)$ stets $v(P(a_1)) = v(P(a_2))$ folgt; anders ausgedrückt: wenn die zusammengesetzte Abbildung $f = v \circ P \circ u^{-1}$ (u die nicht notwendig eindeutige Inverse von u) eindeutig ist; f ist dann eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen, definiert im Wertebereich $u(A)$ der Variablen u , und man schreibt auch $v = f(u)$ (bei in Gedanken festgehaltenen P). (P ist z. B. die Zuordnung zwischen Akten des Ablesens des Druckes einer Gasmenge und den gleichzeitigen Akten der Temperaturablesung.) Dies gibt Verf. Veranlassung, zwischen „benannten“ und „reinen“ Funktionen zu unterscheiden (fonctions dénommées und fonctions pures): $y = a x^2$ (x, y reine Zahlen) ist Beispiel einer reinen Funktion, $s = \frac{1}{2} g t^2$ (s, t physikalische Größen) Beispiel einer benannten Funktion. Diesen Gegensatz „rein“—„benannt“ will Verf. auch in den verschie-

denen klassischen Differentiationssymboliken erkennen: indem wir mit Lagrange, d'Arbogast und Heaviside etwa $D \sin - \cos$ schreiben, haben wir es mit einem Vorgang im Bereich der „reinen“ Funktionen zu tun, während Leibnizens und Cauchys dv/du auf den „benannten“ Standpunkt hindeuten soll.

Jürgen Schmidt.

Menger, K.: A simple definition of analytic functions and general multifunctions. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 819—821 (1954).

Jede (ein- oder mehrdeutige) komplexe Funktion wird hier als Menge geordneter komplexer Zahlenpaare (z, w) aufgefaßt. Eine Bewegung (motion) in einer solchen komplexen „Multifunktion“ F ist nichts als eine stetige Kurve im Raume F , mit Parameterdarstellungen $z(t)$, $w(t)$ ($0 \leq t < 1$). Die Multifunktion F ist analytisch, wenn: I. zu jedem $(z, w) \in F$ eine eindeutige analytische Funktion $f \subseteq F$ mit $(z, w) \in f$, d. h. $w = f(z)$, existiert; II. zu eindeutigen analytischen Funktionen $f_0, f_1 \subseteq F$ stets eine Bewegung $z(t)$, $w(t)$ in F existiert derart, daß diese Bewegung für $0 \leq t \leq \varepsilon$ in f_0 , für $1 - \varepsilon \leq t \leq 1$ in f_1 und in der Umgebung eines beliebigen Parameterwertes t stets in einer eindeutigen analytischen Funktion $f \subseteq F$ verläuft. — Die Summe $F_1 + F_2$ zweier Multifunktionen ist definiert als Menge der geordneten Zahlenpaare $(z, w_1 + w_2)$ mit $w_i \in F_i$; analog das (arithmetische) Produkt. Die Hintereinanderausführung (one-place substitution) zweier Multifunktionen wird wie in der allgemeinen Relationentheorie üblich (Schröders Relationenprodukt) definiert; allerdings gibt die Schreibweise $F_1 F_2$ hier zu Verwechslungen mit dem oben definierten arithmetischen Produkt Anlaß. Eine „analytische Poly-Multifunktion“ entsteht aus analytischen Multifunktionen durch endlichmalige Anwendung dieser drei Operationen; das Resultat braucht selbst keine analytische Multifunktion zu sein. — Verf. geht noch auf den Begriff des Verzweigungspunktes einer Multifunktion und auf Verallgemeinerungen ein, die auch diejenigen umfassen, die (obgleich nicht in dieser Form) in der Theorie der magnetischen Platten, in Sommerfelds Theorie der schwarzen Körper und in der Differentialgeometrie studiert worden sind.

Jürgen Schmidt.

Mengenlehre:

Rainich, G. Y.: Involution and equivalence. Michigan math. J. **2**, 33—34 (1954).

Die Eigenschaften: 1. $a \sim b \rightarrow b \sim a$ und 2. $a \sim b$, $b \sim c$, $c \sim d \rightarrow a \sim d$ kommen sowohl einer Äquivalenzrelation als auch einer involutorischen Abbildung zu, wenn im letzteren Fall $a \sim b$ bedeutet, daß b das Bild von a ist. Aus 1. und 2. folgt also noch nicht die Transitivität im üblichen Sinne, wohl aber, wenn noch die Reflexivität $a \sim a$ gilt. Die Eigenschaft 2. kann demgemäß als Abschwächung der Transitivität angesehen werden.

E. Sperner.

Kurepa, G.: On symmetrical binary relations. Conseil Acad. RPF Yougoslavie Bull. sci. **2**, 9 (1954).

Kurepa, Georges: Sur la relation d'inclusion et l'axiome de choix de Zermelo. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. **1952**, 95—96 (1954).

Im wesentlichen kurzes Résumé der gleichnamigen, in dies. Zbl. **48**, 35 besprochenen, Arbeit.

Jürgen Schmidt.

Karl, Herbert: Das Wesen des Unendlichen in der Mathematik. Wiss. Z. Päd. Hochschule Potsdam **1**, 1—11 (1954).

Verf. versucht zu beweisen, daß die Menge der reellen Zahlen x mit $0 \leq x \leq 1$ durch die Ordnungszahlen von 1 bis ω^ω abgezählt werden könne. Der Trugschluß liegt unmittelbar auf der Hand.

W. Neumer.

Cuesta, N.: Skalen von Ordinalzahlen. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **14**, 237—268 (1954) [Spanisch].

L'A., continuando le sue ricerche sugli ordinamenti totali [Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 3, 186—205, 242—268 (1943)], nella prima parte di questa Nota stabilisce alcuni risultati che gli permettono di risolvere il problema di costruire una scala di tipi ordinali via via aritmeticamente crescenti, problema di cui si era occupato anche Hausdorff (Mengenlehre, Berlin 1927, p. 54). Introduce quindi e studia vari concetti connessi con le scale di tipi ordinali. — Nella 2^a parte l'A. esamina le critiche di Denjoy alla teoria cantoriana delle scale ordinali.

L. Giuliano.

Padmavally, K.: Generalisation of the ordertype of rational numbers. Revista mat. Hisp. Amer., IV. Ser. 14, 50—73 (1954).

In questo lavoro l'A. generalizza alcune classiche ricerche che si riferiscono ai tipi d'ordine dei numeri razionali. Conservando le notazioni di un precedente lavoro (questo Zbl. 49, 39) possiamo brevemente riassumere come segue i risultati stabiliti dall'A. Siano α e ω_k rispettivamente un numero limite e un ordinario numero ordinale e sia μ un tipo d'ordine. Si consideri l'ordine dell'insieme delle successioni transfinite $(x_i)_{i=1, \dots, \alpha}$ in cui $0 \leq x_i \leq 1$ e, fissato $p \neq 0, 1$, per qualche $\beta_0 < \alpha$, che può variare da successione a successione, sia $x_\beta = p$, per ogni $\beta \geq \beta_0$. Viene provato: 1° tale ordine non dipende da p e si può perciò indicare con $D(\alpha)$. 2° ogni sottoinsieme denso di $D(\alpha)$ ha tipo d'ordine $D(\alpha)$. 3° $D(\alpha)$ è denso in $\theta((\alpha))$ ed è lo stesso tipo d'ordine di un sottoinsieme isolato di $\theta((\alpha))$ [θ indica il tipo d'ordine dell'intervallo $0 \leq x \leq 1$]. 4° Ogni insieme e_k [v. Hausdorff, Math. Ann. 65, 435—505 (1908), p. 487] che ha lo stesso tipo d'ordine di un insieme di intervalli a due a due senza punti comuni di $\theta((\omega_k))$, ha tipo d'ordine $D(\omega_k)$. 5° Se né ω_k né ω_k^* possono essere contenuti in μ , allora μ può essere contenuto in $2((\omega_k))$ come sottoinsieme isolato. 6° Se μ è denso e c_{kk} è il suo più piccolo carattere simmetrico, allora ogni tipo d'ordine non contenente né ω_k né ω_k^* , può essere contenuto in μ .

L. Giuliano.

Kondô, Motokiti: Les éléments quasi-clairsemés. (L'énumération transfinie. I.) Proc. Japan Acad. 30, 66—69 (1954).

Kondô, Motokiti: Les éléments primitifs. (L'énumération transfinie. II.) Proc. Japan Acad. 30, 341—344 (1954).

Zwei Mitteilungen von Ergebnissen bezüglich der Struktur geordneter Mengen (ohne Beweise). Das Verständnis wird durch die allzu knappe und nicht immer präzise Darstellung unnötig erschwert. — Erste Mitteilung. Sei E eine Teilmenge der Menge R der rationalen, der Größe nach geordneten Zahlen, $\iota(E)$ die Menge der im Sinne der Ordnung von E isolierten Punkte von E und $\delta(E) = E - \iota(E)$. Durch Rekursion wird für beliebige Ordnungszahlen α erklärt: $\delta^\alpha(E) = \delta(\delta^{\alpha-1}(E))$ bzw. $= \bigcap_{\beta < \alpha} \delta^\beta(E)$, je nachdem α von erster oder zweiter Art ist. Wenn ein $\eta(< \Omega)$ mit $\delta^\eta(E) = 0$ existiert, heißt E quasiclairsemé. — Wenn jede nicht leere Teilmenge von E wenigstens einen isolierten Punkt enthält, heißt E clairsemé. (Bezeichnung von Denjoy; „clairsemé“ in diesem Sinne ist äquivalent mit „zerstreut“ im Sinne von Hausdorff. Ref.) Es gilt clairsemé = quasiclairsemé, aber die Umkehrung braucht nicht zu gelten. — Satz: Eine Teilmenge E von R , die in der Menge L der reellen Zahlen x mit $-\infty < x < \infty$ abgeschlossen und quasiclairsemé ist, ist auch clairsemé. [Allgemeiner: Eine nicht leere, höchstens abzählbare geordnete und ordinal abgeschlossene (d. h. lückenlose) Menge ist clairsemé. Für eine geordnete Menge E beliebiger Mächtigkeit gilt: Ist $E \setminus \{0\}$ ordinal abgeschlossen und quasiclairsemé, so ist E auch clairsemé. Ref.] — Verf. definiert sogenannte Prim-Elemente von E ; das sind offenbar diejenigen Stücke von E (Stück im Sinne von Hausdorff), die, als selbständige Mengen betrachtet, entweder quasiclairsemé oder (ordinal) dicht sind und die in keinem größeren Stück derselben Art enthalten sind. Die Stücke der ersten Art sollen anscheinend nicht aus zwei konsekutiven Elementen von E bestehen. Jedem Primelement P sind auf nicht ganz durchsichtige Weise

zwei reelle Zahlen $a < b$ als seine Endpunkte zugeordnet, so daß $P = [a, b] \cap E$ ist. Wenn es nur endlich viele Primelemente gibt, ist E ihre geordnete Summe. Gibt es unendlich (also abzählbar) viele Primelemente, so heißt das bezüglich E gebildete Komplement $\nu(E)$ ihrer geordneten Summe der Kern von E . Indem $\nu(E)$ einer analogen Betrachtung wie E unterworfen wird, werden einige Struktursätze bezüglich E ausgesprochen. — Zweite Mitteilung. Ist E quasiclairsemé and η die kleinste Zahl mit $\delta^\eta(E) = 0$, so heißt $\eta = \text{Ord}(E)$ die Ordnung von E . Für eine endliche reelle Zahl p wird die Ordnung von E in p definiert als die Zahl $\text{Ord}(p, E) = \inf \text{Ord}([q, r[\cap E) \cup \{p\})$ ($q < p < r$); für $p = +\infty$: $\text{Ord}(p, E) = \inf \text{Ord}([r, +\infty[\cap E)$ ($r < +\infty$); entsprechend für $p = -\infty$. — Für endliches p ist $\text{Ord}(p, E)$ keine Limeszahl. Ferner: $\text{Ord}(p, E) \leq \text{Ord}(E) + 1$; $\text{Ord}(E) = \sup \text{Ord}(p, E)$ für $p \in E$. — Ist $\alpha < \Omega$, so heißt die Menge F_α aller Punkte p mit $\text{Ord}(p, E) > \alpha$ die Begrenzung α^{ter} Ordnung von E . Die F_α sind abgeschlossen in L (siehe oben), nicht dicht für $\alpha \geq 2$, nicht wachsend mit α , und es ist $\delta^\alpha(E) \subseteq F_\alpha$. Für Limeszahlen α ist $F_\alpha = F_{\alpha+1}$. Es ist $F_\alpha = 0$ für $\alpha > \eta + 1$. $F = F_{\eta+1}$ heißt die vollständige Begrenzung von E . — Für die Fälle $F = 0$ bzw. $F \neq 0$ werden einige Struktursätze ausgesprochen. — Ist $a < b$ ein Paar reeller Zahlen, so werde $\alpha = \text{Ord}(a, [a, b[\cap E)$, $\beta = \text{Ord}(b, [a, b[\cap E)$ gesetzt. Dann heißt (α, β) die Gattung („genre“) des Stückes $]a, b[\cap E$ von E . — Die Kombination der möglichen Fälle, die durch folgende Bedingungen geliefert werden: η von 1. oder 2. Art, $\alpha \leq \eta + 1$, $\beta \leq \eta + 1$, gibt Anlaß zu Struktursätzen und zur Klassifikation der Stücke $]a, b[\cap E$ in primitive, quasiprimitive und imprimitive „Elemente“ der Ordnung η von E . Die letzteren ziehen die Definition von in ihnen enthaltenen Stücken $]a_N, b_N[\cap E$ nach sich, die primitive bzw. quasiprimitive Elemente von E einer Ordnung $\eta_N < \eta$ heißen. — Satz: Jede Menge $E \neq 0$, die quasiclairsemé ist, ist Vereinigung von höchstens abzählbar vielen primitiven oder quasiprimitiven Elementen $]a, b[\cap E$ von Ordnungen $< \eta$, die paarweise disjunkt sind und deren Menge $\tau(E)$ geordnet ist im Sinne der Anordnung der „Endpunkte“ a, b auf der Zahlengeraden. Nun kann man $\tau(\tau(E))$ bilden, und die Elemente dieser Menge sind Mengen von Stücken von E , deren Vereinigungen eine geordnete Menge $\tau^2(E)$ von Stücken von E bilden. Durch Rekursion ergeben sich geordnete Mengen $\tau^\lambda(E)$ von Stücken von E , deren Vereinigung E ist. Es gibt ein $\xi < \Omega$, so daß entweder $\tau^\xi(E)$ nicht quasiclairsemé ist oder nur aus der Menge E besteht. Beide Fälle kommen vor; im letzten Falle heißt E biclairsemé; insbesondere gilt clairsemé \Rightarrow biclairsemé.

W. Neumer.

Tugué, Tosiyaiki et Zen-iti Okuyama: Sur le type d'ordination de famille monotone d'ensembles. Proc. Japan Acad. 30, 345—349 (1954).

Sei $\tilde{\mathfrak{A}}$ ein System von Mengen des r -dimensionalen euklidischen Raumes U_r . Ist $E \subseteq U_r$, so sei \bar{E} die Abschließung von E . Eine Menge $E \in \tilde{\mathfrak{A}}$ heiße in $\tilde{\mathfrak{A}}$ von 1. oder 2. Art, je nachdem die Menge der $X \in \tilde{\mathfrak{A}}$ mit $X \cap \bar{E}$ nur aus E besteht oder nicht. Das System $\tilde{\mathfrak{A}}$ habe die Eigenschaft P , wenn die Menge der \bar{E} , die Abschließungen von Mengen E von zweiter Art in $\tilde{\mathfrak{A}}$ sind, höchstens abzählbar ist. — Das System $\tilde{\mathfrak{A}}$ heißt monoton, wenn es im Sinne der Relation \subseteq (vollständig) geordnet ist. — Es wird ein einfacher Beweis des Satzes von Denjoy dafür gegeben, daß ein monotones System von abgeschlossenen Mengen linear (d. h. einer Teilmenge des Segments $[0, 1]$ ähnlich) ist. — Sei $R_0(E) = E$, $R_{i+1}(E) = R_i(E) - R_i(E)$ ($i = 1, 2, \dots$). Hilfssatz: Eine Menge $E \subseteq U_r$ läßt sich genau dann als Summe $E = \bigcup_{i=0}^{n-1} (F_{2i} - F_{2i+1})$ von n Differenzen abgeschlossener Mengen darstellen, wenn $R_{2n}(E) = 0$ ist. — Sätze: Ein monotones System $\tilde{\mathfrak{A}}$ von Mengen $E \subseteq U_r$ mit $R_{2n}(E) = 0$ ist einer Teilmenge der lexikographisch geordneten Menge U_{2n} ähnlich. Ein solches $\tilde{\mathfrak{A}}$ ist genau dann linear, wenn $\tilde{\mathfrak{A}}$ und die Systeme $R_k(\tilde{\mathfrak{A}})$

($k = 1, 2, \dots, 2n - 2$) die Eigenschaft P haben; dabei bedeutet $R_k(\tilde{\mathfrak{F}})$ das System der $R_k(E)$ mit $E \in \tilde{\mathfrak{F}}$.
W. Neumer.

Tugué, Tosiya: Sur la famille monotone d'ensembles développables. Proc. Japan Acad. **30**, 691—693 (1954).

Sei $E \in U_r, U_r$ der r -dimensionale euklidische Raum, \bar{E} die Abschließung von E . Es werde $R_0(E) = E$ gesetzt und durch Rekursion $R_\alpha(E) = R_{\alpha-1}(E) \cup R_{\alpha-1}(E)$ für isoliertes α , $R_\alpha(E) = \bigcap_{\beta < \alpha} R_\beta(E)$ für eine Limeszahl α erklärt. E ist „développable“ (im Sinne von Kuratowski), wenn es ein β ($< \Omega$) gibt mit $R_\beta(E) = O$. Das kleinste β dieser Art werde mit $i(E)$ bezeichnet. (Der Begriff „développable“ ist mit dem Hausdorffschen Begriff „reduzibel“ äquivalent. Ref.) Sei $\tilde{\mathfrak{F}}$ ein monotones System reduzibler Mengen E . Es werde für jedes $E \in \tilde{\mathfrak{F}}$ und für alle $\alpha < i(E)$ erklärt: $\tilde{\mathfrak{F}}_E^\alpha =$ Menge der $X \in \tilde{\mathfrak{F}}$ mit $X \subseteq E$; $\tilde{\mathfrak{F}}_E^\alpha =$ Menge der $X \in \tilde{\mathfrak{F}}_E^{\alpha-1}$ mit $R_{\alpha-1}(X) = R_{\alpha-1}(E)$, wenn α isoliert; $\tilde{\mathfrak{F}}_E^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} \tilde{\mathfrak{F}}_E^\beta$, wenn α Limeszahl. — Es wird gezeigt: $\tilde{\mathfrak{F}}$ ist genau dann linear, wenn es höchstens abzählbar viele Systeme $\tilde{\mathfrak{F}}_E^\alpha$ gibt, welche aus mehr als einer Menge bestehen.
W. Neumer.

Kurepa, G.: Fonctions croissantes dans la famille des ensembles bien ordonnés linéaires. Conseil Acad. RPF Yougoslavie, Bull. sci. **2**, 9 (1954).

Kurepa, G.: Sur les fonctions réelles dans la famille des ensembles bien ordonnés de nombres rationnels. Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Sér. **12** (Cl. Sci. math. phys. techn. **4**), 35—42 (1954).

Bezeichnungen. Es sei E eine (evtl. nur teilweise) geordnete Menge. Von zwei Teilmengen A, B von E heiße A Anfangstück (section initiale propre) von B , in Zeichen: $A <_k B$, wenn für jedes $x \in A$ die Menge der $z \in B$ mit $z < x$ in A enthalten ist. — Es sei wE die Menge der wohlgeordneten Teilmengen von E ; unter einer Antikette antichaine von wE wird jedes System K von Mengen aus wE verstanden derart, daß keine zwei (verschiedene) $X, Y \in K$ bezüglich $<_k$ vergleichbar sind. — Schließlich sei σE die Menge der (nicht leeren) $X \in wE$ derart, daß ein $x' \in E$ existiert mit $z \leq x'$ für jedes $z \in X$. — Sätze: Es sei R die (geordnete) Menge der rationalen Zahlen. (1) Es existiert keine eindeutige Abbildung f von wR in R mit der Eigenschaft: $f(X) < f(Y)$ für $X, Y \in wR$, wenn $X <_k Y$. — (2) Es wird (1) gefolgt aus dem in der Arbeit bewiesenen Satz, daß \aleph_1 die kleinste Anzahl von Antiketten in wR ist, als deren Vereinigung wR darstellbar ist. — (3) Jede Antikette von σR ist nirgends dicht in der geeignet (total) geordneten Menge σR . — Außerdem weitere Einzelergebnisse.
Otto Haupt.

Kurepa, G.: Some remarks on abstract spaces. Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Sér. **12** (Cl. Sci. math. phys. techn. **4**), 43—50 (1954).

Verf. beweist folgende Sätze. — Die Punkte jeder isolierten Teilmenge eines metrischen Raumes oder einer total geordneten Menge können simultan durch offene Mengen getrennt werden. — Sei P ein Raum, und es werde $sP = \sup kX$ gesetzt, wo X alle möglichen Systeme disjunkter offener Teilmengen von P durchläuft und kM die Mächtigkeit der Menge M bedeutet. Sätze: Ist P metrisch, so gibt es ein System G_0 von disjunkten offenen Mengen in P , so daß $sP = kG_0$ wird. Ist P eine totalgeordnete Menge und sP nicht unerreichbar, so gibt es ein System G_0 nicht leerer disjunkter Intervalle aus P mit $sP = kG_0$. — Sei $k_I P = \sup kX$, wo X das System der isolierten Mengen in P durchläuft. Dann ist $k_I P = sP$, wenn P metrisch oder total geordnet ist, und die Zahl $k_I P$ wird im ersten Fall stets, im zweiten Fall sicherlich dann erreicht, wenn sP nicht unerreichbar ist. — Als den asymptotischen Durchmesser eines metrischen Raumes S definiert Verf. die reelle Zahl $d_\infty S = \inf dM$, wo M den Filter der Mengen M durchläuft, welche

die Eigenschaft $k(M \cap S) > k(CM \cap S)$ besitzen; CM bezeichnet dabei das Komplement von M , dM den Durchmesser von M (M und S sind in einen umfassenden metrischen Raum eingebettet zu denken). Sätze: Aus $d_a S = 0$ folgt $kS = 1$ oder $\text{cf}(kS) = \omega$. Zu jeder Kardinalzahl m mit $\text{cf}(m) = \omega$ gibt es einen metrischen Raum S mit $kS = m$ und $d_a S = 0$. — Sei E ein metrischer Raum mit der Entfernungsfunktion $\varrho(x, y)$. E_0 bedeute die Menge der $X \subseteq E$, für die $X \neq \emptyset$ und $d_a X = 0$ gilt. E_0 wird metrisiert durch die Entfernungsdefinition $\varrho_0(X_1, X_2) = \inf_{K_1, K_2} \sup_{x_1, x_2} \varrho(x_1, x_2)$, wo $x_i \in K_i$ ($i = 1, 2$) und K_i der Bedingung $k(K_i \cap X_i) > k(CK_i \cap X_i)$ genügt. Verf. zeigt, daß E_0 (bis auf Isometrie) die vollständige Hülle von E ist. W. Neumer.

Kurepa, G.: Über die Faktoriellen endlicher und unendlicher Zahlen. Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Sér. **12**, (Cl. Sci. math. phys. techn. **4**), 51—64 (1954).

Bezeichnungen: kA = Mächtigkeit von A , wenn A eine Menge oder einen Ordnungstypus bedeutet. — $A!$ = Gruppe aller Permutationen der Menge A . — $a! = k(A!)$, wenn $a = kA$. — $\alpha! = (k\alpha)!$, wenn α ein Ordnungstypus. — $I(n)$ = Menge der $\xi < n$, wenn n eine Kardinal- oder Ordinalzahl ist. — Satz: $\aleph_\alpha! = 2^{\aleph_\alpha}$ (drei verschiedene Beweise werden gegeben). — Ist n eine natürliche Zahl, so bedeute $P_s(n)$ die Menge der Primzahlen p , für die p^s ein Teiler $n!$ ist, aber p^{s+1} nicht mehr in $n!$ aufgeht; versteht man ferner unter $\beta(n)$ die größte Primzahl $\leq n$, so gilt: Der Bertrand-Tschebyscheffsche Primzahlsatz ist mit der Relation $\beta(n) \in P_1(n)$ ($n > 1$) gleichwertig. Folgerung: Für natürliches n ist niemals $n! = r^s$ ($s > 1$, $r > 1$). Folgerung: $a! = 2^a$ ist äquivalent mit der Aussage: a ist transfinite Kardinalzahl. — Auf Grund des großen Primzahlsatzes folgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} kP_s(n) = \infty$.

Ferner: Über der Menge der positiven reellen Zahlen gibt es eine stetige Funktion $\varrho(x) > 0$ mit den Eigenschaften: 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varrho(x)}{x} = 1$. 2. $\pi(\varrho(x)) - \pi(x) > 1$ [$\pi(x)$ = Anzahl der Primzahlen $\leq x$]. 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi(\varrho(x)) - \pi(x)) = \infty$. — Ist n eine beliebige Ordnungs- oder Kardinalzahl, so bedeute $P(n)$ die Menge aller Abbildungen f der Menge $I(n)$ in sich, bei denen $0 \leq f(\xi) \leq \xi$ für $\xi \in I(n)$ gilt. Satz: Wenn n eine Ordnungszahl, so hat man $kP(n) = \prod_{0 \leq \nu < n} k(\nu + 1) = n!$. — Wegen

$P(\aleph_\alpha) = P(\omega + \alpha)$ wird $kP(\aleph_\alpha) = 2^{k(\omega + \alpha)}$. Soll auch für transfinite Kardinalzahlen $a = \aleph_\alpha$ die Relation $kP(a) = a!$ gelten, so ist die vom Verf. als „zweite Kontinuumshypothese“ bezeichnete Forderung zu stellen: $2^{\aleph_\alpha} = 2^{k(\omega + \alpha)}$ oder $2^a = 2^{kI(a)}$. Aus dieser würde insbesondere $2^{\aleph_{\alpha+1}} = 2^{\aleph_\alpha}$, speziell die Lusinsche Hypothese $2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0}$ folgen. [Bezeichnet man mit κ_ν die kritischen Zahlen der Normalfunktion $\varphi(\lambda) = \omega_\lambda$, so besagt die Hypothese des Verf. explizit: $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$ für $0 \leq \alpha < \kappa_0$ ($\kappa_0 = \lim \{\omega, \omega_\omega, \omega_{\omega_\omega}, \dots\}$) und $2^{\aleph_\alpha} = 2^{k\kappa_\nu}$ für $\kappa_\nu \leq \alpha < \kappa_{\nu+1}$; daß $2^{\aleph_{\kappa_\nu}} = 2^{k\kappa_\nu}$ gilt, ist klar. Hinsichtlich der Größenbeziehung zwischen $2^{k\kappa_\nu}$ und $2^{k\kappa_{\nu+1}}$ sagt die Hypothese nichts aus. Ref.] — Zum Schluß zeigt Verf., daß jede Gruppe G einem multiplikativen System von intakten quadratischen Matrizen isomorph ist, deren Elemente 0 oder 1 sind, wobei in jeder Zeile und Spalte genau eine 1 auftritt. — [Die Übertragung der Fakultät $n!$ von endlichem auf transfinite n ist kein zwangsläufiger Prozeß; mit gleichem Recht kann man auch rein formal $\Gamma(n) = \prod_{1 \leq \nu < n} \nu$ verallgemeinern. Für transfinite Ordnungszahlen n läßt sich $\Gamma(n)$ geschlossen auswerten, wie Ref. gezeigt hat. Für $n = \aleph_\lambda$ (λ Limeszahl) bzw. $n = \aleph_{\alpha+1}$ hat man nach Tarski, Hausdorff und Bernstein: $\Gamma(\aleph_\lambda) = \aleph_\lambda^{k\lambda'}$ $\Gamma(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_\alpha^{\aleph_0 + k\alpha}$, während $\Gamma(\aleph_0) = 2^{\aleph_0}$ ist. Ref.]. W. Neumer.

Fodor, G.: On a problem in set theory. *Acta Sci. math.* **15**, 240—242 (1954).

Sei m eine unendliche Kardinalzahl, I_m die Menge aller Ordinalzahlen mit Mächtigkeiten $< m$, n eine Kardinalzahl $< m$, S eine Menge der Mächtigkeit m ; für jede Ordinalzahl $\gamma \in I_m$ sei S_γ eine Menge $\subseteq S$ einer Mächtigkeit $< m$. Dann existiert eine Menge $I \subseteq I_m$ der Mächtigkeit m , für welche $S = \bigcup_{\gamma \in I} S_\gamma$ die Mächtigkeit m hat. Dieser Satz, von P. Erdős mittels Kontinuumshypothese bewiesen, wird vom Verf. ohne diese Hypothese bewiesen. *G. Nöbeling.*

Erdős, Paul: Some remarks on set theory. IV. *Michigan math. J.* **2**, 169—173 (1954).

(Teil III, dies. Zbl. **56**, 51.) Einfache Folgerungen aus der Kontinuumshypothese und Beweis des folgenden Satzes: In einer Menge M sei ein Maß definiert, und M sei die Vereinigung abzählbar vieler Mengen von endlichem Maß; dann enthält jedes unabzählbare System von Mengen mit positivem Maß ein unabzählbares Teilsystem derart, daß je zwei Mengen des letzteren einen nicht leeren Durchschnitt haben. *G. Nöbeling.*

Sodnomov, B. S.: Ein Beispiel zweier G_δ -Mengen, deren arithmetische Summe nicht B -meßbar ist. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **99**, 507—510 (1954) [Russisch].

L'A. construit deux ensembles G_δ de nombres réels, E_x et E_y , dont la somme directe $E_x \oplus E_y$ est un ensemble A plan sans être mesurable B . *G. Marinescu.*

Moran, P. A. P.: The translations of linear sets of fractional dimensions. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 634—636 (1954).

Ist E eine lineare Punktmenge von positivem Maß, so gibt es bekanntlich Translationen $\delta \neq 0$ so, daß auch das Maß des Durchschnitts $E \cap E^\delta$ positiv ist, wo E^δ die durch die Verschiebung um δ aus E hervorgehende Menge bezeichnet. Verf. weist nach, daß die entsprechende Aussage für α -dimensional meßbare lineare Mengen nicht gilt, wenn $0 < \alpha < 1$ ist. Er konstruiert eine durch die Abbildung $x^* = x - 10^{-6} x^2$ aus dem Cantorsche triadischen Diskontinuum hervorgehende Menge E und zeigt, daß mit $\alpha = \ln 2 / \ln 3$ zwar $0 < A^\alpha(E) < \infty$ aber für jedes $\delta \neq 0$ $A^\alpha(E \cap E^\delta) = 0$ ausfällt, wenn A^α das α -dimensionale Maß bezeichnet.

H. Hadwiger.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Ionescu Tulcea, C. T.: Fonctions d'ensemble et leurs intégrales. *Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat.* **5**, 74—141, russ. u. franz. Zusammenfassg. **141**, 142 (1954) [Rumänisch].

L'A. définit des intégrales de fonctions d'ensembles prenant leurs valeurs dans un ensemble de parties d'un demi-groupe uniforme, dans lequel l'opération de composition est uniformément continue. Ces intégrales généralisent, à la fois, les intégrales de A. Kolmogorov et de C. E. Rickart. Les intégrales, considérées par l'A. sont données sur des filtres, définis sur des systèmes algébriques plus généraux, qui représentent un raffinement des divisions considérées dans les types usuels d'intégrales. Le travail comprend une étude étendue des intégrales additives et complètement additives, dans des conditions dont la généralité permet de retrouver, comme cas particuliers, des intégrales définies antérieurement par d'autres auteurs. Cette étude est précédée d'une introduction, où l'on reprend et l'on analyse les notions générales de demi-groupe uniforme, groupe abélien ordonné, familles sommables (Bourbaki) dans un demi-groupe uniforme. L'on y obtient aussi la condition suivante, pour qu'une fonction d'ensemble $f(E)$, ou $E \in T$ (corps borélien d'ensembles E) soit absolument continue par rapport à la mesure extérieure $m(E)$, définie sur T , lorsque $f(E)$ prend ses valeurs dans un groupe topologique séparé G : Il faut et il suffit d'avoir $f(E) = 0$, pour tout $E \in T$, pour lequel $m(E) = 0$. *A. Froda.*

Tompson, Robert N.: Areas of k -dimensional nonparametric surfaces in $k + 1$ space. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 374—407 (1954).

The author studies two types of continuous mappings (surfaces): (a) mappings from a cell C of the k -dimensional Euclidean space E_k into the space E_{k+1} of the type $x_1 = u_1, \dots, x_k = u_k, x_{k+1} = f(u_1, \dots, u_k)$; and (b) mappings from $C \subset E_k$ into E_k of the type $x_1 = u_1, \dots, x_{k-1} = u_{k-1}, x_k = f(u_1, \dots, u_k)$. In both cases f is a continuous single-valued real function of $u = (u_1, \dots, u_k)$ in the closed cell C . The orthogonal projections of the mappings of the type (a) on the k -dimensional hyperplanes $x_j = 0, j = 1, 2, \dots, k$, of E_{k+1} are of the type (b). Also, a third type (c) of mappings is considered, namely, the orthogonal projections of the mappings (a) on an arbitrary k -dimensional hyperplane of E_{k+1} . The main following theorems concerning surfaces of the type (a) are proved: (1) the k -dimensional Lebesgue area is finite if and only if the real, continuous, single-valued function f is of bounded variation in the sense of Tonelli (BVT); (2) the same area is \geq the classical area integral and the equality sign holds if and only if f is absolutely continuous in the sense of Tonelli (ACT); (3) Lebesgue area, Hausdorff area, integral geometric area, and other areas are equal; (4) the area derivative is almost everywhere equal to the value of the integrand in the classical area integral; (5) The Lebesgue areas of the smooth surfaces T_n , obtained by replacing f by the integral means f_n of f , approach the Lebesgue area of T as $n \rightarrow \infty$. All these results are the natural extensions of previous ones of L. Tonelli [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. Ser. **3**, 357—362, 445—450, 633—638, 714—719 (1926); **5**, 313—318 (1927)], of T. Radó [Fundamenta Math. **10**, 197—210 (1927)], and of H. Federer [Trans. Amer. math. Soc. **55**, 420—427, 438—456 (1944); **59**, 441—466 (1946)] for $k = 2$. The notations used are mostly Federer's. First mappings of the type (b) are studied and the results applied to mappings of the type (a). L. Cesari.

Fleming, W. H. and L. C. Young: A generalized notion of boundary. Trans. Amer. math. Soc. **76**, 457—484 (1954).

Es bezeichne E^m den Raum aller stetigen Funktionen $f(x, J)$ eines m -dimensionalen Vektors $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ und einer $m \times m$ schiefsymmetrischen Matrix J . Sei:

$$\{x^s(u, v)\}, \quad s = 1, 2, \dots, m; \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

die Parameterdarstellung einer Fläche F mit absolutstetigen $x^s(u, v)$, deren Dirichletintegrale beschränkt sind. Nach der allgemeinen Theorie von Young wird der Fläche F das lineare Funktional:

$$(L, f) = \iint f(x(u, v), J(u, v)) du dv,$$

$f \in E^m$ zugeordnet. $J(u, v) = \text{Matrix } [x^s_u x^s_v - x^s_v x^s_u]$. Der Begriff der verallgemeinerten parametrischen Fläche ist identisch mit dem eines nichtnegativen, linearen Funktional. Verff. definieren den Begriff des verallgemeinerten Randes einer verallgemeinerten Fläche, wodurch die Youngsche Theorie in vielen Punkten fortgeführt wird. Als Ausgangspunkt dieser Begriffsbildungen dient die Gesamtheit der exakten Integranden in E^m , wofür das Oberflächenintegral (L, f) für alle geschlossenen Polyeder verschwindet. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt, unter der eine verallgemeinerte Fläche einen vorgegebenen, weiter eingegrenzten verallgemeinerten Rand besitzt. Nach Ausgestaltung ihrer Theorie bemerken die Verff., daß die bekannten Existenzsätze von Cesari, Danskin und Sigalov für Variationsprobleme in Parameterstellung verschärft werden können, was die Voraussetzungen der Positivität des Integranden anlangt. H. Beckert.

Pchakadze, Š. S.: Über mehrfache Integrale. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **20**, 167—209 (1954) [Russisch].

The author examines the problem under what condition about the non-measure-

able plane set E the iterated integrals $\int_0^1 dx \int_0^1 c_E(x, y) dy, \int_0^1 dy \int_0^1 c_E(x, y) dx$ exist and are equal [$c_E(x, y)$ is the characteristic function of E]. For this purpose the author develops a theory of the iterated upper and lower integrals of bounded non-measurable functions $f(x, y)$. In particular, he introduces a new notion of the iterated upper and lower integrals in the strong sense. The main theorem is that the iterated integrals of $c_E(x, y)$ are equal if there are some sets $A, B \subset [0, 1]$ of Lebesgue measure 1 such that (1) for every $x \in A$ the set $\{y: (x, y) \in E\}$ is open or closed; (2) for every $y \in B$ the set $\{x: (x, y) \in E\}$ is open or closed. The paper contains also some applications of the continuum hypothesis for the construction of sets E such that the iterated integrals of $c_E(x, y)$ exist but are not equal. For instance, it is proved that if $0 < \varepsilon < 1$ and $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, then there exists a set E such that (1) for every y the set $\{x: (x, y) \in E\}$ is open; (2) for every x the set $\{y: (x, y) \in E\}$ is G_δ ; (3) the first iterated integral of $c_E(x, y)$ is equal to 1, and the second is equal to ε .

R. Sikorski.

Aruffo, Giulio: Sulle condizioni di validità della formula di Green-Stokes generale. *Ricerche Mat.* **3**, 189—201 (1954).

Sia S_n lo spazio euclideo di dimensione n , sia $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un generico punto di S_n . Sia R un intervallo di S_n , sia dR la sua frontiera. Sia $\omega_{n-1} = \sum_k a_k(P) dx_1 dx_2 \cdots dx_{k-1} \cdots dx_{n-1}$ una forma differenziale esterna definita in un intervallo J di S_n contenente R . Estendendo al caso n -dimensionale un risultato stabilito recentemente da F. Cafiero (questo Zbl. **53**, 32) per il caso 2-dimensionale, l'A. stabilisce una condizione di validità della uguaglianza [di Green-Stokes di tipo generale] $(*) \int_{dR} \omega_{n-1} = \int_R d\omega_{n-1}$. Precisamente la validità di $(*)$ è stabilita sotto le seguenti ipotesi: (i) $a_k(P)$ sia limitata in J , (ii) per ogni $P^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in J$ risulti $\max_{P^k \rightarrow P^0} \frac{a_k(P) - a_k(P^0)}{P^k - P^0} < \infty$, essendo $P^k = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}, \dots, x_n) \in J$, (iii) $a_k(P)$ ammetta finiti i numeri derivati parziali rispetto a x_k in ogni punto di J , divi la funzione $F(P) = \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\partial a_k(P)}{\partial x_k}$ è sommabile in J .

J. Cecconi.

Niculescu, Lilly-Jeanne: Intégrales Perron-Stieltjes. *Acad. Republ. popul. Romine, Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz.* **6**, 755—768, russ. u. französ. Zusammenfassg., 768—769, 769—770 (1954) [Rumänisch].

L'A. donne une définition de l'intégrale de Perron-Stieltjes, en utilisant les quatre nombres dérivés par rapport à une fonction monotone croissante. L'on en tire une démonstration du théorème d'intégration par parties, en suivant la méthode McShane.

A. Froda.

Rosculeț, Marcel N.: Sur les dérivées partielles polydimensionnelles orientées. *Acad. Republ. popul. Rouine, Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz.* **6**, 811—817, russ. u. französ. Zusammenfassg., 817—818, 818 (1954) [Rumanisch].

Dans cette Note l'A. généralise les dérivées partielles polydimensionnelles orientées, considérant, au lieu de l'intervalle orienté k -dimensionnel ayant pour faces des variétés linéaires à $k-1$ dimensions, des intervalles orientés k -dimensionnels ayant pour faces des variétés quelconques. Ainsi, sur une surface $r = r(u, v)$, pour deux familles de courbes $(C_1) \Phi(u, v) = \lambda, (C_2) \Psi(u, v) = \mu$, la dérivée polydimensionnelle orientée, au sens de Bogel-Foranescu, d'une fonction $f(x_1, x_2, x_3) \in C^2$, relative au parallélogramme curviligne formé par deux courbes voisines appartenant à (C_1) et deux courbes voisines appartenant à (C_2) est

$$\varepsilon^2 f \wedge S^2(C_1, C_2) = [1/D] [E/G - F^2] (C) f + \text{grad } f \cdot C r, \quad D = D(\Phi, \Psi)/D(u, v),$$

où C est l'opérateur $(\Phi'_u \wedge \varepsilon u - \Psi'_v \wedge \varepsilon v) (\Psi'_u \wedge \varepsilon u - \Phi'_v \wedge \varepsilon v)$. On étudie le cas où (C_1) et (C_2) sont les familles de courbes paramétriques.

S. Marcus.

Sion, Maurice: On the existence of functions having given partial derivatives on a curve. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 179—201 (1954).

Folgendes wird bewiesen: Sind $m \geq 0$ und $n \geq 2$ ganze Zahlen, so gibt es im n -dimensionalen euklidischen Raum E_n eine Menge P , die homöomorphes Bild des Intervalls $[0, 1]$ ist, und eine Funktion g mit stetigen partiellen Ableitungen $(n + m - 1)$ -ter Ordnung von der Eigenschaft, daß alle partiellen Ableitungen r -ter Ordnung von g für $m < r \leq n + m - 1$ auf P , für $1 \leq r \leq n + m - 1$ in einem Punkt von P verschwinden und doch g auf P keine Konstante ist. Die Kurve P wurde (für andere Zwecke) von H. Whitney (dies. Zbl. **13**, 58) konstruiert. Der Beweis beruht auf einem Erweiterungssatz von H. Whitney (dies. Zbl. **8**, 249) und auf einem sich ihm anschließenden Lemma, das hinreichende Bedingungen dafür gibt, daß eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen m -ter Ordnung in E_n existiert, die auf einer gegebenen Kurve gegebene partielle Ableitungen r -ter Ordnung für $1 \leq r \leq m$ hat. A. Császár.

Nikolskij, S. M.: Eigenschaften gewisser Klassen von Funktionen mehrerer Veränderlicher auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und ihre Anwendung bei Variationsaufgaben. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **5** Suppl. 61—70 (1954) [Russisch].

Verf. berichtet über seine Ergebnisse zur Theorie der Funktionen von mehreren (reellen) Variablen und ihre Anwendungen auf die Lösung von Randwertaufgaben der polyharmonischen Differentialgleichung mittels des (verallgemeinerten) Dirichlet-schen Prinzips (vgl. dies. Zbl. **52**, 287; **53**, 74). W. Thimm.

Marcus, S.: Les fonctions de Pompeiu. Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat. **5**, 413—417, russ. u. franz. Zusammenfassg. 417—418, 418—419 (1954) [Rumänisch].

La Note contient quelques remarques concernant les fonctions de D. Pompeiu, définies dans Math. Ann. **63**, 326—332 (1907). A. Froda.

Marcus, S.: La composition des fonctions à variation bornée. Acad. Republ. popul. Romine, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. **6**, 243—249, russ. u. franz. Zusammenfassg. 249, 250 (1954) [Rumänisch].

L'on étudie $\psi(x) = f[q(x)]$, où f, q sont à variation bornée. La Note présente quelques propriétés, obtenues en confrontant des résultats connus; en particulier, l'on étend des propositions de N. Bary et D. Menchoff, de 1928. A. Froda.

Anastassiadis, Jean: Sur la convergence des séries de fonctions absolument continues. Bull. Sci. math., II. Sér. **78**, 234—240 (1954).

Estendendo un classico teorema di Fubini (una serie convergente di funzioni monotone è quasi ovunque derivabile termine a termine) l'A. dimostra che se $f_n(x)$ è assolutamente continua su (a, b) e se convergono le serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n [V, \cdot]$, essendo la variazione totale di $f_n(x)$ su (a, b) allora la $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su (a, b) a una funzione assolutamente continua $f(x)$ e si ha quasi ovunque su (a, b) $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'(x)$. S. Faedo.

Darbo, Gabriele: Convergenza in variazione e convergenza in lunghezza. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII, **3**, 1—9 (1954).

Data una successione di funzioni $f_n(x)$, $a \leq x \leq b$, si dice che essa converge in lunghezza [in variazione] su (a, b) a una funzione $f(x)$ se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e inoltre la lunghezza della curva $y = f_n(x)$ [la variazione di $f_n(x)$ su (a, b)] converge alla lunghezza di $y = f(x)$ [alla variazione totale di $f(x)$ su (a, b)]. Si scrive rispettivamente $f_n(x) \xrightarrow{L} f(x)$ [$f_n(x) \xrightarrow{V} f(x)$]. È noto che la convergenza in lunghezza implica quella in variazione. L'A. dimostra che la $f_n(x) \xrightarrow{L} f(x)$ equivale a $f_n(x) + \lambda x \xrightarrow{V} f(x) + \lambda x$ per ogni λ reale. Se ne deduce una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione a variazione limitata sia anche assolutamente continua.

S. Faedo.

Gagliardo, Emilio: Un criterio di compattezza per insiemi di funzioni di due variabili. *Ricerche Mat.* **3**, 166—171 (1954).

Una successione di funzioni $\{f_n(x, y)\}$ definite in un campo C , converge μ_1^r -quasi uniformemente se, fissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un insieme I la cui proiezione sull'asse x abbia misura minore di ε , e tale che la successione converga uniformemente nell'insieme $C - I$. F. Cafiero aveva nel 1950 dato un criterio di compattezza rispetto a tale tipo di convergenza (questo Zbl. **38**, 208). Un criterio di compattezza, rispetto allo stesso tipo di convergenza, che risulta indipendente da quello di Cafiero, è studiato dall'A. in questa Nota. Non ne riportiamo l'enunciato, ma ne indichiamo soltanto una significativa applicazione, segnalata dall'A. Sia $\{u_n(x, y)\}$ una successione di funzioni, definite in un rettangolo R , assolutamente continue rispetto alle variabili separatamente e con derivate $\partial u_n / \partial y$ assolutamente continue rispetto ad y . Sotto ipotesi attenuate di equilimitatezza per le funzioni e per le derivate dette, si dimostra che la relazione:

$$\iint_R \left\{ \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right|^{1+\alpha} + \left| \frac{\partial u_n}{\partial y} \right|^{1+\alpha} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}^{1+\alpha} \right\} dx dy \leq B \quad (\alpha, B \text{ costanti, } > 0)$$

è sufficiente ad assicurare la compattezza rispetto alla convergenza μ_1^r -quasi uniforme per la successione delle derivate $\{\partial u_n / \partial y\}$, laddove la compattezza, rispetto ad un tipo di convergenza analogo, per la successione $\{u_n(x, y)\}$, discende da un risultato del censore (questo Zbl. **40**, 18).

G. Stampacchia.

Koksma, J. F.: Estimations de fonctions à l'aide d'intégrales de Lebesgue. *Bull. Soc. math. Belgique* **6**, 4—13 (1954).

Soit $\{u_\nu(x)\}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) une suite de fonctions à valeurs réelles, définies dans $a \leq x \leq b$ et appartenant à L^p ($p > 1$). Posons $F(M, N) = \sum_{\nu=M+1}^{M+N} u_\nu(x)$.

Soit $\eta(t) > 0$ ($t > 0$) une fonction décroissante telle que $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{\eta(N)}{N} < \infty$.

Soient C_1, C_2, C_3, β non-négatifs, $\alpha > 0, \gamma > 1$. Supposons que pour tout $M = 2^n - 1$ et $N = 2^k$ ($0 \leq k \leq n$) on ait

$$\int_a^b |F(M, N)|^p dx \leq C_1 N^\alpha G(M, N) + C_2 (M + N)^{p-\gamma} N^\gamma \eta(N),$$

où $\sum_{h=0}^{2^n-k} G(M + hN, N) \leq C_3 N^\beta G(M, N - 1)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha+\beta-p)} G(2^n - 1, 2^n) < \infty$.

Alors $F(0, N) = o(N)$ presque partout dans (a, b) . — Pour $C_1 = 0$ on obtient un théorème dû à Gal et Koksma (ce Zbl. **41**, 24, Théorème 7; voir aussi Koksma et Salem, ce Zbl. **36**, 31, Lemma p. 89) qui à son tour est un cas particulier d'un théorème général de ces auteurs (loc. cit., Théorème 1; voir aussi Gal, ce Zbl. **42**, 60). La démonstration donnée suit de très près celle de Koksma-Salem pour le cas spécial.

— Comme application l'auteur démontre le théorème suivant: Soit $g(t) \in L^2$ pour $0 \leq t \leq 1$, périodique de période 1 et supposons que les coefficients de sa série de Fourier $g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t}$ vérifient $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{1/2} \sum_{d=k}^{\infty} d^{-1} < \infty$. Alors $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x/n) \rightarrow 0$.

$\int_0^1 g(t) dt$ pour presque tout x (cf. Koksma-Salem, loc. cit. et Koksma, ce Zbl. **46**, 48).

J. Horváth.

Bögel, Karl: Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. *Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau* **1** (1954/55), 5—8 (1954).

Die reelle Funktion $f(x)$ sei stetig im offenen (bzw. abgeschlossenen) Intervall $J = (a, b)$ (bzw. $J = [a, b]$); ferner sei der einfache Bogen B in der x, y -Ebene das Bild von $y = f(x)$. Es ist dann B (wie aus einem allgemeinen Satz folgt, vgl.

Ref., dies. Zbl. 1, 172) abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen Strecken, Konvexbogen und Bogen B_∞ , wobei jeder Teilbogen eines B_∞ die Ordnung Unendlich (bezüglich des Systems aller Geraden der Ebene) besitzt. In vorliegender (keine Beweise enthaltender) Mitteilung wird (1) eine Aufklärung der Struktur solcher B_∞ und im Zusammenhang damit (2) eine einheitliche Konstruktion angegeben, durch die man sämtliche (stetigen) f erhält und darunter insbesondere nirgends differenzierbare. Von den Ergebnissen zu (1) seien hier erwähnt: Unter einem Hauptpunkt versteht Verf. jedes $x_0 \in J$, zu dem eine Umgebung U und eine lineare Funktion $l(x)$ mit $l(x_0) = f(x_0)$ gehört derart, daß entweder $f(x) < l(x)$ für jedes $x \in U - (x_0)$ links (bzw. rechts) von x_0 und $f(x) \leq l(x)$ für jedes $x \in U - (x_0)$ rechts (bzw. links) von x_0 (konkaver Hauptpunkt) oder daß links (bzw. rechts) $f(x) > l(x)$ und rechts (bzw. links) $f(x) \geq l(x)$ (konvexer Hauptpunkt); ist f stetig in J , so gelten a und b als (weder konkave noch konvexe) Hauptpunkte. Ist f linear in einer Umgebung von x_0 , so heißt x_0 Linearpunkt. Alle übrigen x_0 heißen Restpunkte. Es sei nun $H^-(J)$ bzw. $H^+(J)$ bzw. $L(J)$ bzw. $R(J)$ die Menge der konkaven bzw. konvexen Haupt- bzw. der Linear- bzw. der Restpunkte in J ; und entsprechend für J . Dann gilt: $L(J)$ ist offen; ferner ist $R(J) \subset \overline{H^-(J)} \cap \overline{H^+(J)}$, wobei \tilde{M} die Menge der Häufungspunkte von M bezeichnet. Ist f stetig in J , so ist $(a) \cup (b) \cup H^-(J) \cup H^+(J)$ ein F_σ in J und $R(J)$ ein G_δ in J . Entspricht dem (Teil-) Intervall J' ein B_∞ , so sind $H^-(J')$ und $H^+(J')$ beide in J' überall dicht und von erster Kategorie, ferner ist $R(J')$ Residualmenge und $L(J')$ ist leer. — Bezüglich der Konstruktion sei auf die Mitteilung selbst verwiesen, sowie auf eine, vom Verf. angekündigte, ausführliche Darstellung, in der die Konstruktion noch vereinfacht werden soll.

Otto Haupt.

Temple, W. B.: Stieltjes integral representation of convex functions. Duke math. J. 21, 527—531 (1954).

Für Funktionen $f(x)$, die in $\langle 0, 1 \rangle$ stetig und konvex sind, haben W. Blaschke und G. Pick eine Darstellung durch Stieltjes-Integrale angegeben [Math. Ann. 77, 277—300 (1916)]. Verf. erhält hier ein ähnliches Ergebnis mit Hilfe der Bernsteinschen Polynome $P_n(x; f) = \sum \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right)$ ($i = 0, 1, \dots, n$); es läßt sich so auch auf stetige Funktionen $f(x)$ ausdehnen, die von einer höheren Ordnung $k (\geq 2)$ konvex sind, d. h. für welche $k f(x) - \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k}{m} f(x+m\delta)$ nichtnegativ ist für alle x, δ mit $a \leq x \leq x+k\delta \leq b$, $a < 0$, $1 < b$. Es ergibt sich $f(x) = p(x) - \int_0^1 G_k(x, t) dg(t)$, wo die Belegungsfunktion $g(t)$ nicht abnimmt und $p(x)$ ein Polynom höchstens vom Grade $k-1$ ist, dessen Werte bei 0 und 1 und dessen Ableitungen bei 0 — im Falle $k \geq 2$ — bis zur Ordnung $k-2$ mit denen von f übereinstimmen.

U. T. Bödewadt.

Sternberg, Shlomo: Legendre transformations of curves. Proc. Amer. math. Soc. 5, 942—945 (1954).

Im Intervall $\langle a, b \rangle$ sei $y(x)$ eine beschränkte konvexe Funktion. j sei die Menge der x mit $y'_-(x) \neq y'_+(x)$, k die Menge der abgeschlossenen Hüllen der x -Intervalle, in denen $y'_+(x)$ oder $y'_-(x)$ konstant ist. Ferner sei K die Menge der abgeschlossenen Hüllen der y' -Intervalle mit $y'_-(x) < y' < y'_+(x)$ für gewisse $x \in j$, J die Menge der y' mit $y' = y'(x)$ für gewisse $x \in k$. Schließlich sei $A = y'_+(a)$, $B = y'_-(b)$. Dann leistet $X = y'(x)$ eine eindeutige, stetige, monotone Abbildung von $\langle a, b \rangle - (j \cup k)$ auf $\langle A, B \rangle - (J \cup K)$. Wenn $T(X)$ die Menge der x ist, für die $y'_-(x) < X$ ist, so sei $\bar{x}(X) = \sup T(X)$. Für die durch $Y(X) = \bar{x}(X) X - y(\bar{x}(X))$ definierte Funktion gilt der Satz [$Y(X)$ sei ihre Ableitung

nach X]: Y_- und Y_+ existieren überall und sind nicht abnehmend mit $Y_- \leq Y_+$ und $Y_+(X) = \bar{x}(X)$; es ist $Y_- = Y_+$ nur auf J , Y_+ nur auf Intervallen von K konstant. Anwendungen: 1. äußere Parallelkurven einer konvexen Kurve sind von der Klasse C^1 ; 2. die Clairautsche Differentialgleichung $y = x y' - f(y')$ hat bei streng konvexer Funktion f eine nicht-lineare Lösung; siehe E. Kamke, Math. Z. 27, 623—639 (1928).

W. Süss.

Allgemeine Reihenlehre:

Zeller, Karl: Matrixtransformationen von Folgenräumen. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 12, 340—346 (1954).

Ein BK -Raum ist ein Banachraum, dessen Elemente $s = \{s_k\}$ Zahlenfolgen sind und in dem die Abbildungen $s \rightarrow s_k$ stetig sind. Sind \mathfrak{E} und \mathfrak{F} zwei BK -Räume mit Abschnittskonvergenz (d. h. $\{s_0, \dots, s_n, 0, 0, \dots\} \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$), so bildet eine Matrixtransformation $A s = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \right|$ genau dann \mathfrak{E} in \mathfrak{F} ab, wenn

(*) $\|A s\|_{\mathfrak{F}} \leq \varrho \|s\|_{\mathfrak{E}}$ gilt für ein ϱ und alle abbrechenden Folgen s . In den Fällen $\mathfrak{E} = \text{Nullfolgen}$ und $\mathfrak{E} = \text{absolut konvergente Reihen}$ ergeben sich für spezielle s aus (*) die Bedingungen $\{\|a_k\|_{\mathfrak{F}} = a^k\}$, $\|a^k\|_{\mathfrak{F}} \leq \varrho$ und $\left| \sum_{k \in K} a_k \right|_{\mathfrak{F}} \leq \varrho$ (K eine beliebige endliche Teilmenge der nichtnegativen ganzen Zahlen) und diese Bedingungen

sind mit (*) gleichwertig. Spezielle Wahl von \mathfrak{F} führt auf bekannte Sätze u. a. von Toeplitz, Mears, Knopp-Lorentz.

A. Peyerimhoff.

Meyer-König, W. und K. Zeller: Über das Taylorsche Summierungsverfahren. Math. Z. 60, 348—352 (1954).

Die Arbeit befaßt sich mit einigen Eigenschaften der \mathfrak{T}_α -, \mathfrak{T}'_α - und S_α -Verfahren (vgl. Meyer-König, dies. Zbl. 41, 184; 47, 102). Eine \mathfrak{T}_α -summierbare Reihe $\sum a_k$ heißt regulär oder singular summierbar, je nachdem der Punkt $z = \alpha$ ein regulärer oder singularer Punkt der Funktion $f(z) = \sum a_k z^k$ ist. — Es wird gezeigt, daß jede konvergente Reihe $\sum b_n$ als \mathfrak{T}_α -, S_α - (\mathfrak{T}'_α -) Transformation einer Reihe $\sum a_k$ (Funktion) aufgefaßt werden kann, und diese Darstellung ist unendlich vieldeutig. Es gibt singular \mathfrak{T}_α -summierbare Reihen, die nicht regulär summierbar sind und für $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ist Indexverschiebung bei singularer \mathfrak{T}_α -Summierbarkeit nur in einer Richtung möglich (während in allen übrigen Fällen der \mathfrak{T}_α -Summierbarkeit beiderseitige Indexverschiebung möglich ist).

A. Peyerimhoff.

Kanno, Kōsi: On the Riemann-summability. Tôhoku math. J., II. Ser. 6, 155—161 (1954).

S. Verblunsky [Proc. Cambridge philos. Soc. 26, 34—42 (1930)] proved that if a series is summable $(C, p - \delta)$ to s , where $\delta > 0$, then it is summable $(R, p + 1)$ to s . Adding Tauberian condition, the author proves that if $s_n^\beta = o(n^\gamma)$ $\beta > \gamma > 0$, $\gamma + 1 > p$ [this should be replaced by $(\beta + 1)(\beta + 1 - \gamma) > p$], where s_n^β are (C, β) -sums of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, and $\sum_{n=n}^{\infty} |a_n|^\gamma = O(n^{-(1-\delta)})$ for $\delta = p(\beta - \gamma)/(\beta + 1 - p)$, $0 < \delta < 1$, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is (R, p) -summable to zero. This theorem is a generalization of reviewer's theorem (this Zbl. 53, 37). Proof is established using a modification of proof of Cesàro summability theorem of the Fourier series.

G. Sunouchi.

Agnew, Ralph Palmer: Abel and Riesz transforms of general Tauberian series. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 3, 293—336 (1954).

Verf. betrachtet die Abelsche und Riesz-Transformation $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k a_k$ und

$R^{(r)}(n) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^r a_k$ unendlicher Reihen $\sum a_n$ mit komplexen Gliedern a_n .

welche der allgemeinen Tauber-Bedingung (T) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n| < \infty$ genügen, wobei x_n

den Kroneckerschen Ausdruck $x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k u_k$ ($n = 0, 1, \dots$) und $r \geq 0$ eine

nicht notwendig ganze reelle Zahl bedeutet. Insbesondere löst Verf. das Problem, für jedes r die beste Konstante H_r mit folgender Eigenschaft zu bestimmen. Es gibt eine Funktion $t(x)$ mit $0 < t(x) < 1$ für $x > 0$ und $t(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$ und eine Funktion $n(x)$, die für jedes $x > 0$ positive ganzzahlige Werte annimmt und $\rightarrow \infty$ strebt für $x \rightarrow \infty$ derart, daß für jede Reihe $\sum u_n$ mit der Tauber-Bedingung (T)

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow \infty} |A(t) - R^{(r)}(n)| \leq H_r \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n|. \quad \text{Gilt für die Funktion } n(t) \text{ die Beziehung}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} (1-t) n(t) = q < \infty, \text{ so folgt } \overline{\lim}_{t \rightarrow 1} |A(t) - R^{(r)}(n(t))| \leq G_r(q) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n| \text{ mit}$$

$$G_r(\lambda) = \delta(r) + e^{-\lambda} + \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_0^1 \left| x \right| - \frac{d}{dx} \left\{ e^{-\lambda x} - \frac{(1-x)^r}{x} \right\} dx \quad \text{mit } \delta(0) = 1,$$

$$\delta(r) = 0 \quad \text{für } r > 0. \quad \text{Gilt andererseits für die Folge } t_n \text{ die Beziehung}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-t_n) n = q < \infty, \text{ so folgt wieder } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A(t_n) - R^{(r)}(n)| \leq G_r(q) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n|.$$

In beiden Fällen ist $G_r(q)$ die beste Konstante, deren absolutes Minimum $G_r(q_r)$ die beste Konstante H_r liefert. Dem ins einzelne gehenden Studium von $G_r(\lambda)$ und $G_r(q_r)$ sind umfangreiche Untersuchungen gewidmet. Ferner werden kontinuierliche Riesz-Transformationen betrachtet. Es zeigt sich, daß der Übergang von der ganzzahligen Variablen n zu einer nicht notwendig ganzzahligen, nichtnegativen reellen Variablen ω für Reihen, die der Bedingung (T) genügen, nicht erheblich ist. Für Reihen mit beschränkten Teilsummen gab Verf. die genauen Abschätzungen der Differenz $|A(t) - R^{(r)}(n)|$ in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 55, 290).

V. Garten.

Borwein, D.: Note on summability factors. J. London math. Soc. 29, 198—206 (1954).

Der Hauptgegenstand der Note ist der Beweis des folgenden Satzes: Es seien alle auftretenden Funktionen reell und es sei $\lambda > 0$. Notwendig und hinreichend dafür, daß aus der $[C, \lambda]$ -Summierbarkeit von $\int_1^{\infty} x(t) dt$ die (C, λ) -Summierbarkeit von $\int_1^{\infty} x(t) k(t) dt$ folgt, ist die Existenz eines $c \geq 1$ derart, daß (1) $k(t)$ in $(1, c)$

meßbar und wesentlich beschränkt ist; (2) $\frac{k(t)}{t} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_t^{\infty} (u-t)^{\lambda-1} h(u) du$ fast überall in (c, ∞) gilt, wobei $u^{\lambda-1} h(u)$ in (c, ∞) meßbar und wesentlich beschränkt ist. — Wie man nach W. L. C. Sargent (dies. Zbl. 49, 45) weiß, bleibt der Satz richtig, wenn $[C, \lambda]$ durch (C, λ) und gleichzeitig in (2) „wesentlich beschränkt“ durch „schwankungsbeschränkt“ ersetzt wird. Für den notwendigen Teil dieser Aussage wird ein vereinfachter Beweis gegeben.

F. Lösch.

Borwein, D.: Integration by parts of Cesàro summable integrals. J. London math. Soc. 29, 276—292 (1954).

Für ganzes $k \geq 0$ werde unter Ω_1^k bzw. Ω_2^k die Klasse der Funktionen $\Phi(x)$ verstanden, die in jedem endlichen Intervall aus $[1, \infty)$ eine absolut stetige k -te Ableitung haben und die für ein Paar von Konstanten m, M in $x \geq 1$ die folgenden Bedingungen (1) bzw. (2) erfüllen:

$$(1) \quad 0 < |\Phi(x)| < m, \quad \int_x^{\infty} t^k |\Phi^{(k+1)}(t)| dt < M |\Phi(x)|;$$

$$(2) \quad |\Phi(x)| \geq m > 0, \quad \int_1^x |\Phi'(t)| dt \leq M |\Phi(x)|, \quad \int_1^x t^k |\Phi^{(k+1)}(t)| dt \leq M |\Phi(x)|.$$

Weiter bezeichne $f(x)$ eine in jedem endlichen Intervall aus $(1, \infty)$ L -integrierbare Funktion und $f_1(x)$ ihr Integral $\int_1^x f(t) dt$. Im ersten Teil der Arbeit wird gezeigt: Es sei $k \geq \lambda \geq 1$ und es besitze $\int_1^\infty f(t) \Phi(t) dt$ die (C, λ) -Summe A .

(a) Ist dann $\Phi \in \Omega_1^k - \Omega_2^k$, so hat (*) $\int_1^\infty [f_1(t) - s] \Phi'(t) dt$ für jeden Wert s die $(C, \lambda - 1)$ -Summe $s \Phi(1) - A$. (b) Ist $\Phi \in \Omega_2^k - \Omega_1^k$, so gilt die vorige Aussage nur für $s = s_0$, wo s_0 die (C, λ) -Summe von $\int_1^\infty f(t) dt$ bedeutet; für andere Werte von s ist (*) divergent. (c) Ist $\Phi \in \Omega_1^k \cap \Omega_2^k$, so besitzt (*) für jeden Wert s die $(C, \lambda - 1)$ -Summe $(s_0 - s) \Phi(\infty) + s \Phi(1) - A$, wo s_0 wie in (b) erklärt ist. — Der zweite Teil der Arbeit befaßt sich mit der Notwendigkeit der Bedingungen, denen $\Phi(t)$ unterworfen wurde. Unter der Voraussetzung, daß alle Funktionen reell sind, daß $k > 0$ ganz ist und daß $\Phi(x)$ in jedem endlichen Intervall aus $[1, \infty)$ eine absolut stetige k -te Ableitung hat, wird gezeigt: Für jedes $\lambda = 1, 2, \dots, \dots, k$ folge aus der (C, λ) -Summierbarkeit von $\int_1^\infty f(t) \Phi(t) dt$ die $(C, \lambda - 1)$ -Beschränktheit von $\int_1^x [f_1(t) - s] \Phi'(t) dt$ in $(1, \infty)$ für irgendeinen Wert s . Ist dann

$0 < \Phi(x) < m$ bzw. $\Phi(x) > m > 0$ in $x > 1$ für eine Konstante m , so gilt $\Phi \in \Omega_1^k$ bzw. $\Phi \in \Omega_2^k$.
F. Lösch.

Čelidze, V. G.: Über die Summation von Doppelintegralen. Tiflissk. mat. Inst. Razmadze 20, 131—143 (1954) [Russisch].

$S(x, y)$ sei mindestens für hinreichend große x und y definiert. Wir schreiben $(\lambda, \gamma, \delta) \lim_{x, y \rightarrow \infty} S(x, y) = S$, wenn der Limes im Pringsheimschen Sinne existiert mit den Nebenbedingungen $\lambda^{-1} x^\lambda \leq y \leq \lambda x^{1/\delta}$ und $\gamma, \delta \leq 1, \gamma, \delta \geq 0, \lambda \geq 1$. $S(x, y)$ ($x, y \geq 0$) gehört zur Klasse $T_{\gamma, \delta}$, wenn für jedes $a > 0$ $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{S(t, y)}{y^\delta} = \omega(t)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x, u)}{x^\gamma} = \chi(u)$ fast überall und gleichmäßig in $[0, a]$ gelten, $\omega(t)$ und $\chi(u)$ in jedem endlichen Intervall integrierbar sind und $\int_0^x \omega(t) dt = o(1), x \rightarrow \infty$, bzw. $\int_0^y \chi(u) du = o(1), y \rightarrow \infty$. Sei $F(x, y) = \frac{1}{xy} \int_0^x \int_0^y S(u, v) du dv$. Falls

$F(x, y)$ einen $(\lambda, \gamma, \delta)$ -Limes besitzt, heißt dieser der $C_{\lambda, \delta}^\gamma$ -Limes von $S(x, y)$. — Wenn $S(x, y)$ zu einer Klasse $T_{\gamma, \delta}$ gehört, dann ist $\lim_{x, y \rightarrow \infty} S(x, y) \leq (\lambda, \gamma, \delta) \lim_{x, y \rightarrow \infty} F(x, y) \leq \overline{\lim}_{x, y \rightarrow \infty} S(x, y)$. Die $C_{\lambda, \delta}^\gamma$ -Mittel sind „regulär“: Wenn nämlich

$\lim_{x, y \rightarrow \infty} S(x, y) = \lim_{x, y \rightarrow \infty} \int_0^x \int_0^y f(u, v) du dv$ existiert [d. h. $f(x, y)$ Cauchy-Lebesgue-integrierbar ist] und $S(x, y)$ zu einer Klasse $T_{\gamma, \delta}$ gehört, dann ist $S(x, y)$ zum selben Limes $C_{\lambda, \delta}^\gamma$ summierbar. Analoge Sätze lassen sich auch für eine entsprechende Definition des Abelschen Verfahrens beweisen. Vgl. Magnaradze, dies. Zbl. 54, 47. Zahlreiche Druckfehler erschweren die Lektüre.
L. Schmetterer.

Wheeler, Albert D.: On the summation of infinite series in closed form. J. appl. Phys. 25, 113—118 (1954).

Die Arbeit behandelt rein formal die Summation gewisser Reihen $\sum_{n=0}^\infty f(n)$

für Funktionen $f(s)$, die Laplacetransformierte sind: $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$. Durch Vertauschung von Summation und Integration ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nt} F(t) dt = \int_0^{\infty} F(t) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} dt = \int_0^{\infty} \frac{F(t)}{1 - e^{-t}} dt.$$

Unter Verwendung einer Tafel der L-Transformation und einer Integraltafel kann Verf. die Summe gewisser Reihen angeben. Untersuchungen über die Zulässigkeit der Vertauschbarkeit von Summen- und Integralzeichen werden nicht angestellt. [Ähnlich summierte G. G. Macfarlane (dies. Zbl. 32, 76) mit Hilfe der Mellintransformation gewisse Reihen.] Weiter werden durch wiederholte Differentiation und Integration von Reihenentwicklungen gegebener Funktionen nach einem in der Funktion enthaltenen Parameter die Summen gewisser Reihen berechnet.

J. Heinhold.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Golaž, S.: Contribution à la formule simpsonienne de quadrature approchée. Ann. Polon. math. 1, 166—175 (1954).

Verf. stellt das Integral einer Funktion dar durch eine Mittelwertformel

$$P(h) = \int_a^{a+h} f(x) dx, \quad \bar{P}(h) = h \left[\lambda_0 f(a) + \lambda_1 f\left(a + \frac{h}{2}\right) + \lambda_2 f(a+h) \right].$$

Er setzt dann an (1) $f(a+h) = f(a) + a_p h^p + a_q h^q + a_r h^r + g(h)$, wo $a_p a_q a_r \neq 0$, $1 \leq p < q < r$. Für die Bedingung, daß die Mittelwertformel das Integral mindestens in der Ordnung $r+2$ approximiert, erhält er dann die Beziehung $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ und drei weitere, aus denen er herleitet, daß $p=1$, $q=2$, $r=3$ sein muß, während die λ_i die Simpson-Werte annehmen. Alsdann nimmt er in der Formel (1) noch ein Glied hinzu:

$f(a+h) = f(a) + a_p h^p + a_q h^q + a_r h^r + a_s h^s + g(h)$, $a_p a_q a_r a_s \neq 0$, $1 \leq p < q < r < s$, und zeigt, daß es dann drei Fälle gibt: $p=1, q=2$; $p=1, q=3$; $p=2, q=3$, wofür man Lösungen erhält. Nur in einem Falle sind die entsprechenden Werte von λ_i die Werte der Simpsonformel.

E. M. Bruins.

Golaž, S. et C. Olech: Contribution à la théorie de la formule simpsonienne des quadratures approchées. Ann. Polon. math. 1, 176—183 (1954).

Verff. betrachten den Ausdruck

$$f(a+h) = f(a) + a_p h^p + a_q h^q + a_r h^r + a_s h^s + g(h)$$

und approximieren das Integral

$$P(h) = \int_a^{a+h} f(x) dx$$

mit der Mittelwertformel

$$P(h) = h [\lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(a + \theta h) + \lambda_2 f(a+h)].$$

Um eine maximale Ordnung der Annäherung zu erhalten, müßte man die Lösung eines Systems von Gleichungen finden. Zwischen λ_i besteht zuerst die Beziehung

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (\text{falls } f(a) \neq 0).$$

Weitere Gleichungen enthalten nur $p, q, r, s, \lambda_1, \lambda_2, \theta$ und alsdann λ_1, λ_2 nur linear. Falls θ vorgegeben ist, sind λ_1 und λ_2 eindeutig bestimmt durch p, q . Falls p, q, r vorgegeben sind, führt Eliminieren von λ_1 und λ_2 auf eine Gleichung für θ . Es wird gezeigt, daß diese Gleichung nur eine Lösung für θ geben kann. Zum Schlusse zeigen Verff., daß die beiden Gleichungen, die man bei vorgegebenen p, q, r, s , für θ erhält, immer inkompatibel sind.

E. M. Bruins.

Quilghini, D.: Sull'approssimazione delle funzioni continue di due variabili mediante polinomi di interpolazione algebrici e trigonometrici. *Rivista Mat. Univ. Parma* **5**, 313—324 (1954).

Data una funzione $f(x, y)$ continua nel quadrato $Q: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, l'A. nella prima parte del lavoro costruisce una successione $H_{n,m}(x, y)$ di polinomi di grado $2n-1$ in x e di grado $2m-1$ in y , uguali ad $f(x, y)$ quando x e y sono gli zeri dei polinomi di Tchebycheff di prima specie e con le derivate prime ivi nulle, e dimostra che per $m, n \rightarrow \infty$, il polinomio $H_{n,m}(x, y)$ converge uniformemente ad $f(x, y)$ in Q . Nella seconda parte del lavoro l'A. costruisce dei polinomi trigonometrici interpolanti una funzione continua $f(x, y)$ definita per $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$, i quali godono una proprietà analoga dei polinomi $H_{n,m}(x, y)$ e generalizzano, nel caso di due variabili, i polinomi di Jackson. Il caso delle funzioni $f(x, y)$ lipschitziane di ordine α è particolarmente approfondito.

G. Sansone.

Littlewood, J. E.: On a theorem of Paley. *J. London math. Soc.* **29**, 387—395 (1954).

Die erste Ungleichung von Paley (A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, S. 202, u. 4, 1) wird auf folgende nichtlineare Ungleichung zurückgeführt: Es sei $q \geq 2$, $\{q_n\}$ sei ein vollständiges System orthogonaler und normierter Funktionen in $[0, 1]$ mit $|\varphi_n| \leq M$, $f \sim \sum c_n \varphi_n$, dann gilt

$$M^{-1+2/q} \left(\int_0^1 |f(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 C_n^{q-2} \quad \text{mit} \quad C_n = \sum_{m=1}^n |c_m|.$$

Für $q = 2$ ist diese Ungleichung trivial, für $q \geq 3$ ist ein ausführlicher Beweis angegeben. Die Behandlung des Falles $2 < q < 3$ wird nur sehr oberflächlich angedeutet. Die Arbeit enthält eine Reihe interessanter methodischer Bemerkungen.

G. Freud.

Freud, G.: Über orthogonale Polynome. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **5**, 291—298 (1954).

Verf. verallgemeinert vorherige Ergebnisse (dies. Zbl. **47**, 304, 305). Ist für genügend kleines h $[W(\Theta+h) - W(\Theta)]/W(\Theta) \in L$ ($W(\Theta) = \omega(\cos \Theta) \sin \Theta$) und

$$\int_0^\pi \frac{|W(\Theta+h) - W(\Theta)|}{W(\Theta)} d\Theta = O\left(\log^{-\alpha} \frac{1}{|h|}\right) \quad (\alpha > 1), \quad \text{so gilt f. ü.} \quad \sum_{r=0}^{n-1} [p_r(x)]^2 = O(n),$$

wo $\{p_r(x)\}$ die zu der Gewichtsfunktion $\omega(x)$ gehörenden orthonormierten Polynome sind. Sind die obigen Bedingungen erfüllt, so ist die Entwicklung nach diesen Orthogonalpolynomen jeder Funktion $f \in L^2(\omega)$ f. ü. stark $(C, 1)$ summierbar.

K. Tandori.

Atkinson, F. V.: On lacunary and other orthogonal polynomials. *Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A* **10**, 95—110 (1954).

L'A. prende in esame una nuova classe di polinomi ortogonali $\{q_n(x)\}$ definita con la seguente legge: (i) $q_0(x)$ è una costante positiva; (ii) per $x \geq 1$ è $q_n(x) = \sum_{r=0}^{n+1} c_r x^r$

con $c_{n+1} > 0$ e $c_1 = 0$; (iii) $\sigma(x)$ è una funzione non decrescente in (a, b) (finito od infinito), tale che $\int_0^\infty x^n d\sigma(x) < \infty$ per $n = 0, 1, \dots$, e $\int_a^b q_m(x) q_n(x) d\sigma(x) = 0$

per $m \neq n$, $\int_a^b q_n^2(x) d\sigma(x) = 1$. Poiché i polinomi $q_n(x)$ sono tutti privi del termine

in x , l'A. chiama la successione lacunare, e per essa studia i problemi classici della distribuzione degli zeri e delle cosiddette quadrature meccaniche. I casi $d\sigma(x) = dx$, $a = 0, b = 1$; $d\sigma(x) = e^{-x} dx$, $a = 0, b = \infty$, sono considerati in particolare. L'A. accenna infine ad una definizione di una successione lacunare più generale nella quale manchino cioè i termini in x, x^2, \dots, x^k (k fisso), e dà un cenno dei problemi connessi a tali successioni.

G. Sansone.

Green, H. S. and H. Messel: On the expansion of functions in terms of their moments. *Quart. appl. Math.* **11**, 403—409 (1954).

Meňšov, D. E.: On convergence in measure of trigonometric series. *Amer. math. Soc. Translat. Nr.* **105**, 76 p. (1954) (= *Trudy mat. Inst. Steklov* **32**, 97 p. (1950)).

Referat des Originals in dies. *Zbl.* **39**, 70.

Hirokawa, Hiroshi: Uniform convergence of some trigonometrical series. *Tôhoku math. J., II. Ser.* **6**, 162—173 (1954).

Let $\sum_{v=n}^{\infty} |\Delta a_v| = O(n^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$ and $t_n^\beta = o(n^{\beta\alpha})$, ($\beta > \alpha$), where t_n^β are the (C, β) -sums of the sequence $\{n a_n\}$. Then the author shows that the two series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n x$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x$ converge uniformly for $0 \leq x \leq \pi$. This is related to results of O. Szasz [*Bull. Amer. math. Soc.* **50**, 856—867 (1944)] and the reviewer (this *Zbl.* **53**, 37). The other theorems are easy corollaries of this result. Theorem 5 is valid without the condition $\sum_{v=n}^{\infty} |\Delta a_v| = O(n^{-\alpha})$. This fact will be remarked in the forthcoming *Tôhoku math. J.*, by the same author.

G. Sunouchi.

Satô, Masako: Uniform convergence of Fourier series. III. *Proc. Japan Acad.* **30**, 809—813 (1954).

(Teil II, dies. *Zbl.* **56**, 287.) Im Anschluß an von S. Izumi und G. Sunouchi (dies. *Zbl.* **44**, 289) herrührende Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz einer Fourierreihe beweist Verf. folgende Sätze: Wenn für $0 < \alpha < 1$ die Beziehung $f(t) - f(t') = o((\log 1/|t - t'|)^{-\alpha})$ ($t, t' \rightarrow 0$) gilt und die n -ten Fourierkoeffizienten von $f(t)$ von der Größenordnung $O(n^{-1} \exp((\log n)^\alpha))$ sind, oder wenn für die Beziehung $f(t) - f(t') = o((\log \log 1/|t - t'|)^{-\alpha})$ ($t, t' \rightarrow 0$) gilt und die n -ten Fourierkoeffizienten von $f(t)$ von der Größenordnung $O(n^{-1} \exp((\log \log n)^\alpha))$ sind, konvergiert die Fourierreihe von $f(t)$ gleichmäßig bei $t = 0$. Bedeuten $\varphi(n) = O(n)$, $\psi(n) = \log(n \theta(n)/\varphi(n))$ und $\theta(n)$ monoton gegen ∞ wachsende

Funktionen und ist $f(x)$ eine Funktion der Klasse $\varphi(n)$, d. h. gilt $\int_a^b f(x+t) \cos n t dt = O(1/\varphi(n))$ gleichmäßig für alle x, n, a, b mit $b - a = 2\pi$, so konvergiert die Fourierreihe von $f(t)$ bei $t = 0$ gleichmäßig, wenn $f(t) - f(t') = o(\psi(1/|t - t'|))$, ($t, t' \rightarrow 0$), ist.

V. Garten.

Kinukawa, Masakiti: On the Cesàro summability of Fourier series. *Tôhoku math. J., II. Ser.* **6**, 109—120 (1954).

The author proves five theorems concerning Cesàro summability of the Fourier series. A typical result is as follows. If $\int_0^t q(u) du = o(t^\varepsilon)$ and $\int_0^t |d\{u^q q(u)\}| = O(t)$, where $\varepsilon > 1$, $-1 < q < 1$, and $\varepsilon = 1 - 2q(1 - 1)/(1 + q)$, then the Fourier series of $\varphi(t)$ is (C, q) summable at the point $t = 0$. This is a generalization of reviewer's result (this *Zbl.* **44**, 72). Theorems are proved using the method of J. J. Gergen [*Quart. J. Math., Oxford Ser. I*, 252—275 (1930)].

G. Sunouchi.

Izumi, Shin-ichi and Masako Sato: Integrability of trigonometrical series. I. *Tôhoku math. J., II. Ser.* **6**, 258—263 (1954).

It is well known that absolute integrability of $x^{-1} f(x)$ is equivalent to absolute convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\alpha}$ when $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x$ or $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n x$, and either $f(x)$ or $\{a_n\}$ is assumed monotonic. The authors replace absolute convergence and absolute integrability by conditional convergence and Cauchy integrability respectively, wholly or partially. Typical results are as follows. Let $f(x)$ be

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ or $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ and $0 < x < 1$. Then absolute integrability of $x^{\alpha-1} f(x)$ implies convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\alpha}$, and absolute convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\alpha}$ implies Cauchy integrability of $x^{\alpha-1} f(x)$. Theorems connecting conditional convergence and Cauchy integrability are somewhat complicated. (G. Sunouchi.

Shapiro, Victor L.: Summability and uniqueness of double trigonometric integrals. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 322–339 (1954).

This paper presents a theory of uniqueness for double trigonometric integrals modeled on Zygmund's theory for single integrals (this Zbl. **29**, 119) and Bochner's circular summability. Let q be a complex-valued additive set function defined for all bounded Borel sets in the u -plane E_2 , let $C(p, r)$ denote the closed disc of radius r and center p , $C_R = C(0, R)$, and $|u|$ the Euclidean norm. I. Let $T = \int_{E_2} e^{ixu} dq(u)$ be a double trigonometric integral with $\int_{C(p, 1)} |dq(u)| = o(|p|^\alpha)$ as $|p| \rightarrow -\infty$, for some $\alpha > -1$. Let D^* be any closed domain contained in the interior of the fundamental square. Then there exists a double trigonometric series $S = \sum a_m e^{imx}$ with coefficients $a_m = o(|m|^\alpha)$ such that $\int_{C_R} e^{ixu} dq(u) - \sum_{|m| \leq R} a_m e^{imx}$ is summable $(C, \alpha + 1)$ to zero, uniformly for x in D^* . This and other statements generalize a previous one for $\alpha = -1$ of L. D. Berkovitz [ibid. **73**, 845–372 (1952)]. II. (Uniqueness theorem) Let $c(u)$ be any L^2 -integrable function in any bounded domain and suppose $c(u) = o(|u|^{-\epsilon})$ as $|u| \rightarrow \infty$, for some $\epsilon > 0$. Suppose that the double trigonometrical integral $\int_{E_2} e^{ixu} c(u) du$ be circularly summable $(C, 1)$ to zero for all values of x . Then $c(u)$ is equal to zero almost everywhere. For other results we refer to the paper. L. Cesari.

Spezielle Funktionen:

Pol, B. van der: Note on the gamma function. Canadian J. Math. **6**, 18–22 (1954).

Verf. zeigt, daß sich den bekannten Darstellungen der Gammafunktion die folgende hinzufügen läßt:

$$\Gamma(z) = \Gamma(z+1) = z! e^{-z} \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e_{k+z}}{e_k} \right) \text{ mit } e_z = \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z, \quad e_0 = 1.$$

Diese Darstellung, in der für die einzelnen Faktoren die Hauptwerte zu nehmen sind, gilt in der längs der negativen reellen Achse aufgeschlitzten Ebene. Ihre Herleitung erfolgt aus der Weierstraßschen Produktdarstellung der Gammafunktion. In einer anschließenden Diskussion der Formel wird sie noch etwas modifiziert und insbesondere mit der Stirlingschen Formel verglichen. F. Lösch.

Watanabe, Yoshikatsu and Mikio Nakamura: On the modified cosine functions. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. **5**, 39–48 (1954).

In einer früheren Arbeit [J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. **4**, 39–46 (1954)] haben die Verff. die partielle Differentialgleichung $u_{tt} + 2a u_{\theta\theta} + u = 0$ (a konstant) betrachtet und stießen dabei auf die gewöhnliche Differentialgleichung (1) $d^2 y/dz^2 - 2(n/z) dy/dz + (1 + 2n/z^2) y = 0$. Eine partikuläre Lösung von (1) ist für $n \geq 0$, ganz, durch $V_n(z) = \left[\frac{d^n}{dw^n} (\cos \sqrt{1 + 2wz}) \right]_{w=0}$ gegeben. (Modifizierte Kosinusfunktion in der Terminologie der Verff.) Hier wird (1) auch für beliebige reelle Werte des Parameters n untersucht und von Ausnahmefällen abgesehen die Reihenentwicklung der entsprechenden partikulären Lösung $V_n(z)$ und die all-

gemeine Lösung angegeben. Die weitere Untersuchung von $V_n(z)$ zeigt starke Analogien zu den Besselfunktionen, wie auf Grund der Gestalt von (1) zu erwarten ist. Wir erwähnen das Analogon zur Lommelschen Integraldarstellung und die Entwicklung einer integrierbaren Funktion nach $V_n(\lambda_n z)$, wobei $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ die positiven reellen Wurzeln von $V_n(z)$ bezeichnen.

L. Schmetterer.

Latyševa, K. Ja.: Zu einem Resultat von N. S. Košljakov. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **18**, 207—221 (1954) [Russisch].

Es werden Bedingungen dafür angegeben, daß die Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^n (p_i + s_i x) x^{n-i} \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} = 0$$

durch ein Polynom gelöst wird. Die Frage wurde neuerlich von Košljakov im Zusammenhang mit Untersuchungen über Lamésche Differentialgleichungen behauptet (dies. Zbl. **47**, 309).

A. Schmidt.

Friedman, Bernard and Joy Russek: Addition theorems for spherical waves. *Quart. appl. Math.* **12**, 13—23 (1954).

Aus den bekannten Integraldarstellungen für $j_n(kR) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$, $h_n^{(l)}(kR) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$, $l = 1, 2$, werden für diese Ausdrücke durch Koordinatentransformation (Koordinaten des neuen Anfangspunktes $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$, neue Koordinaten r', ϑ', φ') Entwicklungen nach den Produkten

$$j_p(kr_0) j_v(kr) P_p^{\mu+m}(\cos \vartheta_0) P_v^{\mu}(\cos \vartheta') e^{i(m+\mu)\varphi_0 - i\mu\varphi'}$$

($p = v + n$, $v + n - 2, \dots, v - n$; μ von $-v$ bis $+v$, v von 0 bis ∞) gegeben.

O. Volk.

Bloch, E. L.: Über eine Entwicklung der Besselschen Funktionen in eine Reihe nach Legendreschen Funktionen. *Priklad. Mat. Mech.* **18**, 745—748 (1954) [Russisch].
Ableitung der Beziehung

$$\sum_{r=0}^{\infty} i^{m+r} P_{m+r}^m(x) = e^{ix} J_m(i \sqrt{1-x^2})$$

zwischen den Besselschen und den zugeordneten Legendreschen Funktionen für ganzzahlige m . Die Konvergenz wird nicht untersucht. Durch Spezialisierung der Parameter und Variablen sowie durch Integration nach x entstehen weitere Formeln.

W. Hahn.

Sarkar, G. K.: On integral representations of the generalised k -function of Bateman and its connection with Legendre and parabolic cylinder functions. *Bull. Calcutta math. Soc.* **46**, 239—244 (1954).

Aus Integraldarstellungen der Whittakerschen Funktionen $W_{k,m}(x)$ und $M_{k,m}(x)$ leitet Verf. solche für die Batemanschen Funktionen $k_{2n}^{2l}(x)$ ab, die durch Spezialisierung der Parameter Zusammenhänge mit den Legendreschen Funktionen und den Funktionen des parabolischen Zylinders ergeben.

O. Volk.

Toscano, Letterio: Carattere ipergeometrico dei polinomi associati a quelli di Hermite. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* **9**, 146—150 (1954).

Es wird die folgende Formel hergeleitet, die einen Zusammenhang zwischen den in der Definition der Hermiteschen Funktionen 2. Art auftretenden Polynomen $G_n(x)$ und der konfluenten hypergeometrischen Funktion gibt:

$$G_{2n}(x) = (-2)^n \left(\frac{1}{2}, n\right) \psi_1\left(-n; 1; -2n, \frac{1}{2}; 2, \frac{1}{2} x^2\right).$$

Eine analoge Formel für $G_{2n+1}(x)/x$.

K. Prachar.

Tricomi, F. G.: Zur Asymptotik der konfluenten hypergeometrischen Funktionen. *Arch. der Math.* **5**, 376—384 (1954).

Die von dem Verf. in dieser Arbeit aufgestellten asymptotischen Formeln für die konfluente hypergeometrische Funktion sollen zu einem Teil einen Ersatz für

die wegen ihrer Allgemeinheit oft benutzten, aber wenig durchsichtigen Taylorsche Beziehungen bilden. Die neuen Formeln beschränken sich auf das Gebiet des Reellen, was ihre Verwendbarkeit nicht unerheblich einschränkt. Bei der Aufstellung seiner neuen Formel stützt sich der Verf. auf seine bekannte Arbeit über das asymptotische Verhalten der Laguerre-Polynome. Die Formeln machen eine Aussage über das Verhalten der Funktion ${}_1F_1(a; c; x)$, wenn bei beschränkt bleibendem Wert von c die reelle Größe $x = c^2 - a \rightarrow \infty$ strebt und $x > 0$ ist. Bei dem asymptotischen Verhalten ist dann zu unterscheiden nach den drei Fällen: Es liegt x in der Oszillationsstrecke $0 < x < 4x$, in der Umgebung des Wendepunktes $x = 4x$ oder in der Monotoniestrecke $x > 4x$. Als Anwendung wird zum Schluß eine asymptotische Abschätzung der positiven Nullstellen von ${}_1F_1(a; c; x)$ für $x \rightarrow \infty$ gebracht.

H. Buchholz.

Funktionentheorie:

• Sokolov, Ju. D.: Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Kiev: „Rite-Schuler“ 1954. 202 S. 4 R. 45 K. [Ukrainisch].

• Evgrafov, M. A.: Das Abel-Gontčarovsche Interpolationsproblem. (Moderne Probleme der Mathematik.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 126 S. R. 2,90 [Russisch].

La théorie des séries d'interpolation d'Abel-Gontcharov a fait au cours de ces dernières années des progrès importants; l'A., estimant qu'elle est maintenant susceptible d'applications intéressantes à la théorie des fonctions, se propose d'en faciliter l'étude par cet exposé d'ensemble, facilement lisible. Je signalerai, en dehors de la méthode classique de Gontcharov: la méthode de récurrence d'Ibragimov pour l'évaluation des polynômes d'interpolation [cf. I. I. Ibragimov, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 52, 393–394 (1946)]; — le problème des deux points (A. O. Gelfond et I. I. Ibragimov, ce Zbl. 32, 277); — l'étude poussée du problème des moments de Gelfond [cf. A. O. Gelfond, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VI, Ser. 11, 377–381 (1939); Uspechi mat. Nauk 3, 144–174 (1937); et aussi ce Zbl. 47, 332], de ses généralisations et de l'application au problème d'Abel-Gontcharov; — les relations des problèmes d'interpolation avec les systèmes infinis d'équations linéaires (Džrbašjan, ce Zbl. 47, 74; M. A. Evgrafov, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 17, 421–460 (1953); 18, 201–206 (1954)]; — enfin, l'examen des problèmes de S. Bernstein, relatifs aux fonctions dont chaque dérivée a un zéro dans le cercle $|z| \leq 1$, resp. sur le segment $-1 \leq x \leq 1$. — [Dans l'énoncé du théorème de Gontcharov donné p. 13, il faut lire $|z - 2|$ au lieu de $|z|$.]

G. Bourion.

Ricci, Giovanni: Maggiorazione del resto delle serie di potenze sul cerchio di convergenza. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III, Ser. 8, 121–131 (1954).

Nach einem Satz von P. Fatou-M. Riesz gilt: Besitzt $f(z) = \sum a_n z^n$ den Konvergenzradius 1, ist $a = o(1)$ und $f(z)$ regulär für $z = e^{i\theta}$ mit $\theta_1 < \theta < \theta_2$, so ist $\sum a_n e^{in\theta}$ gleichmäßig konvergent gegen $f(e^{i\theta})$ für $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Für diesen Satz gab M. Riesz zwei Beweise [J. reine angew. Math. 140, 89–99 (1911), Göttinger Nachr. 1916, 62–65 (1916)]. In der vorliegenden Arbeit wird durch eine sorgfältige Zusammenfassung der im Beweis von 1916 auftretenden Restglieder die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^n a_k e^{ik\theta} - f(e^{i\theta}) \leq K \left(\frac{1}{n-u} \sum_{v=0}^u |a_v| + \max_{u < v < n} |a_v| + \max_{v > n} |a_v| \right)$$

abgeleitet (diese Abschätzung gilt gleichmäßig in $\theta_1 < \theta < \theta_2$ und $u < n$; K hängt nur von f ab). Unglücklicherweise scheint der Verf. übersehen zu haben, daß aus dem Rieszschen Beweis von 1911 unmittelbar die bessere Abschätzung

$$\sum_{k=0}^n a_k e^{ik\theta} - f(e^{i\theta}) \leq C \left(\frac{1}{n^2} + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{|a_v|}{(|v-n|+1)^2} \right)$$

abgelesen werden kann.

A. Peyerimhoff.

Rebollo, J. M.: Bestimmung der Rekursionsskala einer Reihe. *Revista Acad. Ci. Madrid* **48**, 203—215 (1954) [Spanisch].

Si sa che se i coefficienti della serie $\sum_0^{\infty} c_n x^n$ soddisfano per qualche valore di m e per $n \geq m$ alla relazione ricorrente (A) $\sum_{i=0}^m c_{n-i} b_i = 0$, allora la serie è una funzione razionale fratta il cui denominatore è il polinomio $\sum_{i=0}^m b_i x^i$. L'A. si propone di cercare condizioni sufficienti perchè i coefficienti della serie $\sum_0^{\infty} c_n x^n$ soddisfino, da un certo punto in poi, a una relazione ricorrente del tipo (A). A questo proposito egli prova che se è $c_{n+r} = a_{1,r} f_1(n) + \dots + a_{s,r} f_s(n)$ in cui $a_{1,r}, \dots, a_{s,r}$ sono costanti dipendenti dall'intero $r \geq 0$ ed è $n \geq 0$, la serie $\sum_0^{\infty} c_n x^n$ è in generale una serie „ricorrente“. L'A. dà quindi condizioni sufficienti perchè risulti determinato il polinomio denominatore della funzione razionale che rappresenta la somma della serie. I risultati ottenuti vengono infine applicati per sommare alcune serie di potenze.

L. Giuliano.

Nassif, M.: Note on the Bessel polynomials. *Trans. Amer. math. Soc.* **77**, 408—412 (1954).

Verf. gibt für eine in $|z - a| \leq R$, $R > 0$, reguläre Funktion $f(z)$ mit Angabe der Koeffizienten eine in $|z - a| \leq R$ gleichmäßig konvergente Entwicklung nach den Besselschen Polynomen $p_n(z) = \sum_k p_{n,k} z^k$, $p_{n,k} = 2^{-k} (n+k)! (k! (n-k)!)^{-1}$, $0 \leq k \leq n$, $n \geq 0$ (vgl. H. L. Krall u. O. Frink, dies. Zbl. **31**, 297) und zeigt, daß die Nullstellen von $p_n(z)$, $n > 1$, innerhalb des Kreises vom Radius $(n-1) \cdot (2n-1)^{-1/2}$ oder auf demselben liegen.

O. Volk.

Orts, J. Ma.: Beitrag zum Problem der analytischen Fortsetzung der Legendreschen Reihen. *Collect. Math.* **7**, 97—112 (1954) [Spanisch].

Verf. gibt die Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Entwicklungen (1) $\sum a_n P_n(z)$ und (2) $\sum b_n z^n$ für eine in $|z| = 1 - \lambda$, $0 < \lambda < 1$ analytische Funktion $f(z)$; auf die Entwicklung (1) wendet er die Transformationen $z = \zeta(1 - \zeta)$, $(a - \zeta)/(a + \zeta)$, $a = 1$, $a \neq 1$ an, um analytische Fortsetzungen von $f(z)$ in Bereiche außerhalb der Ellipse $|z + \sqrt{z^2 - 1}| = \lambda$ zu erhalten. Zum Schluß wird die Transformation von $\sum A_n T_n(z)$, $T_n(z) = \frac{1}{2} (\zeta^n + \zeta^{-n})$, $\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1}$ Tschebyscheffsche Polynome, in $\sum a_n P_n(x)$ behandelt. Corrigenda: In (3) ist der Faktor vor dem Integral durch den reziproken Wert zu ersetzen. In Z. 3 v. o. auf S. 100 muß der Exponent der Reihen je $n+1$ statt n sein. In Z. 14 auf S. 100 muß es statt $|y| < \frac{1}{2}$ $\Re(y) < \frac{1}{2}$ heißen. Ferner möchte Ref. auf E. Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen*, I, S. 76 (2. A., 1878) hinweisen: die Entwicklungen lassen sich im übrigen vereinfachen, wenn man von der Heineschen Entwicklung $(z_1 - z)^{-1} = \sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(z) Q_n(z_1)$ und der leicht zu beweisenden Entwicklung $(z_1 - z)^{-1} = T_0 V_0 + 2 \sum_1^{\infty} T_n(z) V_n(z_1)$, $V_n(z_1) = (z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1})^n \sqrt{z_1^2 - 1}$, je gültig für $|z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}| < |z + \sqrt{z^2 - 1}| < 1$, Gebrauch macht.

O. Volk.

Herzog, Fritz: A note on power series which diverge everywhere on the unit circle. *Michigan math. J.* **2**, 175—177 (1954).

Bei dem Lusinschen Beispiel (vgl. E. Landau, *Darstellung und Begründung*, 2. Aufl., Berlin 1929, S. 69 ff.) einer überall auf $|z| = 1$ divergenten Potenzreihe $\sum a_n z^n$ mit $a_n \rightarrow 0$ liegen die Argumente der Koeffizienten im Intervall $(0, 2\pi)$ überall dicht. Dies ist aber keine notwendige Eigenschaft von Potenzreihen der

betrachteten Art, denn es gilt Theorem 1: Es gibt eine überall auf $|z| = 1$ divergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit reellen $a_n \geq 0$ und $a_n \rightarrow 0$. — Theorem 2: Es gibt eine überall auf der reellen θ -Achse divergente \cos -Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$ mit $a_n \geq 0$ und $a_n \rightarrow 0$. — Hilfsmittel: Vgl. F. Herzog und G. Piranian, dies. Zbl. 34, 48; P. Erdős, F. Herzog und G. Piranian, dies. Zbl. 57, 58. W. Meyer-König.

Bagemihl, F. and W. Seidel: Some boundary properties of analytic functions. Math. Z. 61, 186—199 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 52, 79) hatten Verff. die Existenz in $|z| < R \leq \infty$ meromorpher Funktionen nachgewiesen, die bei Annäherung an den Rand auf gewissen vorgeschriebenen Wegen gegen vorgegebene Zielwerte streben oder jede komplexe Zahl als Häufungswert besitzen. Dieser Satz wird in dem Hauptsatz der vorliegenden Arbeit, auf den sich auch die meisten folgenden Ergebnisse stützen, weitgehend verallgemeinert. Er werden allgemeine Familien von gegen den Rand strebenden Wegen, sog. „tresses“ eingeführt, die verschiedene früher betrachtete Klassen von Wegen als Spezialfälle enthalten, und gezeigt: zu jeder in $|z| < R \leq \infty$ stetigen komplexwertigen Funktion $g(z)$ läßt sich eine regulär-analytische Funktion angeben, die auf einer vorgeschriebenen Kurvenfamilie dieselben Häufungsmengen besitzt wie $g(z)$. Der Beweis stützt sich auf den Satz von Mergeljan über Polynomapproximation und den Satz von Tietze über die Fortsetzbarkeit stetiger Funktionen. Neben anderen Folgerungen ergibt sich daraus die Existenz im Einheitskreis regulärer Funktionen, für die auf fast allen Radien der Realteil gegen 0 und der Imaginärteil gegen ∞ strebt. — Dann folgt ein Satz über Relationen zwischen den Fatou-Punkten und denjenigen Randpunkten, deren radiale Häufungsmenge alle komplexen Zahlen umfaßt, der sich zum Teil mit Resultaten von Collingwood (dies. Zbl. 57, 60) berührt. Ein weiterer Satz befaßt sich mit analytischen Funktionen, die auf einer Radienmenge gleichmäßig beschränkt sind ohne radiale Grenzwerte zu besitzen. — Die übrigen Resultate gruppieren sich um die folgenden Fragestellungen: 1. Existenz in $|z| < R < \infty$ regulär-analytischer Funktionen, die auf vorgeschriebenen Wegen beliebig vorgegebene Kontinua als Häufungsmengen besitzen. 2. Kriterien für die Existenz regulärer Funktionen, die langs einer gegebenen Familie von Wegen gegen vorgeschriebene Zielwerte streben. 3. Existenz regulärer Funktionen, die auf einer Familie von Wegen gegen Zielwerte streben, deren Vereinigung eine gegebene analytische Menge ist. Die Familien von Wegen sind teils Mengen von Radien, teils allgemeinere „tresses“.

P. Seibert.

Mandelbrojt, S.: Influence des propriétés arithmétiques des exposants dans une série de Dirichlet. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 71, 301—320 (1954).

Es handelt sich um Dirichletreihen $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ mit komplexen a_n , $0 < \lambda_n \nearrow \infty$, $\inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, einer endlichen Konvergenzabszisse und einer gewissen Wachstumsordnung der durch die Reihe definierten Funktion $f(s)$. Verf. beweist einige Sätze über den Zusammenhang zwischen den Resten modulo 1 der Folge λ_n und den Singularitäten von $f(s)$. Die Ankündigung dieser Ergebnisse wurde bereits besprochen (dies. Zbl. 50, 80).

H.-E. Richert.

Leont'ev, A. F.: Über das Beschränktheitsgebiet einer Folge von Dirichletschen Polynomen. Mat. Sbornik, n. Ser. 35 (77), 175—186 (1954) [Russisch].

La fonction entière $q(z) = \sum a_n z^n / n!$, du type minimal de l'ordre 1, définit l'opérateur M qui associe à $F(z)$ la fonction $\sum a_n F^{(n)}(z)$. Pour toute suite $\{f_n(z)\}$ de fonctions entières dont les transformées $M(f_n)$ sont identiquement nulles, les points dans un voisinage desquels la suite est bornée forment un ensemble ouvert dont les composantes sont nécessairement convexes. — Cet énoncé s'applique en

particulier, pour $q(z) = \prod (1 - z^2 \lambda_n^2)$, aux polynômes de Dirichlet dont les exposants sont pris dans une suite $\{\lambda_n\}$ de nombres (réels ou complexes) vérifiant $n/\lambda_n \rightarrow 0$. Les méthodes de démonstration sont voisines de celles que l'A. a utilisées dans un travail antérieur (ce Zbl. 45, 351).
G. Bourion.

Dyson, F. J.: The rate of growth of functions defined by Dirichlet series. Ann. of Math., II. Ser. 60, 437—446 (1954).

The purpose of this paper is to answer a question raised by A. Beurling (this Zbl. 42, 312). Consider the functions $\varphi(s)$ with the following properties: (1) $\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n s^{-n}$ where the λ_n are a sequence of positive numbers and the series converges for $\sigma > 1$; (2) $\varphi(s) - (s-1)^{-1}$ is entire; (3) $|\varphi(s)| < \text{const} \cdot \Gamma(r) (2\pi k)^{-r}$, $|s| = r \geq 2$. Let E be the class of functions $\varphi(s)$ satisfying (1), (2) and (3) with some $k > 0$.

The author shows that the functions $\zeta_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)^{-s}$ have in some sense minimal growth within the class E . First, he proves: For every $\varphi(s)$ in the class E ,

$$L(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} (1-r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[\frac{(2\pi)^{m+1} \varphi(-m)}{m!} \right]^2 \geq 2,$$

as the real parameter r tends to 1 from below. All the functions $\zeta_\lambda(s)$ attain the minimum $L(\varphi) = 2$. From this theorem follows: For every $\varphi(s)$ in E , and for any positive numbers λ, ε , $|\varphi(-m)| > (1-\varepsilon) |\zeta_\lambda(-m)|$ for an infinity of integers m . Next he proves: If $\varphi(s)$ belongs to E , $1/4 \leq \lambda \leq 3/4$, and $|\varphi(-m)| \leq |\zeta_\lambda(-m)|$, $m = 0, 1, 2, \dots$, then either $\varphi(s) = \zeta_\lambda(s)$ or $\varphi(s) = \zeta_{1-\lambda}(s)$.
K. Noshiro.

Turán, P.: On Lindelöf's conjecture. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5, 145—163 (1954).

Verf. zeigt folgenden Satz: Wenn es ein ϑ mit $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ gibt, so daß für genügend kleine $\eta > 0$ in $\sigma \geq \vartheta$, $t \geq 1$

$$(1) \quad |\zeta(\sigma + it)| \leq c(\eta) t^{\eta_{1000}}$$

gilt, dann ist für $1 \geq \sigma_1 \geq \vartheta + 4\eta$, $T > c_1(\eta)$

$$N(\sigma_1, T) < c_2(\eta) T^{2(1+3\eta)(1-\sigma_1)} \log^5 T$$

$[N(\lambda, T)$ wie üblich die Anzahl der Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion in $\alpha \leq \sigma \leq 1$, $0 < t \leq T]$. Der Beweis dieses Satzes verwendet in sehr schöner Weise die Methode des Verf. (vgl. sein Buch „Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen“, dies. Zbl. 52, 46). Der Verf. bemerkt, daß der Satz auch richtig bleibt für $\vartheta = \frac{1}{2}$ und dann in der Richtung eines bekannten Satzes von Ingham liegt.
E. Hlawka.

Goldberg, A. A.: Über eine Aufgabe in der Theorie der Verteilung der Werte meromorpher Funktionen. Dopovidl Akad. Nauk Ukrain. RSR 1954, 3—5 und russ. Zusammenfassg. 5 (1954) [Ukrainisch].

Das inverse Problem der Wertverteilungstheorie meromorpher Funktionen besteht im Aufbau einer meromorphen Funktion, bei der die vorgegebene Verteilung der Defekte und Indizes so beschaffen ist, daß $\Sigma \delta(a_k) + \varepsilon(a_k) = 2$. — Mit Hilfe einer neuen Klasse Riemannscher Flächen — Flächen mit einer endlichen Anzahl fastperiodischer Enden — wird das inverse Problem in der vorliegenden Note für den Fall $\Sigma \delta \leq 2$ unter der einzigen Einschränkung gelöst, daß die Defekte über jeder endlichen Anzahl Punkte positiv sind.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Hasimoto, Keizo, Sadao Kato and Syozo Matuura: The second principal theorem in the continuous functions. Sci. Reports Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 4, 324—331 (1954).

Es werden differenzierbare Funktionen $w(z)$ mit schlichtem, endlich-fach zusammenhängendem Existenzgebiet und höchstens endlich vielen Polen betrachtet. Das Hauptresultat ist ein Analogon des zweiten Hauptsatzes für meromorphe Funktionen. Ferner wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß $w(z)$ (bei

geeigneter Übertragung der Begriffe der Wertverteilungslehre) folgende Eigenschaften hat: 1. es existieren keine defekten Werte, 2. die Summe der algebraischen Verzweigungsindizes beträgt 2, 3. die durch $w(z)$ erzeugte Fläche über der w -Ebene genügt der Ungleichung des Ahlforssehen Scheibensatzes für Flächen vom parabolischen Typus. — Die Beweise stützen sich auf eine Arbeit von Ozaki, Kashiwagi und Tsuboi [Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A. 4, Nr. 96 (1952)] und auf die Methoden von Heins und Möse.

P. Seibert.

Erdős, P. and A. J. Macintyre: Integral functions with gap power series. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 10, 62—70 (1954).

Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. One typical best possible result is: the upper limit as $r \rightarrow \infty$ of $m(r)/M(r)$ and $\mu(r)/M(r)$ (usual notations) is 1 provided
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < \infty.$$

Bo. Kjellberg.

Heins, Maurice: A universal Blaschke product. Arch. der Math. 6, 41—44 (1954).

The author considers uniformly bounded analytic functions in the interior of the unit circle. Every such function is the limit of a sequence of non-euclidean translates of one function which is constructed.

Bo. Kjellberg.

Daivitch, V.: Un critère que doit satisfaire une fonction analytique pour qu'elle appartienne à la classe H_δ ($1 < \delta \leq 2$). Bull. Soc. math. phys. Serbie 6, 80—83 und französ. Zusammenfassg. 84—85 (1954) [Serbisch].

Eine im Kreise $|z| < 1$ holomorphe Funktion $f(z)$ heißt zur Klasse H_δ ($\delta > 0$) gehörig, wenn der Hardysche Integralmittelwert $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi$ für $r \rightarrow 1$ beschränkt ist. Verf. beweist mit Hilfe des Satzes von M. Riesz über die Beziehung zwischen zwei konjugierten harmonischen Funktionen folgendes Kriterium: Ist die Funktion $f(z) = u(z) + i v(z)$ holomorph in $|z| < 1$, ist ferner $v(0) = 0$ und $u(z) \geq 0$ und besitzt $u^\delta(z)$ eine harmonische Majorante in $|z| < 1$, so gehört $f(z)$ zur Klasse H_δ ($1 < \delta \leq 2$).

P. Seibert.

Šmuljan, Ju. L.: Das Riemannsche Problem mit einer hermiteschen Matrix. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 4(62), 243—248 (1954) [Russisch].

Es muß hier auf das Referat über den Bericht von Gachov über das Riemannsche Randwertproblem für ein System von n Funktionenpaaren (dies. Zbl. 49, 57) verwiesen werden, in dem das Wesen dieses Problems sowie der einschlägigen Begriffsbildungen und Hilfsmittel zu seiner Behandlung geschildert sind. In diesem Rahmen wird hier der Satz bewiesen: Ist $X(z)$ eine kanonische Matrix der homogenen Randwertaufgabe $\varphi^+(t) = A(t) \varphi^-(t)$ für den Einheitskreis $|t| = 1$ der komplexen z -Ebene mit der gegebenen n -reihigen, der Hölderschen Bedingung genügenden Matrix $A(t)$ (det $A(t) = 1$) und sind z_1, z_2, \dots, z_n ihre partiellen Indizes, so ist $X^{*-1}(z^{-1}) A(z) (X^*(z))$ adjungiert zu $X(z)$, z konjugiert komplex zu z eine kanonische Matrix der adjungierten Randwertaufgabe $\varphi^+(t) = A^*(t) \varphi^-(t)$ und $-z_1, -z_2, \dots, -z_n$ sind deren partielle Indizes. Hierbei bedeutet $A(z)$ die Diagonalmatrix

$$A(z) = \begin{vmatrix} z^{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{z_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z^{z_n} \end{vmatrix}.$$

Es folgt daraus, daß für eine hermitesche Matrix die partiellen Indizes die Eigenschaft haben, paarweise entgegengesetzt gleich zu sein: $z_1 = -z_n, z_2 = -z_{n-1}, \dots$, also im Falle einer Matrix ungerader Ordnung n ist mindestens einer gleichen Null. Der kurze Beweis bedarf nur einiger Hilfsmittel der Matrizenrechnung. — Ferner werden

Abschätzungen für die Anzahlen der positiven, negativen und nullwertigen Indizes der Randwertaufgabe gebracht, die, wie Beispiele zeigen, nicht weiter verbessert werden können, und zwar: Ist die Matrix $A(t)$ eine nicht ausgeartete hermitesche Matrix n -ter Ordnung mit der Signatur s , besitzt sie also p positive und q negative Eigenwerte mit $p + q = n$ und $p - q = s$ (das gilt stets gleichzeitig für alle Werte von t), und hat die Randwertaufgabe n_+ positive, n_- negative und n_0 nullwertige Indizes, so ist $n_+ = n_- \leq \min(p, q)$ und $n_0 \geq |s|$. Daraus folgt, daß für eine definite Matrix (p oder $q = 0$) alle partiellen Indizes verschwinden. Der Beweis wird auf den Hilfssatz zurückgeführt: Für einen pseudounitären Raum n -ter Dimension, dessen Gramsche Matrix von derselben Art ist wie $A(t)$, also p positive und q negative Eigenwerte hat, hat jeder Unterraum, dessen sämtliche Vektoren nullwertige Quadrate besitzen, eine Dimension $\leq \min(p, q)$. — Endlich wird noch gezeigt, daß die Matrizen-Funktionalgleichung $F(t) J F^*(t) = A(t)$, $|t| = 1$, wo $A(t)$ eine Matrix obiger Art und J eine Diagonalmatrix n -ter Ordnung mit ebenfalls p positiven und q negativen Eigenwerten bedeutet, genau dann eine innerhalb des Einheitskreises holomorphe und dort sowie auf dem Rande stetige Lösungsmatrix n -ter Ordnung $F(z)$ mit nicht verschwindender Determinante besitzt, wenn alle partiellen Indizes der Randwertaufgabe für den Einheitskreis mit der Matrix $A(t)$ verschwinden. Bei Erfüllung dieser Bedingung ist die Lösung bestimmt bis auf einen willkürlichen konstanten rechtsseitigen J -unitären Faktor U , d. h. eine solche Matrix, die der Gleichung $U J U^* = J$ genügt.

E. Svenson.

Goluzin, G. M.: Einige Probleme der Theorie der schlichten Funktionen. Trudy Mat. Inst. Steklov **27**, 111 S. (1949) [Russisch].

Die Schrift behandelt in drei etwa umfangsgleichen Abschnitten die Hauptmethoden bei schlichten Abbildungen des Einheitskreises: 1. Abschätzungen auf Grund verschiedener Integralmittel, 2. Parameterdarstellung schlichter Abbildungen (Löwnersche Methode), 3. Methode der Variation. Jede von ihnen erweist sich als angepaßt an gewisse Fragen: sie ergänzen sich: Die erste ist „elementar“ und führt zu vielen qualitativen Schätzungen, die aber nicht scharf (endgültig) sind. Die zweite bewährt sich an gewissen Extremalaufgaben mit nicht-trivialen Lösungen. Die dritte gibt befriedigende Aussagen im Hinblick auf den analytischen Charakter der Extremalfunktionen bei einer recht weiten Klasse von Extremalproblemen, ja oft sogar gibt sie endgültige Lösungen. — Der Verf. ist vorzüglich bestrebt gewesen seine eigenen Einzelarbeiten hier zusammenzufassen, doch unter Einbau bekannter Ergebnisse an ihrer Stelle. Die Arbeit steht zwischen einer (in Deutschland lange unerreichbaren) Zusammenfassung a. d. J. 1939 [Uspechi mat. Nauk **6**, 26—89 (1939)] und dem späteren Buch, das eben beim Tode des Verf. erschien (Geometrisch-Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, dies. Zbl. **49**, 59). Große Teile der Darstellung sind, z. T. unter Verbesserung und Ergänzung, z. T. fast unberührt in dieses Buch übernommen.

E. Ulrich.

Calugăreanu, G.: Sur les fonctions univalentes. II. Acad. Republ. popul. Romine, Fil. Cluj, Studii Cerc. şti., Ser. I **5**, Nr. 3/4, 15—25, russ. u. französ. Zusammenfassg. 25—26, 26 (1954) [Rumänisch].

Es sei $f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \dots$ eine in $|z| > 1$ holomorphe Funktion. Falls $f(z)$ schlicht ist, so erfüllen die Koeffizienten α_n bestimmte Ungleichungen, die von Bieberbach gefunden wurden. Diese Bedingungen sind notwendig, aber nicht hinreichend. Durch vollständige Benutzung des Flächenprinzips von Bieberbach gelingt es dem Verf., die notwendige und hinreichende Bedingung dafür zu finden, daß $f(z)$ eine schlichte Funktion sei. Die Bedingung hat die Form einer unendlichen Folge von Ungleichungen. Eine ähnliche Methode wird benutzt, um die notwendige und hinreichende Bedingung dafür festzustellen, daß $f(z)$ das Gebiet $|z| > 1$ auf ein sternartiges Gebiet abbildet.

C. Constantinescu.

Royden, H. L.: The interpolation problem for schlicht functions. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 326—344 (1954).

S sei die Klasse der in $z < 1$ regulären und schlichten Funktionen $w = f(z)$ mit $f(0) = 0$, $f(z_1) = 1$, wo $z_1 = (z < 1)$ beliebig gegeben ist. Sind $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$, $w_1 = 1$ gegebene Systeme von verschiedenen Punkten mit $|z_r| < 1$, $r = 1, \dots, n$, so wird nach allen $f(z) \in S$ gefragt mit $f(z_r) = w_r$, $r = 1, \dots, n$. Zwei solche Funktionen heißen homotop, wenn sie als Abbildungen der durch $0, z$ punktierten Kreisscheibe in die durch $0, w$ punktierte w -Ebene homotop sind. Sie heißen konform isotop, wenn sie sich innerhalb S und unter ständiger Wahrung der Interpolationsbedingungen stetig ineinander überführen lassen. Es wird zunächst die Menge R der Klassen p konform isotoper Funktionen (bei festem z und variablem w) betrachtet. Diejenigen p , in denen es beschränkte $f(z)$ gibt, bilden eine Teilmenge R_0 , die, in naheliegender Weise topologisiert, eine $(2n - 2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit darstellt. Für $f(z) \in p \in R - R_0$ folgt durch Variationsbetrachtungen [insbesondere unter Zugrundelegung der Schifferschen inneren Variation, vgl. Amer. J. Math. **65**, 341—360 (1943)] eine Differentialgleichung $Q(z) \cdot (dz/z)^2 = P(w) dw^2$, wo P und Q rational sind und insbesondere P von der Form $P = \sum_{i=1}^n A_i (w - w_i)^{-1}$ ist. Der Rand des Bildgebietes wird von Schlitzten auf Kurven mit $P(w) dw^2 = 0$ gebildet. Ein Starrheitssatz des Verf. für solche Gebiete (dies. Zbl. **55**, 309) zeigt die Einzigkeit für diese $f(z) \in p \in R - R_0$ sogar in ihrer Homotopieklasse. Eine entsprechende Einzigkeitsaussage gilt für $f(z) \in p \in R_0$, falls $f(z)$ noch durch die Forderung $\sup_{|z| < 1} |f(z)| = \text{Min}_{f \in p}$ ausgezeichnet wird. Damit folgt dann, daß die Einteilungen nach Homotopie- und Isotopieklassen zusammenfallen. Endlich wird der Fall $n = 2$ abschließend behandelt, was durch einen auf höhere Fälle wahrscheinlich nicht übertragbaren Hilfssatz gelingt, wonach zwei konforme Abbildungen des in $0, z_1, z_2$ punktierten $z < 1$ auf die in $0, 1, w_2$ punktierte w -Ebene genau dann konform isotop sind, wenn sie denselben Isomorphismus der beiden Homologiegruppen erzeugen.

H. Grunsky.

Pratje, Ilse: Iteration der Joukowski-Abbildung und ihre Streckenkomplexe. Mitt. math. Sem. Gießen **48**, 55 S. (1954).

Diese Gießener Diss. steht in engem Zusammenhang mit den Arbeiten Koebe's zur Uniformisierungstheorie. Den Koebeschen Uniformisierungsgrößen entsprechen beim Übergang zur (eindeutigen) Umkehrfunktion Iterationen der allgemeinen Joukowski-Abbildung der Form $w = a(z)b - b(z)$ (wobei die konstanten a, b bei jedem Schritt variiert werden). Diese werden nun (unter Beschränkung auf den Fall, daß die zugehörige Riemannsche Fläche über höchstens vier Punkten verzweigt ist) systematisch untersucht und in die große Mannigfaltigkeit der entstehenden Funktionen durch die Anwendung der Streckenkomplex-Darstellung eine gewisse Übersicht gebracht. Die dabei erhaltene Funktionenklasse enthält neben der Exponential- und Sinusfunktion u. a. die Schwarzschen Dreiecksfunktionen, Funktionen mit zwei periodischen Enden [deren Wertverteilungsgrößen nach den Formeln von Wittich (dies. Zbl. **31**, 301) und Pöschl (dies. Zbl. **42**, 86) bestimmt werden], sowie die Weierstraßsche \wp -Funktion. — Um eine übersichtliche analytische Darstellung zu erhalten, verwendet Verf. eine Art verallgemeinerter Kettenbrüche und gewinnt mit deren Hilfe eine explizite Formel für eine beliebige n -fach iterierte Joukowski-Abbildung. — Zum Schluß wird eine der letzten Arbeiten Koebe's (dies. Zbl. **18**, 369) an Hand der Streckenkomplexe erläutert, wobei die besondere Aufmerksamkeit dem Aufbau der \wp -Funktion aus elementaren Funktionen gilt, für welche vier verschiedenartige Iterationsketten angegeben werden. P. Seibert.

Plotnick, Samuel I. and Thomas C. Benton: Evaluation of constants in conformal representation. Quart. appl. Math. **12**, 76—77 (1954).

Fréchet, Maurice: Die kanonischen Formen der 2, 3, 4-dimensionalen para-analytischen Funktionen. *Compositio math.* 12, 81–96 (1954) [Esperanto].

Zusammenstellung schon bekannter Resultate des Verf. Transformation der Funktionen auf kanonische Normalformen ($n = 2, 3, 4$). *A. Kriszten.*

Arrighi, Gino: Sulle funzioni polidrome di matrici. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser.* 8, 141–156 (1954).

Questa Nota contiene rielaborazioni, precisazioni e generalizzazioni, relative alle ricerche intorno alla definizione delle funzioni polidrome di una matrice, esaminando due distinti indirizzi che vengono seguiti a questo scopo. Nella II parte, in particolare, relativa al secondo dei detti indirizzi, l'A. introduce una generalizzazione, assumendo arbitraria (non degenerare) la matrice canonizzante che compare nell'indirizzo indicato. *F. Cecioni.*

Spampinato, Nicolò: Sulle singolarità degli zeri di una funzione supercomplessa. *Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, Ser. IV* 20, 316–323 (1954).

Es sei $\mu = xu + yv$ eine biduale Veränderliche, d. h.: x, y sind zwei gewöhnliche komplexe Zahlen; und u, v sind die Einheiten eines Systems von bidualen Zahlen ($u^2 = u, uv = vu = v, v^2 = 0$). Es wird hier zunächst eine Funktion der Form $F(\mu) = f(x) \cdot u + [f'(x)y - g(x)]v$ betrachtet, wo f, g zwei Polynome mit komplexen Koeffizienten in der komplexen Veränderlichen x bedeuten. Nach der Betrachtung einiger allgemeiner Eigenschaften der Nullstellen von $F(\mu)$ werden die sogenannten halbeinfachen Funktionen $F(\mu)$ eingeführt, die man erhält, wenn $g(x) = (h x + k) f'(x)$ ist: h, k sind hier zwei beliebige Konstanten. Im Falle $h = k = 0$ wird $F(\mu)$ einfach genannt. Für jede Nullstelle einer solchen Funktion $F(\mu)$ sind x, y beide endlich; und jede mehrfache Nullstelle von $f(x)$ liefert unendlich viele Nullstellen von $F(\mu)$. Das System aller Funktionen $F(\mu)$, die, bei veränderlichen h, k , einer gegebenen analytischen Funktion $f(x)$ entsprechen, wird von den rationalen Operationen in sich selbst verwandelt; dasselbe gilt auch, wenn h, k festgehalten werden und die analytische Funktion $f(x)$ veränderlich ist. *E. Togliatti.*

Roşculeţ, Marcel N.: Une théorie des fonctions d'une variable hypercomplexe dans l'espace à trois dimensions. *Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat.* 5, 361–398, russ. u. franz. Zusammenfassg. 398–399, 400–401 (1954) [Rumänisch].

On considère la variable hypercomplexe $\omega = x + \theta y + \theta^2 z$ avec $\theta^3 = 1$. L'anneau $R(\theta)$ ainsi défini admet deux classes de diviseurs de zéro $D_1 = (1 - \theta)\omega, D_2 = (1 + \theta + \theta^2)\omega$, qui déterminent en $R(\theta)$ deux idéaux. Le module du nombre hypercomplexe ω est

$$||\omega||^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyx - \frac{1}{2}(x - y - z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

qui est nul pour les points situés sur la droite $x = y = z$ et dans le plan $x + y + z = 0$ qui sont les lieux des points D_1 et D_2 . La variable hypercomplexe ω peut avoir l'expression suivante $\omega = \rho e^{\theta\varphi + \theta^2\psi}$ où $\rho = ||\omega||$ et φ, ψ sont deux arguments. Une fonction de variable hypercomplexe

$$f(\omega) = P(x, y, z) + \theta Q(x, y, z) + \theta^2 R(x, y, z)$$

est monogène en un point $M(x, y, z)$ si les fonctions réelles P, Q, R sont liées par les relations $\partial P / \partial x = \partial Q / \partial y = \partial R / \partial z, \partial P / \partial y = \partial Q / \partial z = \partial R / \partial x, \partial P / \partial z = \partial Q / \partial x = \partial R / \partial y$ qui conduisent à

$$\partial^2 U / \partial x^2 - \partial^2 U / \partial y \partial z = 0, \quad \partial^2 U / \partial y^2 - \partial^2 U / \partial z \partial x = 0, \quad \partial^2 U / \partial z^2 - \partial^2 U / \partial x \partial y = 0$$

et à l'équation de Pierre Humbert

$$\partial^3 U / \partial x^3 + \partial^3 U / \partial y^3 + \partial^3 U / \partial z^3 - 3 \partial^3 U / \partial x \partial y \partial z = 0.$$

Dans des domaines convenablement choisis, la fonction $(1 - \theta) f(\omega)$ admet des développements en séries de Taylor ou de Laurent. Enfin, par les fonctions holomorphes (H), on obtient des transformations de courbes dans l'espace pour lesquelles l'élément d'arc au sens de P. Appell est proportionnel et les arguments φ et ψ se conservent. *Franz. Auszug.*

Takasu, Tsurusaburo: A complex function theory on a „Supra-corpus“ of n -dimensional hypercomplex numbers. II. A theory of triply periodic functions. *Yokohama math. J.* 2, 1–68 (1954).

(Teil I, dies. Zbl. 53, 52.) Entwicklung der Theorie der doppelt und dreifach periodischen Funktionen der vom Verf. definierten Funktionenklassen. Die Resultate entsprechen weitgehend der klassischen Theorie der doppelt periodischen Funktionen (Sätze von Liouville, \wp -Funktion, τ -Funktion, σ -Funktionen).

A. Kriszten.

Hervé, Michel: Itération des transformations analytiques dans le bicercle-unité. Ann. sci. École norm. sup., III Sér. **71**, 1—28 (1954).

Es werden holomorphe Abbildungen $t: w_1 = t_1(z_1, z_2), w_2 = t_2(z_1, z_2)$ von beschränkten Gebieten D des zweidimensionalen komplexen Zahlenraumes in sich betrachtet. Die Menge $\{t_n\}$ aller iterierten Abbildungen von t — es werde $t_1 = t$ gesetzt — bildet eine normale Familie in D . Das Ziel der Arbeit besteht darin, die holomorphen Grenztransformationen τ von konvergenten Teilfolgen der Menge $\{t_n\}$ zu beschreiben. Besitzt die Abbildung t einen Fixpunkt $z_0 \in D$, so sind bekanntlich die Eigenwerte s_1, s_2 der Funktionaldeterminante von t in z_0 höchstens vom Betrage 1. Die Abbildung t sowie jede Grenztransformation τ ist genau dann ein Automorphismus von D , wenn $|s_1| = |s_2| = 1$. Gilt dagegen $|s_1| < 1, |s_2| < 1$, so konvergiert die Folge t im Sinne der Topologie der kompakten Konvergenz gegen diejenige Transformation τ , die jeden Punkt von D auf z_0 abbildet. Ist aber $|s_1| = 1, |s_2| < 1$, so hat der Verf. früher (dies. Zbl. **44**, 303) bewiesen, daß eine in D eindimensionale irreduzible analytische Menge E mit $z_0 \in E$ existiert, die durch t sowie durch jede Grenztransformation τ der Menge $\{t_n\}$ eindeutig auf sich abgebildet wird. In der vorliegenden Arbeit untersucht der Verf. vor allem die Grenztransformationen τ von solchen Mengen $\{t_n\}$, bei denen die Abbildung t keine Fixpunkte hat. Er beschränkt sich dabei auf solche Gebiete D_0 , für die eine Grenztransformation τ von $\{t_n\}$ das Gebiet D_0 entweder ganz in sich oder ganz in seinen Rand ∂D_0 abbildet. Der Diczylinder ist z. B. ein solches Gebiet. Es wird zunächst gezeigt: Ist D_0 ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet vom angegebenen Typus, und ist t eine holomorphe Abbildung von D_0 in sich ohne Fixpunkt, so bildet jede Grenztransformation τ von $\{t_n\}$ das Gebiet D_0 in seinen Rand ∂D_0 ab. Für den Fall, daß D_0 der Diczylinder ist, wird darüber hinaus der folgende „Eindeutigkeitssatz“ aufgestellt, dessen Beweis den Hauptteil der Arbeit ausmacht: Ist t eine holomorphe Abbildung des Einheitsdizylinders $\{|z_1| < 1, |z_2| = 1\}$ in sich ohne Fixpunkt, so gibt es eine eindeutig bestimmte komplexe Zahl e^{ix} (bzw. $e^{i\beta}$), derart, daß jede Grenztransformation τ der Menge $\{t_n\}$ die Gestalt

$$w_1 = e^{ix}, w_2 = \psi(z_1, z_2) \quad \text{mit} \quad |\psi(z_1, z_2)| \leq 1$$

$$\text{bzw. } w_1 = \varphi(z_1, z_2), w_2 = e^{i\beta} \quad \text{mit} \quad |\varphi(z_1, z_2)| \leq 1$$

besitzt. — An Beispielen wird gezeigt, daß die Funktionen ψ und φ i. a. nicht eindeutig festgelegt sind. Nur unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen kann man der Abbildung t zwei Zahlen $e^{ix}, e^{i\beta}$ zuordnen, so daß für alle Grenztransformationen τ von $\{t_n\}$ gilt: $w_1 = e^{ix}, w_2 = e^{i\beta}$.

R. Remmert.

● **Bettermann, Rudolf:** Riemannsche Gebiete. (Schriftenreihe des Math. Inst. d. Univ. Münster, Heft 7.) Münster: Buch- und Steindruckerei Max Kramer 1954. 69 S. Dissertation.

Pour généraliser la notion de surface de Riemann, on est conduit à appeler domaine de Riemann d'une fonction analytique multiforme $f(z_1, \dots, z_n)$ un recouvrement de C^n dont les points qui ont pour support $z = (z_1, \dots, z_n)$ sont identifiés aux couples $[z, \text{une détermination de } f(z)]$: un exemple simple montre que ce recouvrement a en général des points de ramification non uniformisables; comment, alors, définir de tels recouvrements à partir de C^n , sans intervention de f ? Dans une première partie, C^n est remplacé par un espace de Hausdorff quelconque H ; un autre espace de Hausdorff R étant un recouvrement localement univalent de H (i. e. il existe une application continue T de R dans H qui est localement biunivoque), on définit, à l'aide d'exhaustions de R , les ensembles-frontières de R , où l'on distingue, par des propriétés des exhaustions correspondantes: points accessibles, ensembles premiers (généralisant les bouts premiers de Carathéodory), points inaccessibles; ayant défini les voisinages de ces points-frontières, on reconnaît que la réunion de R et de ses points-frontières, accessibles ou non, est encore un espace de Hausdorff U .

Un point de U est point de ramification de R si T n'est pas biunivoque au voisinage de ce point. Une deuxième partie applique ces résultats généraux au cas $H = C^n$: R étant un recouvrement localement univalent de C^n , un point de ramification de R est uniformisable si les points voisins P peuvent être mis en correspondance biunivoque et continue avec les points p d'un polydisque, les coordonnées de $T(P)$ étant fonctions holomorphes des coordonnées de p . Une variété analytique complexe est la réunion d'un recouvrement R de C^n et de certains points de ramification de R , tous uniformisables, tandis qu'un domaine de Riemann étalé sur C^n est la réunion d'un recouvrement R de C^n et de points de ramification plus nombreux de R (points non transcendants): c'est cette dernière notion qui répond à la question posée au début.

M. Hervé.

Modulfunktionen:

Petersson, Hans: Über automorphe Orthogonalfunktionen und die Konstruktion der automorphen Formen von positiver reeller Dimension. Math. Ann. 27, 33—81 (1954).

Die Arbeit dient dem Zweck der Weiterführung des Prinzips der Metrisierung und der expliziten Konstruktion automorpher Formen im Bereich der Formen positiver Dimension (s. auch Petersson, dies. Zbl. 41, 416). Es sei $K = \{I', -r, v\}$ die Klasse derjenigen automorphen Formen zu einer Grenzkreisgruppe I' erster Art, zur Dimension $-r$ und zum Multiplikatorsystem v , welche in allen Punkten eines Fundamentalbereichs endliche Ordnung haben. Während bisher ein Skalarprodukt $(f, g; I')$ nur für ganze Formen $f, g \in K$ definiert wurde, wird jetzt ein solches auch für nicht-ganze Formen im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes erklärt, indem man bei der Integration zunächst nichteuklidische Kreisumgebungen der singulären Punkte von f und g in einem Fundamentalbereich ausläßt, soweit es sich hier nicht um Fixpunkte der Gruppe handelt. In diesen wird in naheliegender Weise analog verfahren. Man läßt dann die Radien dieser Kreise unabhängig voneinander gegen Null gehen. Einen Grenzwert, das Skalarprodukt $(f, g; I')$, erhält man genau dann, wenn in den Entwicklungen von f und g nach den üblichen Ortsvariablen in einem willkürlichen Punkt des Fundamentalbereiches niemals sowohl der Koeffizient von f als auch der von g zu gleichem negativen Exponenten der Ortsvariablen von Null verschieden ist, und wenn das Produkt der konstanten Glieder von f und g in jeder parabolischen Spitze verschwindet, sofern solche Spitzen existieren. $(f, g; I')$ hat dieselben Invarianzeigenschaften bezüglich linearer Transformationen wie in dem bisher betrachteten Fall ganzer Formen. — Es sei $\mathcal{S}^+(K)$ die Schar der ganzen Spitzenformen in K . $f \in K$ heißt Normalfunktion, wenn f auf $\mathcal{S}^+(K)$ senkrecht steht. Jede Normalfunktion ist durch ihre Hauptteile im Fundamentalbereich eindeutig bestimmt. K ist die direkte Summe von $\mathcal{S}^+(K)$ und der Normalschar $\mathfrak{N}(K)$, die sich aus den Normalfunktionen zusammensetzt. Ist K nicht-spezial (im Sinne des Riemann-Rochschen Satzes), wie üblich r reell und $r_1 = 1$, so gibt es eine Normalbasis in der Klasse K mit folgenden Eigenschaften: Die Normalbasis ist eine Basis von $\mathfrak{N}(K)$ und je zwei Funktionen dieser Basis besitzen ein Skalarprodukt. Hierdurch ist die Normalbasis bis auf konstante Faktoren an den einzelnen Funktionen eindeutig bestimmt. Die Funktionen einer Normalbasis haben genau eine Singularität mit eingliedrigem Hauptteil und verhalten sich sonst wie ganze Spitzenformen. Im Falle $r > 2$ wird eine Normalbasis durch Poincarésche Reihen von elliptischem und parabolischem Typus dargestellt. — Das Problem der Konstruktion von Formen positiver Dimension betrifft die Komplementärklasse $\dot{K} = \{I', r - 2, r - 1\}$ zu K unter der Voraussetzung $r > 2$, $r_1 = 1$. Das wesentliche Hilfsmittel ist eine Poincarésche Reihe $H_{-r}(\tau, v, z, A, I')$ mit zwei komplexen Variablen τ und z . Dabei seien ∞ und $A^{-1}\infty$ parabolische Spitzen von I' . Die Konstruktion der Formen $\in \dot{K}$

zu vorgegebenen Hauptteilen, die den bekannten Hauptteilbedingungen genügen müssen, wird nach dem Prinzip der Vertauschung von Argument (τ) und Parameter (z) in ähnlicher Weise vorgenommen, wie dies im Fall einer parabolischen Spitze in der oben zitierten Arbeit ausgeführt wurde. Nennenswerte Schwierigkeiten in der technischen Durchführung sind dadurch bedingt, daß die verschiedenen analytischen Formalismen, die den parabolischen Spitzen $A^{-1\infty}$ im Fundamentalbereich entsprechen, in ihrer Wechselwirkung in Erscheinung treten und diskutiert werden müssen. Der Hauptsatz über die explizite Darstellung von $F \in K$ bei vorgegebenen Hauptteilen gestattet folgende interessante Interpretation: Zu jeder Form $F \in K$ gibt es bei fest gewähltem Fundamentalbereich einen durch Hauptteile von F eindeutig bestimmten linearen Operator H_F mit dem Definitionsbereich K , so daß der Fourierkoeffizient $b_{h-\kappa}(A, F)$ von F zur Spitze $A^{-1\infty}$ in der Gestalt $b_{h-\kappa}(A, F) = H_F f$ mit $f \in K$ dargestellt werden kann, wobei f die Normalfunktion in K ist, welche in $A^{-1\infty}$ einen eingliedrigen Hauptteil zur Ordnung $h - \kappa$ hat, der durch A eindeutig bestimmt ist, während f sich sonst wie eine ganze Spitzenform verhält. f tritt als Poincarésche Reihe unmittelbar in Erscheinung. H. Maaß.

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

● Lawden, Derek F.: *Mathematics of engineering systems. (Linear and non-linear)* London: Methuen & Co., New York: John Wiley & Sons, Inc. 1954. VIII, 380 p. 30 s net.; \$ 5.75.

Mit diesem Buch soll eine Lücke geschlossen werden, die zwischen den herkömmlichen Lehrbüchern der Mathematik einerseits und den, speziellen mathematischen Verfahren gewidmeten, Monographien andererseits besteht. Da die Studenten der praktischen Ingenieurwissenschaften angesprochen werden sollen, ist das Buch völlig auf die Belange der Praktiker abgestellt, die ohne das wichtige Handwerkzeug der Mathematik nicht auskommen können. Wenn es bei dieser Zielsetzung auch verständlich ist, daß der Ballast rein mathematischer Beweise weitgehend über Bord geworfen wird, so wird man sich doch hüten müssen, hier von einer „Schmalspur-Mathematik“ zu sprechen. Es ist vielmehr ein durchaus moderner Kurs der angewandten Mathematik entstanden – freilich etwas einseitig auf die Belange der Ingenieure zugeschnitten, die mit Schwingungsfragen in der Nachrichten- und Regel-Technik in Berührung kommen. Von den 5 Kapiteln des Buches bringt das erste eine kurze Wiederholung des Grundwissens, das als im wesentlichen bekannt vorausgesetzt wird (Funktionen, Grenzwerte und Ableitungen, Taylor-Reihen, Integrale, einige spezielle Funktionen, komplexe Zahlen). Das zweite Kapitel behandelt klassische Verfahren zur Lösung linearer Differentialgleichungen. Hier werden unter Verwendung der abkürzenden Schreibweise der Operatorenrechnung vor allem die Rechenregeln eingeübt, mit deren Hilfe man für Gleichungen und Gleichungssysteme (homogen und nicht-homogen) rasch und bequem die Lösungen hinschreiben kann. Auch die Frage der Stabilität wird behandelt. Im dritten Kapitel werden moderne Verfahren zur Untersuchung linearer Systeme vorgeführt, die in der Praxis fast ausschließlich verwendet werden. Hierzu gehören die Verfahren der Übergangsfunktion (= Reaktion eines Systems auf einen Einheitssprung im Eingang) und der Ortskurven, die ein Maß für die Reaktion eines Systems auf sinusförmige Eingangsfunktionen darstellen. Im zweiten Falle wird die Technik der Anwendung des Nyquistschen Stabilitätskriteriums auseinandergesetzt. Die Laplace-Transformation wird – trotz ihrer enormen praktischen Bedeutung – verhältnismäßig knapp behandelt. In erfreulicher Ausführlichkeit wird dagegen im vierten Kapitel die Fourier-Analyse (Fourier-Reihen und Fourier-Transformationen) dargestellt. Die Beispiele dieses Kapitels sind aktuellen Problemen der Praxis entnommen (Fragen der Spektralzerlegung, Bandbreite von Empfängern, Impulstechnik).

Das letzte Kapitel ist den alten und neueren — teilweise heuristischen — Methoden gewidmet, die sich in der letzten Zeit zur Untersuchung nichtlinearer Systeme durchgesetzt haben (Störungstheorie, Variation der Konstanten, Phasenporträt u. a.). — Ein besonderer Wert des Buches dürfte auch in den zahlreichen Übungsaufgaben liegen, die — falls man sie nicht einfach überschlägt — dem Leser kaum die Freiheit lassen, die dargestellten Dinge nicht verstanden zu haben. Die Darstellung selbst ist klar und durchsichtig und mit feinem Gefühl für die Belange der Praxis abgefaßt. Wer sich freilich über grundsätzliche mathematische Fragen der dargelegten Verfahren zu informieren wünscht, wird tiefergreifende Werke zu Rate ziehen müssen.

K. Magnus.

Puig Adam, P.: Hintere und vordere Näherungsbrüche beim Kettenbruchalgorithmus mit Differentialen als Partialnennern. *Revista Acad. Ci. Madrid* **48**, 11—22 (1954) [Spanisch].

Verf. betrachtet Grenzwerte von Kettenbrüchen

$$(*) \quad \lim \left\{ AF(x_i) + \frac{1 + \Delta H(x_i)}{IG(x_i)} + \frac{1 + \Delta K(x_i)}{AF(x_{i-1})} + \dots + \frac{1 + \Delta K(x_{n-1})}{C} \right\}.$$

$$(**) \quad \lim \left\{ AF(x_0) + \frac{1 + \Delta H(x_0)}{IG(x_0)} + \dots + \frac{1 + \Delta H(x_{i-1})}{IG(x_{i-1})} + \frac{1 + \Delta K(x_{i-1})}{AF(x_i)} \right\}.$$

Die Nenner sind abwechselnd mit den Funktionen F und G , die Zähler mit den Funktionen H und K gebildet. (Der wichtige Spezialfall $H = K = 0$ ist in der Arbeit noch gesondert behandelt.) Es ist $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i = x < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Die Limesbildung bezieht sich auf unbegrenztes Verfeinern der Intervalleinteilung. Neben den in (*) und (**) auftretenden Kettenbrüchen mit ungerader Gliederzahl werden auch entsprechend gebildete mit gerader Gliederzahl betrachtet. — Verf. stellt die Riccatischen Differentialgleichungen auf, denen die genannten Limes als Funktionen von x genügen, ferner die linearen Differentialgleichungen und linearen Differentialgleichungssysteme, denen ihre (durch die bei Kettenbrüchen übliche Rekursionsvorschrift und anschließendem Grenzübergang erhaltenen) Zähler und Nenner genügen. Ferner wird ein erstes Integral (im wesentlichen die Wronskische Determinante des Systems) angegeben.

A. Stöhr.

Peyovitch, T.: Sur un théorème des équations différentielles algébriques. *Bull. Soc. math. phys. Serbie* **6**, 74—79 und französ. Zusammenfassg. 79 (1954) [Serbisch].

Dans cet article l'A. simplifie la démonstration d'un théorème de Michel Petrovitch (ce Zbl. **20**, 24, 123, 234).

Zusammenfassg. des Autors.

Myškis, A. D. und U. K. Grinfel'd: Über die stetige Abhängigkeit der Lösung des Cauchyschen Problems von den Anfangsdaten. *Uspechi mat. Nauk* **9**, Nr. 3 (61), 171—174 (1954) [Russisch].

Les AA. donnent une étude comparée des équations différentielles ordinaires. Les distinctions essentielles qu'ils signalent proviennent des conditions de nature différente, dont ils partent dans leurs raisonnements. En effet, ils supposent, quant aux équations différentielles du premier ordre, que par chaque point du domaine étudié il ne passe qu'une seule courbe de la famille considérée. Or, cette condition n'est plus satisfaite dans le cas des équations différentielles ordinaires du second ordre. En effet, les courbes considérées C_a, C_b, C_c étant des droites et des hyperboles, dans le cas $\beta = 0$, représentent les ensembles des droites, passant par l'origine des coordonnées qui s'y coupent avec les droites C_a .

N. Saltykow.

García, Godofredo: Über die Integration und die Eigenschaften einer Differentialgleichung. *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima* **17**, 39—50 (1954) [Spanisch].

Several considerations about the equation $d^2y/dx^2 + G^2(x)y = 0$ are made in a form not easy to follow.

M. M. Peixoto.

Evans, Robert L.: Errors in asymptotic solutions of linear ordinary differential equations. *Quart. appl. Math.* **12**, 295—300 (1954).

Consider a homogeneous linear differential equation and suppose that a solution $y(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1}$ in a certain sector of the x -plane. If we keep N terms in the asymptotic development it is shown that the error $e(x) = y(x) - \sum_{n=0}^N c_n x^{n-1}$ satisfies a linear equation whose order is one less than the order of the given equation. If the original equation is of second order $e(x)$ may be determined by quadrature and an upper bound for the error can be easily found. It usually depends of more than one of the neglected terms. An illustrative example is worked in detail. The case of equations of order greater than two will be considered in a forthcoming paper.

M. M. Peixoto.

Tatarkiewicz, Krzysztof: Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle du second ordre. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 7, 19—73, polnische und russische Zusammenfassg. 73—81 (1954).

L'A. studia con un metodo di T. Ważewski il comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $(*) \quad \ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = f(t)$ con $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ funzioni continue di t in $[-\infty, +\infty)$. Il comportamento delle due radici $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ (reali o complesse) dell'equazione $\lambda^2 - 2a(t)\lambda - b(t) = 0$ ha notevole importanza nei casi esaminati dall'A. intesi ad assicurare che le parti reali $R[\lambda_j(t)]$, $j = 1, 2$, sono di segno costante qualunque sia t . In ipotesi molto generali l'A. dimostra che se k ($k = 0, 1, 2$) è il numero delle funzioni non positive delle due funzioni $R[\lambda_1(t)]$, $R[\lambda_2(t)]$ l'equazione $(*)$, nell'ipotesi che $f(t)$ sia limitata, ammette una famiglia a k parametri di soluzioni limitate, e tali risultano anche le loro derivate prime. Le altre soluzioni della $(*)$ risultano invece non limitate. Sono pure rapidamente indicati alcuni risultati relativi all'equazione $\ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = g(x, \dot{x}, t) + f(t)$.

G. Sansone.

Jakubovič, V. A.: Erweiterung der Methode von Ljapunov zur Bestimmung der Beschränktheit der Lösungen der Gleichung $y'' + p(t)y = 0$, $p(t + \omega) = p(t)$ auf den Fall einer Funktion $p(t)$ mit veränderlichen Vorzeichen. Priklad. Math. Mech. 18, 705—718 (1954) [Russisch].

Let $y'' + p(t)y = 0$, p periodic of period ω : if q, ψ are solutions satisfying the initial conditions $q(0) = \psi'(0) = 1$, $q'(0) = \psi(0) = 0$, and $A = \frac{1}{2}[q(\omega) + \psi'(\omega)]$, the solutions are stable if $|A| < 1$, unstable if $|A| > 1$. Ljapunov [Zapiski Akad. Nauk, St. Petersburg 13, Nr. 2 (1903)] gave a method to compute A when $p \geq 0$. If p changes sign it is shown that $A = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n$, the A_n being positive constants which may be calculated by quadratures. This makes possible to decide the question of stability by means of a finite number of operations except in exceptional cases.

In particular, if $a^2 = \sup |p(t)|$, $\int_0^{\omega} [p(t) + a^2] dt < 2a \operatorname{Th} \left(\frac{a\omega}{2} \right)$ implies

instability; if $\int_0^{\omega} p(t) dt \geq 0$ and $\int_0^{\omega} [p(t) + a^2] dt < 2a \operatorname{Cth} \left(\frac{a\omega}{2} \right)$, the solu-

tions are stable.

J. C. Massera.

Yamaguti, Masaya: On some properties of the non-linear differential equations of the „parametric excitation“. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 87—96 (1954).

In der Differentialgleichung (1) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x, t) = p(t)$ sollen $f(x)$ und $g(x, t)$ bezüglich x einer Lipschitzbedingung genügen, $\partial g(x, t)/\partial t$ sei vorhanden und stetig, $g(x, t)$, $p(t)$ seien in t stetig und von der Periode ω , es gelte $\int_0^{\omega} p(t) dt = 0$.

Man setze $F(x) = \int_0^x f(x) dx$, $G(x, t) = \int_0^x g(x, t) dx$. Unter den Voraussetzungen:

(α) $F(x) \operatorname{sgn} x \rightarrow \infty$ für $|x| \rightarrow \infty$, (β) $g(x, t) \operatorname{sign} x \geq k_0$ für $|x| > \xi_0$, (γ) $|F(x)| > k_1^{-1} |G_t(x, t)/g(x, t)|$ für $|x| > \xi_1$, mit positiven Konstanten k_0, ξ_0, ξ_1 und $0 < k_1 < 1$, gilt dann: Für jedes x_0, \dot{x}_0 genügt die Lösung $x(t)$ von (1) mit $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ für $t > t_0(x_0, \dot{x}_0)$ den Schranken $|x(t)| < B, |\dot{x}(t)| < B$ mit einer Konstanten B , die von x_0, \dot{x}_0 unabhängig ist; es gibt mindestens eine ω -periodische Lösung. Fordert man zusätzlich (δ) $f(x) = f(-x), -g(x, t) = g(-x, t), g(x, t) = g(x, t + \omega/2), p(t) = -p(t + \omega/2)$, so existiert mindestens eine Lösung $x(t)$ von (1) mit $x(t) = -x(t + \omega/2)$. Als Spezialfälle erweisen sich zwei kürzlich von N. Minorsky betrachtete Typen von Differentialgleichungen. F. W. Schäfer.

Volpato, Mario: Sull'esistenza e unicità di soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII 3, 99—111 (1954).

Data l'equazione $\ddot{x} + \kappa^2 x = F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}), (\kappa > 0)$, con F definita nello strato $S: 0 \leq t \leq T, |x|, |\dot{x}|, |\ddot{x}| < \infty, [T > 0, T \neq 2n\pi/\kappa \text{ con } n = 0, 1, \dots]$, l'A. studia i due problemi dell'esistenza, e dell'esistenza ed unicità di una soluzione soddisfacente le condizioni $x(0) = x(T), \dot{x}(0) = \dot{x}(T)$ in ipotesi molto generali. La dimostrazione si fonda sulla riduzione del problema alla ricerca di un punto unito di una trasformazione funzionale in un insieme chiuso, convesso e compatto, e all'applicazione del principio di J. Schauder e R. Caccioppoli. Nella formula (13) vi è una svista di calcolo, e nella (15) al fattore $(\kappa T \operatorname{sen} \kappa T/2 - 1)$ deve sostituirsi $(|\kappa T| \operatorname{sen} \kappa T/2 + |\kappa| + 1)$, ma ciò non infirma la validità dei risultati. G. Sansone.

Reissig, Rolf: Erzwungene Schwingungen mit zäher Dämpfung und starker Gleitreibung. I. II. Math. Nachr. 11, 231—238; 12, 119—128 (1954).

In beiden Noten werden die durch die Differentialgleichung $\ddot{x} + g(\dot{x}) + \mu \operatorname{sgn} \dot{x} + f(x) = \Phi(\omega t)$ beschriebenen Bewegungen hinsichtlich ihres stationären Zustandes untersucht [$-f(x)$ die rücktreibende Kraft, $g(\dot{x})$ die zähe Dämpfung, $\mu \operatorname{sgn} \dot{x}$ mit $\mu > 0$ die (Coulombsche) Gleitreibung, $\Phi(\omega t)$ die stetige, periodische Triebkraft]; f und g seien dabei stetige und streng monoton wachsende Funktionen mit $f(0) = g(0) = 0$, die erste Note macht noch die zusätzliche Einschränkung $g(\dot{x}) = r\dot{x}$ und $f(x) = kx$. Das Hauptergebnis beider Noten ist: Bei starker Gleitreibung μ nähert sich die erzwungene Schwingung auch bei noch so großer Anfangsstörung asymptotisch immer dem Ruhezustand. St. Schottlander.

Reissig, Rolf: Erzwungene Schwingungen mit zäher und trockener Reibung. Math. Nachr. 11, 345—384 (1954).

Reissig, Rolf: Erzwungene Schwingungen mit zäher und trockener Reibung. — Ergänzung. Math. Nachr. 12, 249—252 (1954).

Reissig, Rolf: Erzwungene Schwingungen mit zäher und trockener Reibung. Abschätzung der Amplituden. Math. Nachr. 12, 283—300 (1954).

In diesen Noten wird der stationäre Zustand der durch die Differentialgleichung $\ddot{x} + 2D\dot{x} + \mu \operatorname{sgn} \dot{x} + f(x) = \Phi(\omega t)$ beschriebenen Bewegungen bei „mäßiger“ Gleitreibung μ eingehend untersucht. Folgende Ergebnisse werden erhalten: Eine periodische Bewegung besitzt die Frequenz des Erregers oder einen Bruchteil davon; pausenlose periodische Bewegungen finden aber nur im Takte des Erregers statt. Das schwingende System ist höchstens einer periodischen Bewegung fähig, und es gibt eine Anfangsstörung, die diese periodische Bewegung hervorruft. Zwei verschiedene Bewegungen gehen für $t \rightarrow \infty$ ineinander über, folglich nähern sich alle Bewegungen asymptotisch einer eindeutig bestimmten periodischen Bewegung (die auch eine „Stillstandsbewegung“, d. h. eine Bewegung mit eingeschalteten endlichen Ruhepausen, sein kann). Die letztgenannte Note gibt noch Abschätzungen für die

Amplitude der erzwungenen stationären Schwingung, die mit Hilfe des Phasendiagramms, also geometrisch, gewonnen werden. Die Resultate gelten auch noch für den Fall großer Flüssigkeitsdämpfung *D*.
St. Schottlander.

Heywood, Philip: On the asymptotic distribution of eigenvalues. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 456—470 (1954).

Sei $h(0) = 0$, $h'(x) > 0$ für $x > 0$, $\int_0^\infty dx/\{h(x)\}^{1/2} < \infty$ und $h''(x) > 0$ (oder < 0) für genügend große x . Ist außerdem (1) $h'(x) = O\{h(x)\}^{\frac{1}{2} + \epsilon}$ mit $0 < \epsilon < \frac{3}{2}$, so gehört, auf Grund eines Satzes von D. B. Sears-E. C. Titchmarsh (dies. Zbl. 39, 102), die Randwertaufgabe (2) $y'' + (\lambda + h(x))y = 0$; (3) $y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$ dem Grenzkreisfall an. Verf. ersetzt (1) durch die schärfere Bedingung (4) $h''(x) = O\{h'(x)\}^{\frac{1}{2} + \gamma}$ mit $1 < \gamma < \frac{4}{3}$ und fügt noch die Bedingung: (5) $h'(x)\{h(x)\}^{\frac{1}{2}}$ mit $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ist für genügend große x monoton abnehmend, hinzu. Unter diesen Voraussetzungen wird das asymptotische Verhalten der Anzahl $E(\lambda)$ der zwischen 0 und λ ($\lambda > 0$) sowie der Anzahl $F(\mu)$ der zwischen 0 und $-\mu$ ($\mu < 0$) liegenden Eigenwerte von (2) und (3) untersucht. Verf. beweist: Es ist

$$E(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [(\lambda + h(x))^{1/2} - (h(x))^{1/2}] dx + O(1)$$

$$\text{und } F(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{p(\mu)} (h(x))^{1/2} dx - \frac{1}{\pi} \int_{p(\mu)}^\infty [(h(x))^{1/2} - (h(x) - \mu)^{1/2}] dx + O(1).$$

Dabei ist $p(\mu)$ mittels $h(p) = \mu$ erklärt. (4) und (5) werden bei der Behandlung von $F(\mu)$ ausgenutzt, während bei $E(\lambda)$ schon (1) zum Ziele führt. Beweisordnung: Anschließend an eine Beweisidee von P. Hartman (J. London math. Soc. 27, 492—496 (1952)) werden die Anzahlfunktionen $E_b(\lambda)$ bzw. $F_b(\mu)$ der positiven bzw. negativen Eigenwerte $\lambda_{b,p}$ von (2), (3) und $y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$ abgeschätzt, und es wird gezeigt, daß die vorkommenden O -Terme gleichmäßig in bezug auf b bestehen. Der Grenzübergang $b \rightarrow \infty$ wird im Rahmen der E. C. Titchmarshschen Theorie durchgeführt, indem gezeigt wird, daß der Grenzkreis $m(\lambda, x)$ eine meromorphe Funktion ist, mit Polen in den Punkten $\lim \lambda_{b,p}$, wobei b über eine Auswahlfolge nach ∞ strebt.
V. G. Avakumović.

Zadiraka, K. V.: Konstruktion von zweiseitigen Approximationen für die Eigenwerte des eindimensionalen selbstadjungierten Randwertproblems vierter Ordnung. Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR 1954, 243—248 und russ. Zusammenfassg. 249 (1954) [Ukrainisch].

Im § 1 wird ein Verfahren zur Konstruktion von oberen und unteren Approximationen für die Lösung einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung mit variablen Koeffizienten und vorgegebenen Anfangsbedingungen dargestellt. Die monotone Konvergenz dieser Approximationen gegen die Lösung sowie die ihrer Ableitungen gegen die entsprechenden Ableitungen der Lösung der gegebenen Gleichung, wenn die Funktion von S. A. Čaplygin als Ausgangsapproximation angenommen ist, wird bewiesen. — Im § 2 werden die erhaltenen Folgen der oberen und unteren Approximationen zur Konstruktion monoton konvergierender Folgen von oberen und unteren Approximationen für die Eigenwerte des folgenden Randwertproblems verwendet: $d^4 y/dx^4 + q(x)y = \lambda r(x)y$, $\alpha_1 y(0) + \beta_1 y''(0) = 0$, $\gamma_1 y'(0) + \delta_1 y'''(0) = 0$, $\alpha_2 y(l) + \beta_2 y''(l) = 0$, $\gamma_2 y'(l) + \delta_2 y'''(l) = 0$.
Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Fage, M. K.: Über eine Verallgemeinerung der Spektraltheorie linearer Operatoren (auf Grund der Exponentialfunktion). Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 95, 721—724 (1954) [Russisch].

L'A. annonce divers résultats relatifs au prolongement analytique ou à l'ordre de croissance à l'infini de la résolvante R d'un opérateur A ou de la transformée de Borel de R . L'A. étudie le cas où A est l'inverse d'un opérateur différentiel L sur R .
J. L. Lions.

Fage, M. K.: Die charakteristische Funktion der einpunktigen Randwertaufgabe für eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 929—932 (1954) [Russisch].

Suite d'une note antérieure (cf. ci-dessus). L'A. étudie de façon plus précise le cas où L est un opérateur du deuxième ordre. *J. L. Lions.*

Fage, M. K.: Reduktion des Cauchyschen Problems für eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auf die einfachste Gestalt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **99**, 909—912 (1954) [Russisch].

Par utilisation de deux notes antérieures (cf. ci-dessus) l'A. donne des résultats essentiellement contenus dans V. A. Marčenko (ce Zbl. **48**, 325). *J. L. Lions.*

Demidovič, B. P.: Über einige Sätze der Mittelbildung für gewöhnliche Differentialgleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. **35** (77), 73—92 (1954) [Russisch].

Ausführlicher Beweis des in dies. Zbl. **57**, 322 zitierten Satzes, der unter Ausnützung der Lipschitzbedingung mit der Methode der sukzessiven Approximation geführt wird. Es werden Spezialfälle ausführlich betrachtet, insbesondere lineare Systeme. *L. Schmetterer.*

Nemyckij, V. V.: Einige Probleme der qualitativen Theorie der Differentialgleichungen. (Übersicht über die moderne Literatur.) Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 3 (61), 39—56 (1954) [Russisch].

Nach Verf. hat die qualitative Theorie der Differentialgleichungen, die in den letzten Jahren zu einem der populärsten mathematischen Forschungsgebiete geworden ist, Grundbegriffe und Methodik von der modernen Physik und Technik übernommen; die Mathematik war insofern zurückgeblieben, als sie hauptsächlich Probleme lokalen Charakters behandelte, während für die Anwendungen vor allem das Verhalten der Integralkurven im Großen interessiert. — 1. In der qualitativen Theorie in der Ebene wird das System $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ im Großen untersucht. Poincarés und Bendixsons Ergebnisse über das Verhalten der Integralkurven in Bereichen mit endlich vielen singulären Punkten sind von Solncev [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **9**, 233—240 (1945)] und Vinograd [Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski Nauk **135**, Mat. V (1952)] zur Klassifikation der in der Ebene überhaupt möglichen Integralkurven erweitert worden. An Bendixsons Existenzsatz für eine geschlossene Integralkurve im Ringbereich knüpfen Untersuchungen Filippovs (dies. Zbl. **46**, 317), Dragilevs (dies. Zbl. **46**, 97) und de Castros (dies. Zbl. **52**, 91) über die Gleichung $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ an. Filippovs und Dragilevs Methode gestattet eine Abschätzung der Lage der Grenzzyklen. Gomory und Richmond (dies. Zbl. **43**, 125) benutzen die Vergleichsmethode, die im Anschluß an Caplygins Lemma von Dragilev (l. c.) formuliert worden ist: Gegeben seien die Systeme (A) $\ddot{x} = -f(x, v)v - g(x)$, $\dot{x} = v$ und (B), das ebenso wie (A) mit einer Funktion f^* statt f gebildet ist. Wenn 1. $f(x, v)$ und $f^*(x, v)$ stetig sind und in jedem beschränkten Bereich außerhalb der x -Achse einer Lipschitzbedingung genügen, 2. $f(x, v) < 0$ in einer Umgebung des Nullpunktes, 3. $xg(x) > 0$ für $|x| > 0$ und 4. $f(x, v) \geq f^*(x, v)$, so umschließt eine periodische Lösung von (B), falls sie existiert, ein Gebiet, in dem eine periodische Lösung von (A) liegt. Die Bedingungen, denen $f(x, v)$ und $g(x)$ genügen müssen, damit eine vorgeschriebene Anzahl von Grenzzyklen auftritt, haben Duff, Levinson, Eckweiler und Diliberto untersucht. — In den Anwendungen spielen Systeme mit zylindrischem Phasenraum eine große Rolle; sie können periodische Lösungen besitzen, ohne daß singuläre Punkte auftreten. Vgl. hierzu Americo, dies. Zbl. **37**, 189, Cartwright, dies. Zbl. **39**, 99 und Reuter, dies. Zbl. **48**, 69. — Zum Stabilitätsproblem im Großen gehören zwei klassische Fragen: 1. die Frage nach dem Zentrum, d. h. einem Punkte, in dessen Umgebung alle Lösungen periodisch sind, 2. die Abschätzung des Anziehungsbereiches eines singulären Punktes. Frage 1. ist wenig bearbeitet, 2. in der Sowjetunion intensiv behandelt worden. Barbašin und Krasovskij (dies. Zbl. **47**, 339) verbessern Ljapunovs Stabilitätskriterium: Wenn Ljapunovs Bedingungen erfüllt sind und die Ljapunovsche Funktion $v(x_1, x_2, \dots)$ mit $\sum_i x_i^2$ gegen unendlich strebt, so ist der Nullpunkt des Systems im Großen stabil. Hieraus

erhält man in konkreten Fällen Stabilitätskriterien im Großen; am schwierigsten ist dabei die Aufstellung der Ljapunovschen Funktionen. Erugin [Priklad. Mat. Mech. **14**, 315 (1950); dies. Zbl. **39**, 95, 96, **43**, 183, **46**, 317, **47**, 179], Malkin (dies. Zbl. **39**, 96, **42**, 97, 98, 329, **43**, 310, **46**, 97, **47**, 179, **53**, 58) und Eršov (dies. Zbl. **51**, 409) untersuchen besonders genau das in der Theorie der automatischen Regelung vorkommende System

$$\dot{x}/dt = f_1(x) + \varphi_1(y), \quad \dot{y}/dt = f_2(x) + \varphi_2(y).$$

Stebakov (dies. Zbl. **46**, 94) gibt eine Methode zur Konstruktion zweier gebrochener Streckenzüge, zwischen denen eine Integralkurve durch einen gegebenen Punkt liegt. — Zur Abhängigkeit der Integralkurven von Parametern vgl. De Baggis, dies. Zbl. **47**, 330. Auf ähnliche Art hat Bautin (dies. Zbl. **46**, 94) bewiesen: Wenn $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ Polynome zweiten Grades sind, gibt es in der Umgebung des Nullpunktes höchstens drei Grenzzyklen, und es kann genau drei geben. Leontovič (dies. Zbl. **42**, 328) untersucht die Entstehung der Grenzzyklen aus der Separatrix. Für das spezielle System $\dot{x} = P(x, y, \lambda)$, $\dot{y} = Q(x, y, \lambda)$, x reeller Parameter,

$P(x, y, \lambda) = P(x, y, \lambda + \pi) = P(x, y, \lambda + 2\pi)$, $Q(x, y, \lambda) = Q(x, y, \lambda + \pi) = Q(x, y, \lambda + 2\pi)$, das nur isolierte singuläre Punkte besitzen soll, untersucht Duff (dies. Zbl. **50**, 91) die Veränderung der Grenzzyklen in Abhängigkeit von λ und ihr Entstehen aus singulären Punkten. — II. Räumliche Aufgaben: Der „kritische Fall“, in dem kleine Änderung der Koeffizienten sprunghafte Veränderung des topologischen Verhaltens der Integralkurven bewirkt, bleibt außer Betracht. Grobman (dies. Zbl. **46**, 317, **47**, 86) hat bewiesen: 1. Wenn die charakteristische Gleichung zwei Wurzeln besitzt, deren Realteile verschiedene Vorzeichen haben, so verlassen fast alle Lösungen für $t \rightarrow +\infty$ und für $t \rightarrow -\infty$ eine hinreichend kleine Umgebung des Nullpunktes; die Ausnahmen fallen eine Mannigfaltigkeit niedrigerer Dimension aus. 2. Wenn die Realteile der Wurzeln alle gleiches Vorzeichen haben, gehen entweder für $t \rightarrow +\infty$ oder für $t \rightarrow -\infty$ alle Integralkurven durch den Nullpunkt. 3. Die Gesamtheit der Integralkurven zerfällt nach ihrem asymptotischen Verhalten in endlich viele Klassen. — Nach Ważewski (dies. Zbl. **36**, 197) hat, falls die Realteile der Wurzeln der Bedingung

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = \lambda = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_{k+p} = \lambda_{k+p+1} = \dots = \lambda_n$$

genügen, die Menge der Integralkurven, welche die Koordinatenebene (x_k, \dots, x_{k+p}) im Nullpunkt berühren, die Dimension $k - p$. Vollständig beschreiben läßt sich das Verhalten der Integralkurven in der Umgebung eines singulären Punktes nur bei zusätzlichen Voraussetzungen über die inhomogenen Glieder $q_i(t, x_1, \dots, x_n)$. Grobman (dies. Zbl. **47**, 86) betrachtet die Systeme $dx/dt = A x + \varphi$ und $d\bar{x}/dt = A \bar{x}$, wo $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$; wenn die Form der Integralkurven beider Systeme asymptotisch äquivalent sein soll, muß in $q(t, \bar{x}) - q(t, \bar{x}) = g(t) \cdot \bar{x} - x$ die Funktion $g(t)$ ein gewisses asymptotisches Verhalten zeigen. Die Integralkurven mit negativen charakteristischen Exponenten sind asymptotisch äquivalent, wenn

$$q(t, \bar{x}) - q(t, \bar{x}) = \beta(r) \cdot \bar{x} - x, \quad \beta(r) = k \ln r^{-2m-1-\epsilon},$$

wobei k und ϵ positive Zahlen sind, $r = \max |x_i|, |\bar{x}_i|$, und $m+1$ die Maximalordnung derjenigen Matrizenkasten ist, die den Wurzeln mit negativen Realteilen entsprechen. — Hat die charakteristische Gleichung Wurzeln, die gleich Null sind, so ist über das Verhalten der Lösungen wenig bekannt; vgl. J. Haag, Bull. Sci. math., II. Sér. **70**, 21–36, 155–172 (1946) und Šestakov, dies. Zbl. **38**, 252, **41**, 54. Für die Stabilitätsfrage ist die klassische direkte Untersuchungsmethode bei den Anwendungen am fruchtbarsten; vgl. z. B. Luré, Einige nicht-lineare Aufgaben der Theorie der automatischen Regelung (Moskau 1951, russisch) und Ajzerman, Theorie der automatischen Regelung von Motoren (Moskau 1952, russisch). Theoretisch interessant sind die Ergebnisse von Massera (dies. Zbl. **38**, 250) und Barbašin (dies. Zbl. **41**, 91), die unabhängig voneinander die Umkehrung des Ljapunovschen Theorems über die asymptotische Stabilität formuliert haben. Barbašin stellt fest: Wenn eine kompakte, zusammenhängende invariante Menge F ihre hinreichend kleine Umgebung nur in endlich viele Teile teilt und asymptotische Menge ist, so existiert in einer gewissen Umgebung von F eine stetige Funktion v , die dort eine stetige Ableitung nach der Zeit hat, den Bedingungen $v > 0$ und $v' < 0$ genügt und auf F verschwindet. Dieselben Bedingungen für v genügen für Stabilität. — Die qualitativen Untersuchungen für mehrdimensionale Systeme im Großen befinden sich noch im Anfangsstadium. Barbašin und Krasovskij (dies. Zbl. **47**, 330) geben hinreichende Bedingungen für die Stabilität im Großen, ausgedrückt durch Ljapunovsche Funktionen. Für spezielle Systeme werden diese Funktionen auch tatsächlich konstruiert (Barbašin, dies. Zbl. **47**, 86; Krasovskij, dies. Zbl. **52**, 318). Zur Existenz periodischer Lösungen vgl. Malkin, Die Methoden Ljapunovs und Poincarés in der Theorie der nicht-linearen Schwingungen (dies. Zbl. **41**, 527).

III. Für lineare Systeme mit veränderlichen Koeffizienten erzielt man die besten Resultate durch Vergleichssysteme mit konstanten Koeffizienten. Eine sehr gute asymptotische Formel gibt Grobman (dies. Zbl. **47**, 86). Es seien

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j,$$

$$(2) \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j$$

($i = 1, 2, \dots, n$) das gegebene und das Vergleichssystem; $m_k + 1$ sei die Ordnung des größten Kastens der Matrix (b_{ij}) in Jordanscher Form, ω_k der Realteil des zugehörigen Eigenwertes.

Dann folgt aus $\int_{t_0}^{\infty} e^{m_k t} g(t) dt < \infty$ mit $g(t) = a_{ij}(t) - b_{ij}$, daß die Lösungen von (2), die den Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit dem Realteil ω_k entsprechen, und die Lösungen von (1) mit dem charakteristischen Exponenten ω_k einander eindeutig und stetig zugeordnet werden können, wobei für entsprechende Lösungen $|x - y| = o(e^{\omega_k t})$ gilt, d. h.: die Lösungen x haben die asymptotische Darstellung $x = y + o(e^{\omega_k t})$. Hieraus folgt die weniger genaue asymptotische Darstellung $x = y + o(x)$; vgl. E. Levi, dies. Zbl. **40**, 337. Für eine andere asymptotische Formel sei auf Levinson, dies. Zbl. **40**, 197 verwiesen. — Sind die Realteile der Wurzeln der charakteristischen Gleichung $A = \lambda E, \lambda = 0$ nicht alle von Null verschieden, so ist die Stabilitätsfrage ungeklärt. Demidovič nimmt das System $dx/dt = A x + \Phi(t) x$ mit

einer verschwindenden Wurzel und sucht dafür eine „lineare Annäherung“ $\varrho_n^0(t)$ [vgl. hierzu dies. Zbl. 45, 44; s. a. dies. Zbl. 39, 316]. Unter Voraussetzungen über das asymptotische Verhalten von $\varrho_n^0(t)$ werden Stabilitätskriterien gegeben. — Gavrilov (dies. Zbl. 46, 96) stellt ohne

Beweis ein sehr starkes Stabilitätskriterium für das System $\frac{dx_i}{dt} = \sum_k a_{ik} x_k + \sum_k \omega_{ik}(t) x_k$

auf; dabei wird die konstante Matrix (a_{ik}) in Jordanscher Form angenommen, die $\omega_{ik}(t)$ sind für $t \geq t_0$ stetig, außerdem soll $\omega_{ik}(t)$ für $i \neq k$ entweder auf $[t_0, \infty]$ absolut integrierbar sein oder für $t \rightarrow \infty$ gegen Null streben und für $i = k$ auf $t \geq t_0$ beschränkt sein. Die triviale Lösung ist im Ljapunovschen Sinne stabil, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist: 1. Wenn λ_s mehrfache Wurzel der charakteristischen Gleichung ist und die Ordnung des Elementarteilers $l_s > 0$ ist, so gilt $\operatorname{Re} \lambda_s < 0$. 2. Wenn λ_s einfache oder mehrfache Wurzel und $l_s = 1$ ist, so gilt $\operatorname{Re} \lambda_s \leq 0$, wobei im Falle $\operatorname{Re} \lambda_s = 0$ noch verlangt wird:

$$a) \int_{t_0}^t \omega_{ss}(\tau) d\tau < \infty \quad (k \neq s), \quad b) \int_{t_0}^t \omega_{ss}(\tau) d\tau \text{ ist beschränkt}$$

für $t \geq t_0$. Für veränderliche Matrix des Vergleichssystems ist die Stabilitätsfrage wenig erforscht. — Vinograd (dies. Zbl. 53, 63) gibt ein Beispiel dafür, daß die charakteristischen Exponenten eines regulären Systems (aus nur zwei Gleichungen) sich bei Veränderung der freien Glieder nicht stetig verhalten. — Außer der Vergleichsmethode gestattet auch die Beschaffenheit der Koeffizienten eines linearen Systems Aussagen über die qualitativen Eigenschaften der Lösungen. Verf. verzichtet hier auf die Betrachtung der Systeme mit periodischen Koeffizienten und beschränkten Lösungen und behandelt nur die allgemeinen Lösungsmethoden. Gorbunovs Arbeiten [Vestnik Moskovsk. Univ. 5, Nr. 10 (1950), 6, Nr. 6 (1951), Nr. 12 (1952)] entwickeln die zweite Ljapunovsche Methode weiter. Es sei $dx/dt = E(t)x$, x eine Spalte, $E(t)$ eine stetige

quadratische Matrix; $G(t, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(t) x_i x_k$, $a_{ik} = a_{ki}$, eine gegebene quadratische Form; $g(t, x) = dG(t, x)/dt$, $N_g(t) = \max_{G(t,x)=1} g(t, x)$; $A_n = ||a_{ij}||$ und A_{n-1}^s die Determinante, die aus A_n durch Streichen der s -ten Zeile und Spalte entsteht. Dann gilt die (in gewissem Sinne bestmögliche) Abschätzung

$$|x_s| \leq \left[G(t_0, x_0) \frac{A_{n-1}^s(t)}{A_n(t)} \exp \left(\int_{t_0}^t N_g(\tau) d\tau \right) \right]^{1/2}.$$

Für das inhomogene System $dy/dt = L(t)y + f(t)$ sei $g(t, y) = y'[dA/dt + L'A + A L]y$, $h(t, y) = f'Ay + y'Af = 2 \sum_{j,k} a_{jk}(t) y_j f_k$; dann gilt mit $N_g(t) = \max_{G(t,y)=1} g(t, y)$, $Q_g(t) = \max_{G(t,y)=1} h(t, y)$ für die Koordinaten der Lösungen die Abschätzung

$$|y_s| \leq \left[G(t_0, y_0) \frac{A_{n-1}^s(t)}{A_n(t)} \exp \left(\int_{t_0}^t N_g(\tau) d\tau \right) \right]^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{A_{n-1}^s(t)}{A_n(t)} \right)^2 \int_{t_0}^t Q_g(\xi) d\xi \cdot \exp \left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t N_g(\tau) d\tau \right)$$

($s = 1, 2, \dots, n$; $t \geq t_0$). Sie gestattet es, in manchen Fällen den Wertebereich der Parameter so auszuwählen, daß die Lösungen stabil sind. Vinograd (dies. Zbl. 46, 95, 47, 85) erhält für Systeme aus zwei Differentialgleichungen Stabilitätskriterien, die Verallgemeinerungen bekannter Resultate für Systeme mit konstanten Koeffizienten sind. Zu den Fragen, die in dieser Arbeit nicht berührt werden, gehört die Theorie der Lineargleichungen zweiter Ordnung und die allgemeine Theorie der dynamischen Systeme.

H. Bilharz-P. Sagirow.

El'sin, M. I.: Qualitative Untersuchung eines Systems von zwei linearen homogenen Gleichungen erster Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 5–8 (1954) [Russisch].

Fortführung einer Reihe von Arbeiten des Verf. [vgl. dies. Zbl. 36, 337; 41, 57; Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 68, 221–224 (1949); 69, 7–10 (1949)]. Eine dort eingeführte Methode zur qualitativen Untersuchung des Verhaltens der Lösung einer linearen, homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung, die die Methode der veränderlichen Frequenzen genannt wird, wird ausgedehnt auf das System von zwei derartigen Gleichungen erster Ordnung: $x' = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y$, $y' = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y$ mit im Intervall $a \leq t \leq b$ stetigen Koeffizientenfunktionen $a_{ik}(t)$ ($a = -\infty$, $b = +\infty$ zugelassen). Durch Einführung neuer Veränderlicher und Funktionen

$$(x = \int_{t_0}^t a_{12} d\xi, \quad x = u \exp \int_{t_0}^t z d\xi, \quad y = v \exp \int_{t_0}^t z d\xi, \quad z = a_{11})$$

wird das System in

den Intervallen, in denen $a_{12} \neq 0$ ist, zurückgeführt auf die Gleichung 2. Ordnung $d^2u/d\tau^2 + (b_{11} - b_{22})b_{12}^{-1} du/d\tau - b_{21}b_{12}u = 0$ mit $b_{ik}(\tau) = a_{ik}[t(\tau)]$. Deren Lösung kann mit Hilfe der erwähnten Methode dargestellt werden in der Form

$$u = c_1 \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\frac{b_{22} - b_{11}}{b_{12}} - \frac{\omega'}{\omega} \right) d\xi \right] \cos \left(\int_0^\tau \omega d\xi + c_2 \right)$$

mit einer glatten, von Null verschiedenen Hilfsfunktion $\omega = \omega(\tau)$, der veränderlichen Frequenz. Diese Darstellung der Lösung unterscheidet sich in der Amplitude und dem Charakter von ω von ähnlichen Darstellungen, die Milne [Trans. Amer. math. Soc. **30**, 797–802 (1928)] und Milloux (dies. Zbl. **9**, 164) gegeben haben. Für das ursprüngliche System ergibt sich daraus die Parameterdarstellung der Lösung

$$x = u(t) \exp \int_{t_0}^t a_{11} d\xi, \quad y = v_1(t) \exp \int_{t_0}^t a_{22} d\xi, \quad \text{wo } v_1 \text{ eine entsprechende Bedeutung}$$

hat wie u und bei $a_{21} \neq 0$ durch $v = \int_{t_0}^t a_{21} d\xi, \quad z = a_{22}$ aus einer analogen

Differentialgleichung 2. Ordnung gewonnen wird. Diese gestattet es, auf Grund der Ergebnisse der früheren Arbeiten des Verf. den Charakter der Bahnkurven des Systems qualitativ zu untersuchen, insbesondere die Natur der auftretenden Schwingungen. Weitere Aussagen über die Form der Schwingungen erhält man durch Transformation des gegebenen Systems auf Polarkoordinaten ϱ und q und daraus sich ergebenden beiderseitigen Abschätzungen für q' und ϱ'/ϱ durch die Koeffizienten a_{ik} . Es zeigt sich, daß ein Wechsel des Vorzeichens von a_{12} oder a_{21} die Existenz von Extremwerten für den Polarwinkel q der Bahnkurven des Systems nach sich zieht. Dadurch besteht die Möglichkeit des Nichtbestehens des Sturmischen Satzes über die Trennung der Wurzeln für die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$. Dabei nehmen die Bahnkurven eine Zickzackform an und bilden Schleifen, die den Nullpunkt nicht enthalten. Es werden Kriterien dafür gegeben, wie oft die Bahnkurven den Nullpunkt passieren, wann sie Spiralförmig haben, wann die Schwingungen der Abszissen und Ordinaten des Kurvenpunktes erlöschen und wann sie beschränkt bzw. nicht beschränkt sind.

E. Svenson.

Gorbulov, A. D.: Über gewisse Eigenschaften der Lösungen von Systemen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen. Vestnik Moskovsk. Univ. **7**, Nr. 12 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 8), 3–16 (1952) [Russisch].

Die Lösungen $y_i = y_i(t, \tau, \eta_j)$ eines Systems $\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n L_{ij}(t) y_j + f_i(t)$; ($i = 1, \dots, n$) bilden in leicht zu übersiehender Weise den Raum R_t der Anfangswerte η_j affin auf den Raum R der y_j ab, so daß eine „Fläche“ zweiter Ordnung wieder in eine solche gleicher Art übergeht. Verf. benützt dies, um für die Lösungen, deren Anfangswerte η_j einem „Ellipsoid“ $\sum_{i,k} a_{ik} \eta_i \eta_k = \delta^2$ (mit positiv definiten quadratischen Form $\sum_{i,k} a_{ik} \eta_i \eta_k$) angehören, bei festem t durch Bestimmung der Extremwerte der y_i Abschätzungen zu gewinnen.

Adam Schmidt.

Gorbulov, A. D.: Über Abschätzungen der Koordinaten der Lösungen von Systemen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen. Vestnik Moskovsk. Univ. **9**, Nr. 5 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 3), 27–31 (1954) [Russisch].

Ergänzungen zu der vorstehend besprochenen Arbeit.

Adam Schmidt.

Jakubovič, V. A.: Abschätzungen für die charakteristischen Exponenten eines Systems von linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Priklad. Mat. Mech. **18**, 533–546 (1954) [Russisch].

Let $\dot{x} = A(t)x$, A periodic matrix with period ω , let $G(t)$ be any positive definite Hermitian matrix and $q_i(t)$, $i = 1, 2$, be the smallest and largest characteristic roots of the Hermitian matrix $\dot{G} + G(A + A^*G)$. Then, if λ is any characteristic

exponent of the system, $\frac{1}{2\omega} \int_0^\omega q_1(t) dt \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \frac{1}{2\omega} \int_0^\omega q_2(t) dt$. There are matrices G such that these bounds are arbitrarily near the smallest and largest values of $\operatorname{Re} \lambda$. This result is successfully applied to derive sufficient criteria of stability for several particular second order systems. Bounds of $\operatorname{Re} \lambda$ are also found in the case of second order canonical systems, but the construction of these bounds is too complicated to be summarized here.

J. L. Massera.

Sibuya, Yasutaka: Sur un système des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients périodiques et contenant des paramètres. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I **7**, 229—241 (1954).

Considérons les équations différentielles linéaires contenant les paramètres z_1, \dots, z_r :

$$(1) \quad \frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t, z_1, \dots, z_r) x_k \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

où $a_{jk}(t, z_1, \dots, z_r)$ sont des fonctions holomorphes par rapport à z_1, \dots, z_r pour $z_1 = \dots = z_r = 0$ et périodiques avec la période ω par rapport à t . On peut déterminer la transformation linéaire

$$x_j = \sum_{k=1}^n p_{jk}(t, z_1, \dots, z_r) y_k \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

de manière que le système (1) se change formellement en un système indépendant de t :

$$(2) \quad \frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^n b_{jk}(z_1, \dots, z_r) y_k \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

où $p_{jk}(t, z_1, \dots, z_r)$ sont des séries entières formelles en z_1, \dots, z_r ayant la période ω par rapport à t . L'A. cherche la condition nécessaire et suffisante pour la convergence des séries formelles $p_{jk}(t, z_1, \dots, z_r)$. Il traite aussi le problème analogue relatif aux équations différentielles linéaires non homogènes.

M. Hukuhara.

Sibuya, Yasutaka: Sur les solutions périodiques d'un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients périodiques. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I **7**, 243—254 (1954).

On considère les équations non linéaires

$$dx_j/dt = f_j(t, x_1, \dots, x_n) = \lambda_j x_j + \delta_j x_{j-1} + (x_1, \dots, x_n; t)_2$$

($j = 1, 2, \dots, n$) et on suppose que les f_j admettent une période réelle ω et que $\lambda_j \equiv 0 \pmod{2\pi i/\omega}$ pour $j = 1, \dots, r$ et $\lambda_j \not\equiv 0 \pmod{2\pi i/\omega}$ pour $j = r+1, \dots, n$. Les résultats principaux sont les suivants. Si une solution formelle

$$(1) \quad x_j = \sum' \psi_{jk_1 \dots k_r}(t) \eta_1^{k_1} \dots \eta_r^{k_r} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

admet une période ω , la condition nécessaire et suffisante pour la convergence est que les séries formelles

$$\sum' \eta_1^{k_1} \dots \eta_r^{k_r} \int_0^\omega \psi_{jk_1 \dots k_r}(t) dt \quad (j = 1, \dots, r)$$

convergent. Il existe une solution formelle

$$(2) \quad x_j = \begin{cases} C_j e^{\lambda_j t} + (C_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, C_r e^{\lambda_r t})_2 & (j = 1, \dots, r) \\ (C_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, C_r e^{\lambda_r t})_2 & (j = r+1, \dots, n) \end{cases}$$

et la solution (1) s'obtient en remplaçant dans (2) les C_1, \dots, C_r par des séries entières convenables en η_1, \dots, η_r : $C_j = (\eta_1, \dots, \eta_r)$ ($j = 1, \dots, r$). *M. Hukuhara.*

Hale, Jack K.: Periodic solutions of non-linear systems of differential equations. Rivista Mat. Univ. Parma **5**, 281—311 (1954).

General theorems are proved concerning the existence of periodic solutions of autonomous weakly non-linear differential systems. Here some of the new results: I. Consider the system (1) $x_j'' + \sigma_j^2 x_j = \varepsilon q_j(x, x', \varepsilon)$, $j = 1, \dots, n$, where

$x = (x_1, \dots, x_r)$, $x' = (x'_1, \dots, x'_r)$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ are distinct positive numbers such that $m\sigma_j + \sigma_k \neq 0$, $j \neq k$, $j = 1, \dots, n$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, and each $q_j(x, x', \varepsilon)$ is analytic for $|x|, |x'| \leq A$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, and also (2) $q_j(x, -x', \varepsilon) = -q_j(x, x', \varepsilon)$, $j = 1, \dots, n$. Then, for ε sufficiently small and every complex number a , $|a| \leq A$, there exists a solution of (1) of the form (3) $x_j = a\sigma_j^{-1} \sin(\tau t + q) + \varepsilon W_j(\tau t + q, \varepsilon)$, $x'_k = \varepsilon W'_k(\tau t + q, \varepsilon)$, $k \neq j$, $k = 1, \dots, n$, where all $W_x(\tau t + q, \varepsilon)$ are analytic functions of ε with coefficients which are periodic of period 2π in $\tau t + q$, q an arbitrary constant, and τ is defined by $\tau = \sigma_j + b_1 \varepsilon + b_2 \varepsilon^2 + \dots$ and the b_k are constant depending on σ, a . As j takes on the values $j = 1, \dots, n$, there exist n such systems (3) of periodic solutions, each depending upon the two parameters $|a| \leq A$, q arbitrary. II. the same as I. where (2) is replaced by (4) $q_j(x, -x', \varepsilon) = -q_j(x, x', \varepsilon)$, $q_j(-x, x', \varepsilon) = -q_j(x, x', \varepsilon)$. — Other theorems are given, and all apply even in cases where the classical Jacobian of the perturbation theory vanishes. The method of successive approximations is proved to be convergent and is based on casting out terms including the secular ones. The method is a variant of the one successively developed by L. Cesari [Mem. Accad. Italia, (6) 11, 633–692 (1940)], J. K. Hale [same journal, 5, 63–81; 137–167 (1954)], R. A. Gambill [same journal, 5, 169–181 (1954); 6, 37–43 (1955)], R. A. Gambill and J. K. Hale [J. rat. Mech. Analysis 5, 353–394 (1956)]. L. Cesari.

Urbane, Minoru: Infinitesimal deformation of the periodic solution of the second kind and its application to the equation of a pendulum. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 18, 183–219 (1954).

A system of differential equations (1) $dx/dt = P(x, \theta)$, $d\theta/dt = Q(x, \theta)$ is considered, where P and Q are continuous with regard to (x, θ) , analytic with regard to x and periodic with respect to θ for $|x|, |\theta| < \infty$. Moreover it is supposed that the solutions of (1) are unique. The behaviour of periodic solutions of the second kind, that is to say of the solutions corresponding to periodic solutions of the equation $dx/d\theta = P/Q$, is examined by the method of infinitesimal deformation. This method has been previously applied by the author to the investigation of the behaviour of cycles (this Zbl. 57, 73). The results of the general theory of infinitesimal deformation of periodic solutions, established in the first chapter of the paper, are then applied in the second chapter to the equation of a pendulum $d^2\theta/dt^2 + \chi f(\theta) d\theta/dt + g(\theta) = 0$, where f and g are periodic integral functions and $f > 0$. It is shown that for a certain range of χ , there exists a unique stable or unstable solution of the second kind, and the boundary values of that range of χ are determined in the third chapter. J. Szarski.

Birjuk, G. I.: Über einen Existenzsatz für fastperiodische Lösungen gewisser Systeme von nicht-linearen Differentialgleichungen mit einem kleinen Parameter. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 5–7 (1954) [Russisch].

Unter gewissen Bedingungen für die konstante quadratische Matrix A und den hinsichtlich t fastperiodischen Vektor $F(t, x)$ besitzt die Differentialgleichung $dx/dt = A x + \varepsilon F(t, x)$ für hinreichend kleine ε eine eindeutig bestimmte fastperiodische Lösung. A. Schmidt.

Sestini, Giorgio: Criterio di stabilità in un problema non lineare di meccanica dei sistemi a più gradi di libertà. Rivista Mat. Univ. Parma 5, 227–232 (1954).

L'A. dimostra il seguente criterio di stabilità: Dato il sistema (1) $\dot{P} = G(P) + R(P, \dot{P}) + F(t)$, dove G, F, R sono dei vettori, se risultano soddisfatte le seguenti ipotesi: i) le componenti $g_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$ del vettore G soddisfino le condizioni $x_i g_i \geq 0$, $g_i \geq \omega^2 x_i$, ($\omega = \text{cost.}$); ii) le componenti $r_i(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ del vettore R , per ogni sistema di valori finiti di x_1, \dots, x_n , sono uniformemente limitate rispetto a x_1, \dots, x_n e soddisfano le condizioni $r_i \dot{x}_i \rightarrow 0$, $\lim_{|\dot{x}_i| \rightarrow +\infty} r_i = +\infty$;

iii) le componenti $f_i - f_i(t)$ di F sono funzioni continue e a variazione limitata in (t_0, ∞) ; allora, se $x_i(t)$ sono le componenti di una soluzione del sistema, le $x_i(t)$ e le $\dot{x}_i(t)$ sono limitate. G. Sansone.

Krasovskij, N. N.: Über die Stabilität im Großen der Lösung eines nicht-linearen Differentialgleichungssystems. Priklad. Mat. Mech. **18**, 735—737 (1954) [Russisch].

Let $\dot{x} = X(x)$ where the real n -vector function X is defined and $\in C^1$ in the whole space, $X(0) = 0$; let J be the Jacobian matrix. If there is a constant symmetric matrix A with positive characteristic roots such that the characteristic roots $\lambda_i(x)$ of $(A J + J' A)/2$ satisfy $\lambda_i \leq -\delta < 0$, the solution $x = 0$ is asymptotically stable in the large. J. L. Massera.

Krasovskij, N. N.: Über die Umkehrung der Sätze von A. M. Ljapunov und N. G. Četaev über die Instabilität für stationäre Differentialgleichungssysteme. Priklad. Mat. Mech. **18**, 513—532 (1954) [Russisch].

Let $\dot{x} = X(x)$ where x, X are n -vectors, $X(0) = 0$, $X \in C^1$. The following theorems are proved: 2.1: A necessary and sufficient condition for the existence of a Ljapunov function $v(x) \in C^1$ in a neighborhood of 0 such that its total derivative is a positive definite function, is that there exists a neighborhood of 0 containing no whole trajectory with the exception of 0. 3.1 (Reciprocal of Ljapunov's first theorem on instability): If 0 is unstable, a necessary and sufficient condition for the existence of a Ljapunov function $\in C^1$ assuming positive values arbitrarily near 0 and such that its derivative is positive definite, is that there exists a neighborhood containing no whole trajectory with the exception of 0. 3.2: Under these assumptions the instability is rough. 4.1: (Reciprocal of Ljapunov's second theorem): A necessary and sufficient condition for the instability of 0 is that there exists a Ljapunov function $v \in C^1$ such that its total derivative $= \lambda v + w$, where $\lambda > 0$, $w \geq 0$, v assuming positive values arbitrarily near 0. The basic result is theorem 2.1, the main tool for its proof being the method of section of E. A. Barbašin (this Zbl. **44**, 91).

J. L. Massera.

Feščenko, S. F.: Asymptotische Lösung eines unendlichen Systems von Differentialgleichungen mit sich langsam verändernden Koeffizienten. Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR **1954**, 82—86 und russ. Zusammenfassg. 66 (1954) [Ukrainisch].

Es wird das unendliche System von Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{d^2 z_n}{dt^2} + \omega_n^2 z_n = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \bar{A}_{nj}(\tau) z_j + \varepsilon B_n(\tau) e^{i\theta}$$

($n = 1, 2, \dots, \tau = \varepsilon t$) untersucht, wo ε ein kleiner Parameter, ω_n konstante Zahlen sind ($\omega_n \rightarrow \infty$, wenn $n \rightarrow \infty$). — Bezüglich der komplexen Funktionen $A_{nj}(\tau)$ und $B_n(\tau)$ wird vorausgesetzt, daß sie eine hinreichende Anzahl Ableitungen nach τ im Intervall $0 \leq \tau \leq L$ besitzen, wobei

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \left| \frac{d^p A_{nj}(\tau)}{d\tau^p} \right|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \left| \frac{d^p B_n(\tau)}{d\tau^p} \right|^2 < \infty.$$

Für das System von Differentialgleichungen (1) ergibt sich eine asymptotische Lösung in zwei Fällen — einem „Resonanzfall“ und einem „Nichtresonanzfall“. — Es wird von einem „Resonanzfall“ gesprochen, wenn für einzelne Werte von τ aus dem Intervall $0 \leq \tau \leq L$ die Funktion $d\theta/dt = k(\tau)$ gleich einer der Zahlen ω_n wird; von einem „Nichtresonanzfall“, wenn im ganzen Intervall $0 \leq \tau \leq L$ die Funktion $d\theta/dt = k(\tau)$ von den Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots$ verschieden ist. Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

• **Popov, E. P.:** Die Dynamik der automatischen Regelsysteme. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 798 S. R. 24.50 [Russisch].

Das vorliegende Buch enthält in systematischem Aufbau die mathematischen Grundlagen der Theorie der automatischen Regelung, wobei der Verf. sich im wesentlichen der älteren Differentialgleichungsmethode bedient. Die Systematik des Verf. fußt auf sehr allgemeinen dynamischen Eigenschaften, so daß sich die in der Praxis wichtigsten Fälle oft erst bei Spezialisierung der Voraussetzungen ergeben. Der Anschluß an die Praxis wird aber durch eine große Anzahl sehr ausführlich betrach-

teter Beispiele konkreter Regelungen gewährleistet. Auf die vom mathematischen Standpunkt unwesentlichen technischen Fragen wird nicht eingegangen. Die Darstellung ist äußerst breit und klar, längere Beweise (z. B. des Hurwitzschen Kriteriums) werden nicht gebracht. Das Ziel des Verf., in breitesten Kreisen der Ingenieure verstanden zu werden, dürfte sicher erreicht sein. Das Buch ist eine vorzügliche Einführung in den mit der Regelungstheorie verbundenen mathematischen Ideenkreis. Bedauerlich ist, daß ein so praktisches Hilfsmittel, wie die Laplace-Transformation der Allgemeinverständlichkeit zum Opfer gebracht wurde, ihr sind am Ende des Buches ganze zehn Seiten gewidmet. Unbeachtet bleiben statistische Methoden. Die Verdienste der russischen Wissenschaftler werden manchmal einseitig in den Vordergrund gerückt. Das beigefügte Literaturverzeichnis enthält 51 Werke. Man vermißt ein Sachverzeichnis. Inhalt: 1. Teil: Allgemeines über Systeme automatischer Regelung. Kap. I. Die Arten der automatischen Regelsysteme. Kap. II. Prozesse in automatischen Regelsystemen. Kap. III. Verfahren zur Verbesserung der Regelgüte. Kap. IV. Aufgaben der Theorie der automatischen Regelung und kurzer geschichtlicher Überblick. 2. Teil: Gewöhnliche lineare Systeme automatischer Regelung. Kap. V. Linearisierung und Umformungen der Differentialgleichungen der automatischen Regelsysteme. Kap. VI. Aufstellung der Gleichungen gewöhnlicher linearer automatischer Regelsysteme. Kap. VII. Stabilitätskriterien gewöhnlicher linearer Systeme. Kap. VIII. Struktur- und Parameterwahl gewöhnlicher linearer Regelsysteme mit Hilfe der Stabilitätsbedingungen. Kap. IX. Näherungsabschätzungen der Güte des Übergangsvorganges linearer Systeme nach den Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Kap. X. Näherungsabschätzungen der Güte des Übergangsvorganges linearer Systeme mit Berücksichtigung der rechten Seite der Gleichung des geschlossenen Regelkreises. 3. Teil: Besondere lineare Regelsysteme. Kap. XI. Aufstellung der Gleichungen bei Systemen mit Totzeit und bei Systemen mit ortsabhängigen Parametern. Kap. XII. Stabilitätsprüfung der Systeme mit Totzeit und der Systeme mit ortsabhängigen Parametern. Kap. XIII. Impulssysteme automatischer Regelung. 4. Teil: Nichtlineare Regelsysteme. Kap. XIV. Aufstellung der Gleichungen nichtlinearer automatischer Regelsysteme. Kap. XV. Die Untersuchung der Stabilität und Dauerschwingungen nichtlinearer Regelsysteme. Kap. XVI. Approximative Bestimmung der Dauerschwingungen und der Stabilität nichtlinearer Systeme. Kap. XVII. Dauerschwingungen bei vorhandener äußerer Einwirkung und erzwungene Schwingungen nichtlinearer Systeme. 5. Teil: Methoden zur Konstruktion der Kurve des Regelvorganges. Kap. XVIII. Numerisch-graphische Methode. XIX. Analytische Lösung und Frequenzmethode. *P. Sagirow.*

● Solodovnikov, V. V. (unter Redaktion von): **Grundzüge der automatischen Regelung. Theorie.** Moskau: Wissenschaftlich-technischer Staatsverlag für Maschinenbauliteratur 1954. 1117 S. R. 39,75 [Russisch].

Dieser erste Band eines geplanten dreibändigen Werkes, in welchem der augenblickliche Stand der Theorie und Praxis der automatischen Regelung eine systematische, geschlossene Darstellung finden soll, enthält die mathematischen Grundlagen der Theorie, wobei erstmalig im russischen Schrifttum die Frequenzmethode auf breitester Basis angewandt wird. Das Buch ist ein Sammelwerk, das aus den Vorlesungen entstanden ist, die im Jahre 1951 in einem Seminar des Instituts für Automatik und Telemechanik gehalten wurden. Unter den Verff., anerkannten Kennern der jeweiligen Spezialgebiete, findet man Ajzerman, Krassovskij, Lotov, Michajlov, Cypkin; Solodovnikov besorgte die Gesamtedaktion. Das Buch verliert sich nicht in zahllosen Einzelheiten, erdrückt nicht durch eine unüberschbare Fülle von Formeln, sondern bringt in allgemein verständlicher Form die Darstellung der wichtigsten Methoden und Sätze der Theorie der automatischen Regelung. Die Auswahl des Stoffes erfolgte wohl nach zwei Gesichtspunkten: nichts prinzipiell

Wichtiges auszulassen, nichts praktisch Wertloses aufzunehmen. Beweise und die theoretische Begründung der gebrachten Sätze und Methoden sind leider oft unterdrückt. Der erste Teil des Buches ist linearen, der zweite nichtlinearen Regelungen gewidmet. Teil I: Abschnitt I bringt eine Übersicht der Grundbegriffe der Theorie der automatischen Regelung und eine Einführung in die mathematische Behandlung der Regelkreise, wobei ein gesondertes Kapitel die Fourier- und Laplace-Transformationen behandelt. Abschnitt II ist den Stabilitätsfragen gewidmet, enthält die klassischen Stabilitätskriterien (u. a. die direkte Methode von Ljapunov) ein Kapitel über D -Zerlegungen nach Nejmank, ein Kapitel über logarithmische Ortskurven und ein etwas oberflächliches und lückenhaftes Kapitel über die Stabilität der Systeme mit ortsabhängigen Parametern, Totzeit, Verzögerung usw. Abschnitt III behandelt die Regelgüte und die Methoden zu deren Verbesserung. Die Betrachtung stützt sich hauptsächlich auf die Frequenzmethode; darüber hinaus werden Integralabschätzungen und das Wurzelortverfahren geschildert. Das letzte Kapitel enthält eine systematische Darstellung der Schrittregelung als eines gewissen Analogons der stetigen Regelungen. Abschnitt IV gibt Analyse und Aufbau der Regelkreise bei ständig veränderlichen, willkürlichen äußeren Einflüssen. Zwei Fälle werden unterschieden: 1. die Einflüsse sind stationäre Zufallsfunktionen der Zeit, 2. die Einflüsse sind ihrem absoluten Betrage nach beschränkt. Teil II: Im Abschnitt V erfolgt zunächst eine gewisse Klassifikation der häufigsten Nichtlinearitäten, dann wird die Methode des Phasenraumes (auch mehrblättrige Phasenflächen) und die Methode der Punkttransformation (nach Andronov) dargestellt. Die Anwendung wird an zahlreichen allgemein bekannten Beispielen nichtlinearer Regelungen demonstriert. Ein Kapitel ist der Stabilisierung und Steuerung der Dauerschwingungen von Relaisystemen durch lineare Rückführungen gewidmet. Das letzte Kapitel behandelt die Einführung von Nichtlinearitäten zur Verbesserung der Regelgüte. Abschnitt VI bringt als die erfolgreichsten Näherungsverfahren die Methode des kleinen Parameters (in einer von Bulgakov ausgearbeiteten Form) und die sich auf die harmonische Balance stützende Methode der Beschreibungsfunktion. Das letzte Kapitel enthält vergleichende Betrachtungen verschiedener Näherungsmethoden. Abschnitt VII behandelt die Theorie der Relaisysteme, welche mit Hilfe analytischer Methoden von Lure (kanonische Gestalt der Gleichungen) und mit Hilfe von Frequenzverfahren (Cypkin, Gol'dfarb u. a.) behandelt werden. Der letzte VIII. Abschnitt des Buches enthält die Darstellung graphisch-analytischer Methoden zur Konstruktion von Übergangskurven in Systemen mit nichtlinearen und veränderlichen Parametern. Als Anhang enthält das Buch eine Tabelle der h -Funktionen für die Methode der trapezförmigen Charakteristiken von Solodovnikov und ein Literaturverzeichnis mit Angabe von 317 sowjetischen und 142 sonstigen Arbeiten.

P. Sagirow.

● Fateev, A. V.: **Grundzüge der linearen Theorie der automatischen Regelung.** Moskau-Leningrad: Energetischer Staatsverlag 1954. 295 S. R. 7,45 [Russisch].

Das vorliegende Werk ist als Lehrbuch für Studenten der sowjetischen Technischen Hochschulen gedacht. Nur linearisierbare Regelungen werden betrachtet. Da die lineare Theorie heute bereits eine ziemlich fest umrissene Gestalt hat, bringt die Auswahl des Stoffes keine besonderen Überraschungen. Der Schwerpunkt liegt auf den Stabilitätsfragen und der Untersuchung der Regelgüte. Die Darstellung ist recht klar und stützt sich hauptsächlich auf die Frequenzmethode; die Laplace-Transformation wird nur beiläufig gestreift. Im Anhang findet man einige Tabellen, deren Ausmaße den Lernenden bei der Durcharbeitung der Beispiele genügen dürften.

P. Sagirow.

● Geronimus, J(a). L.: **A. M. Ljapunow. Stabilitätsprobleme der Bewegung.** Übersetzt aus: Skizzen über die Arbeiten russischer Koryphäen der Mechanik. Berlin: VEB Verlag Technik 1954. 88 S., 6 Bilder, kart. DM 5,60.

● Geronimus, J(a). L.: I. A. Wyschnegradski. Zur Theorie der automatischen Regelung. — W. G. Imschenetzki. Partielle Differentialgleichungen und Probleme der theoretischen Mechanik.

Übersetzt aus: Skizzen über die Arbeiten russischer Koryphäen der Mechanik. Berlin: VEB Verlag Technik 1954. 60 S., 9 Bilder, kart. DM 4,—.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

● Cartan, E.: Œuvres complètes. Part II, vol. 1: Algèbre, formes différentielles, systèmes différentiels. Part II, vol. 2: Groupes infinis, systèmes différentiels, théories d'équivalence. Paris: Gauthier-Villars 1954. 561, 821 p. Vol. 1,2 frf. 6000. —

(Part I, Paris 1952.) La deuxième partie des œuvres de E. Cartan comprend les travaux, rangés dans l'ordre chronologique, intéressant l'Algèbre, la Théorie des systèmes différentiels et les Problèmes d'équivalence. Conformément au plan général, les Ouvrages parus en librairie ne figurent pas. Le premier volume comprend les travaux relatifs à l'Algèbre des formes différentielles extérieures et à la théorie des systèmes de Pfaff, s'échelonnant de 1897 à 1902. On y trouve également l'Article, de 1908, sur les nombres complexes, pour l'Encyclopédie des Sc. Math., édition française, d'après l'article de E. Study. Le second volume comprend les travaux parus, à partir de 1902, sur les groupes infinis, les systèmes en involution et la théorie de l'équivalence. On y trouve notamment les deux exposés faits, en 1937, au Séminaire de Math., exposant l'essentiel des résultats de l'A. concernant les problèmes d'équivalence et l'étude de la structure des groupes infinis. L'édition est une reproduction photographique des Mémoires originaux et du volume des „Selecta“ 1937; elle ne comporte ni corrections, ni commentaires.

Th. Lepage.

Papy, Georges: Formes différentielles extérieures de classe C^1 sur une variété différentiable de classe C^1 . Bull. Soc. math. Belgique 6, 62—69 (1954).

Auf einer Mannigfaltigkeit der Differenzierbarkeitsklasse C^r ($r > 0$) ist es sinnvoll, von Funktionen der Klasse C^s ($s \leq r$) und von Differentialformen der Klasse C^s ($s < r$) zu sprechen. Es ist jedoch nicht mehr möglich, Formen der Klasse C^r einzuführen, da die Transformation einer Form von einer lokalen Karte zu einer anderen erste Ableitungen der Koordinaten enthält. Schwierigkeiten dieser Art wurden von mehreren Autoren durch Einführung der regulären Formen überwunden. (Vgl. H. Cartan, Algebraic topology, Lecture notes, Harvard University 1949, und B. Segre, dies. Zbl. 45, 197.) Im folgenden sei X eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 . Die Form ω vom Grade k und der Klasse C^0 heißt regulär im Punkte $p \in X$, wenn p eine Umgebung U besitzt, in der ω definiert ist und in der es eine Differentialform ω' vom Grade $k-1$ und der Klasse C^0 gibt, so daß in U die Formel $\int_{\partial U} \omega = \int_U \omega'$ gilt. ω' ist regulär, eindeutig bestimmt und wird mit

$d\omega$ bezeichnet. Die Keime von in p regulären Formen definieren eine gradierte äußere Algebra A mit Differential d : es ist $dd = 0$, und es gilt in A das „Poincaré-Lemma“. Wenn $dx = 0$ und wenn x den Grad $k > 0$ hat, dann existiert ein β vom Grade $k-1$ mit $d\beta = x$. — Die äußere Algebra A ist Unter algebra der entsprechenden äußeren Algebra der Formen mit Distributionen als Koeffizienten. Verf. betrachtet in der äußeren Algebra A die durch die Funktionen der Klasse C^1 und ihre Differentiale erzeugte Unter algebra B . Die Elemente von B heißen Formen der Klasse C^1 (im Sinne des Verf.). Ein Element von B läßt eine Normaldarstellung als Summe von Monomen zu, für die jedes Monom differenzierbar ist in bezug auf eine geeignete lokale Karte, die aber von dem Monom abhängt. Man beachte, daß man nicht von Formen der Klasse C^1 im üblichen Sinne sprechen kann. Auf Grund der Normaldarstellung ist es möglich, die Theorie der Formen der Klasse C^1

(im Sinne des Verf.) vollständig und elementar zu entwickeln. Auch ein Poincaré-sches Lemma läßt sich beweisen. F. Hirzebruch.

Dedecker, Paul: Systèmes différentiels extérieurs, invariants intégraux et suites spectrales. *Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia*, 20—26 Sett. 1953, 247—262 (1954).

L'A. exprime au moyen d'une suite spectrale les invariants intégraux de H. Poincaré-E. Cartan ainsi que les relations intégrales d'invariance de Lichnerowicz [Bull. Sci. math., II. Sér. **70**, 82—95 (1946)]. Il utilise aussi les quotients $E(p, q, r, s) = C_s^q / (C_s^r + B_\eta^q)$, introduits par R. Deheuvels (ce Zbl. **49**, 203) et généralisant les quotients classiques de la suite spectrale. Une forme différentielle dont l'intégrale étendue aux chaînes de C_s^q est constante sur les classes modulo $C_s^r + B_\eta^q$ sera appelée invariant intégral de type (p, q, r, s) . L'A. applique ces notions aux intégrales multiples du calcul des variations et montre que les extrémales d'une intégrale d'ordre quelconque p sont caractérisées par un invariant intégral relatif analogue à celui défini pour les intégrales simples $(p-1)$ par H. Poincaré et E. Cartan. G. Hirsch.

Block, H. D.: A remark on integral invariants. *Quart. appl. Math.* **12**, 201—203 (1954).

A faulty formulation of a theorem on integral invariants given in some text books is corrected by the author. M. M. Peixoto.

Gergen, J. J. and F. G. Dressel: Mapping for elliptic equations. *Trans. Amer. math. Soc.* **77**, 151—178 (1954).

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien reelle Funktionen von (x, y) , dann gilt für die Lösungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\alpha u_x + \beta u_y = v_y, \quad \gamma u_x + \delta u_y = -v_x$$

der Satz: D^* und T^* seien einfache, geschlossene, ebene Jordankurven, D und T die von diesen begrenzten Bereiche. Seien z_1, z_2, z_3 resp. Z_1, Z_2, Z_3 verschiedene im gleichen Sinne angeordnete Punkte von D^* resp. T^* , seien weiter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in D Funktionen der Klasse C' und $\alpha > 0$, $0 < \mu < \alpha \delta - \frac{1}{4}(\beta + \gamma)^2$ (μ konstant). Dann existiert eine eindeutige und stetige Abbildung von $D \rightarrow D^*$ auf $T \rightarrow T^*$: $X \rightarrow u(x, y)$, $Y = v(x, y)$ der Klasse C' , so daß $0 < u_x v_y - u_y v_x$ und u und v eine Lösung des gegebenen Systems von Differentialgleichungen ist für (x, y) in D . Die gesuchte Abbildung wird zerlegt in zwei sukzessive Abbildungen, die durch Lösungen von Differentialgleichungen der Form $\alpha u_x + \beta u_y = v_y$, $-\beta u_x + \alpha u_y = -v_x$ resp. $\alpha u_x + \beta u_y = v_y$, $\beta u_x + \delta u_y = -v_x$ vermittelt werden. A. Kriszten.

Vekua, I. N.: Über gewisse Eigenschaften der Lösungen eines Systems von Gleichungen vom elliptischen Typus. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **98**, 181—184 (1954) [Russisch].

Verf. beschäftigt sich in enger Anlehnung an seine zentrale Arbeit (dies. Zbl. **48**, 337; deutsche Übersetzung: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956) mit den Lösungen eines Systems $u_x - v_y + a u + b v = 0$, $u_y + v_x + c u + d v = 0$, welches mit $U = u + i v$, $z = x + i y$ in der komplexen Form $(*) \partial U / \partial \bar{z} + A U + B \bar{U} = 0$ erscheint, wobei hier Singularitäten in den Koeffizienten A, B zugelassen werden. Dies macht die Einführung eines „Glättungsprozesses“ notwendig: Die in der offenen Punktmenge G analytische Funktion $q(z)$ wird ein analytischer Regularisator der Funktion $A(z)$ genannt, falls $q(z) \cdot A(z)$ in G summierbar ist. Verf. zeigt, daß viele Theoreme über die Lösungen von $(*)$ richtig bleiben, falls man für A und B die Existenz von Regularisatoren voraussetzt, z. B.: Zu $A(z), B(z)$ stetig in G existieren Regularisatoren $q(z), \psi(z)$. $U(z)$ sei mit Ausnahme einer diskreten Menge isolierter singulärer Punkte eine in G reguläre Lösung von $(*)$. Dann

esistono una in G analitische Funktion $t(z)$, so daß $U(z) = f(z)e^{w(z)}$ gilt mit

$$(**) \quad w = \frac{1}{\pi \varphi(z)} \iint_G \frac{\varphi(t) A(t)}{t-z} d\xi d\eta + \frac{1}{\pi \varphi(z)} \iint_G \frac{\varphi(t) B(t) \overline{U}(t)}{(t-z) U(t)} d\xi d\eta,$$

$t = \xi + i\eta$. Das klassische Theorem erhält man bei stärkeren Voraussetzungen über $A(t)$, $B(t)$ aus diesem durch die Setzung $\varphi(t) = \varphi(t) = 1$, woraus der Glättungsprozeß ersichtlich ist. Ferner wird gezeigt, daß bei vorgegebenem analytischen f eine Lösung U von (*) in der Form $U = f(z)e^{w(z)}$ konstruiert werden kann.

G. Hellwig.

Roşculeţ, Marcel N.: Sur certaines équations aux dérivées partielles. Acad. Republ. popul. Roumîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 6, 489—497, russ. u. französ. Zusammenfassg. 497—498 (1954) [Rumänisch].

The author tries to solve the partial differential equation

$$(1) \quad N(U) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \mu_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \mu_i^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right) U = 0$$

with the use of the Fedorov's monogenic functions [Mat. Sbornik, n. Ser. 18, 353—376 (1946)] in many hypercomplex variables ω_k (2) $\omega_k = a_k^0 x_0 + a_k^1 x_1 + \dots + a_k^{n-1} x_{n-1}$ with a_k^i hypercomplex constants $a_k^i = a_{k,0}^i + a_{k,1}^i \theta + \dots + a_{k,n-1}^i \theta^{n-1}$ where the hypercomplex unit θ satisfies the relation (3) $\lambda_0 \theta^n + \lambda_1 \theta^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} \theta + \lambda_n = 0$. The numbers μ_i are the real or complex roots of Eq. (3). New hypercomplex variables of the form (2) are introduced transforming the equation (1) to the following form $\mathcal{E}^n U \mathcal{E} \omega_1 \mathcal{E} \omega_2 \dots \mathcal{E} \omega_n = 0$, that can be immediately integrated yielding the general integral in the form

$$\Phi = \sum f_{x_1, x_2, \dots, x_k}(\omega_{x_1}, \omega_{x_2}, \dots, \omega_{x_k}) \quad (k = n-1)$$

the function f_{x_1, x_2, \dots, x_k} being monogenic in the sense of Fedorov with respect to each of the ω_{x_k} variables. Given p real solutions U_i of Eq. (1), differentiable up to order np inclusive, the functions defined by (4) $\Phi_p = U_0 + \varrho^n U_1 + \dots + \varrho^{np-1} U_{p-1}$ are shown to be a solution of the p times iterated equation (1), ϱ^n given by $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n = H \varrho^n$, ϱ being real and H a hypercomplex number which is not a divisor of zero. The result is of the type found by E. Almansi [Ann. Mat. pura appl. III, Ser. 2, 1—53 (1926) for $N^p(U) = 0$. A solution of Eq. (1) p times iterated can always be put in the form (4) if certain analyticity conditions are imposed on the solutions of the Eq. (1).

M. Nedelcu.

Levi, Beppo: Über die allgemeine Lösung der homogenen partiellen Differentialgleichung n -ter Ordnung in zwei Variablen mit konstanten Koeffizienten. Math. Notae 14, 50—63 (1954) [Spanisch].

L'A. studia l'equazione a derivate parziali (1) $\sum_{r=0}^n a_r \frac{\partial^r z}{\partial x^{n-r} \partial y^r} = 0$, dove le a_r sono costanti. Indicate con λ_s le soluzioni dell'equazione caratteristica $\sum_{r=0}^n a_r \lambda^{n-r} = 0$, la (1) può rappresentarsi simbolicamente con

$$\prod_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_s \frac{\partial}{\partial y} \right)^{\mu_s} z(x, y) = 0 \quad [\lambda_s \neq \lambda_r; \mu_1 + \dots + \mu_m = n].$$

Consideriamo l'equazione (2) $G(x, y, \lambda, \partial/\partial x, \partial/\partial y) z(x, y) = 0$ ($s = 1, 2, \dots, m$) corrispondente ad ogni radice caratteristica distinta. L'A. dimostra che l'integrale generale della (1) si esprime come somma degli integrali generali delle equazioni

(2). Ciascuno di questi è poi del tipo $\sum_{h=0}^{\mu_s-1} \eta^h f_h(\xi)$ dove le f_h dono funzioni arbitrarie e derivabili ed è $\xi = x + y \lambda_s$, $\eta = x - y \lambda_s$.

L'A. considera anche il caso in cui l'equazione caratteristica ha soluzioni complesse ed, anche in tal caso, viene ad esprimere l'integrale generale mediante espressioni reali.

S. Fucito.

Douglis, A.: A geometric treatment of linear hyperbolic equations of second order. *Ann. Math. Studies* **33**, 231—234 (1954).

Verf. skizziert Verfahren, wodurch das Anfangswertproblem (mit oder ohne Randbedingungen) einer total-hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine Volterrasche Integralgleichung zurückgeführt werden kann. Die Durchführung soll in einer späteren Arbeit geschehen. *Joachim Nitsche.*

Hölder, Ernst: Aufbau einer Extremalfläche hyperbolischen Typs aus ihren Charakteristiken (mittels des euklidischen Zusammenhanges des Cartanschen Raumes). *Arch. der Math.* **5**, 510—521 (1954).

Verf. liefert eine geometrische Deutung der Charakteristikentheorie einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variablen vom hyperbolischen Typ, die als Lagrangesche Gleichung zu einem zweidimensionalen Variationsproblem gehört. Dies geschieht mittels der Differentialgeometrie von E. Cartan, die sich auf das Extremalintegral gründet. Die charakteristischen Richtungen auf einem Flächenelement erweisen sich als die Nullrichtungen der Metrik und die Verträglichkeitsbedingungen besagen, daß die Nulllinien auf der Extremalfläche ein konjugiertes Netz bilden. Dies könnte man benützen, um die Extremalfläche in der Grenze aus einem Gitter von Flächenelementen zu gewinnen. Der Existenzbeweis für das Anfangswertproblem wird allerdings nicht im einzelnen durchgeführt, sondern auf die vorhandene Literatur verwiesen. *H. Beckert.*

Castelluccio, Domenico: Nuovo metodo di analisi dei fenomeni di propagazione per onde. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.*, **80** (III. Ser. 11), 281—328 (1949).

The author solves a hyperbolic system of 2 first order partial differential equations in 2 independent variables by a method which appears to be equivalent to Riemann's method of integration. *F. John* (*M. R.* **11**, 598).

Ciliberto, Carlo: Sulle equazioni non lineari di tipo parabolico in due variabili. *Ricerche Mat.* **3**, 129—165 (1954).

This article extends, in the form of two theorems, results recently obtained by the author in a paper referred to as (L) (this *Zbl.* **56**, 319). The knowledge of (L) is indispensable to anyone who wants fully to grasp the proofs of the two theorems. Theorem A is about the general equation of the 2nd order and of parabolic type $F(x, y, z, p, q, r, \alpha) = 0$ subject to the condition $0 = F(0, \dots, 0, \alpha) = F(X, 0, \dots, 0, \alpha)$ defined in a rectangle $T: 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y$ in which it is assumed to be twice continuously differentiable with respect to z, p, q, r, α . Its first derivatives with respect to these arguments are hölderian and of index 2λ , ($2\lambda < 1$) in x , hölderian and of index λ in y , and this uniformly with respect to the remaining arguments. The boundary condition is $z(x, 0) = z(0, y) = z(X, y) = 0$. A unique solution is supposed to be known for the value α_0 of the parameter. For values of α in a certain vicinity of α_0 , all possible solutions of the given boundary value problem are assumed to be uniformly bounded and equicontinuous. Under such conditions, theorem A is an existence and a uniqueness theorem for values of α in a vicinity of α_0 . Theorem B is concerned with the particular differential equation

$$F = \partial^2 z / \partial x^2 + a(x, y, z, p, \alpha) \partial z / \partial y = f(x, y, z, p, \alpha),$$

where $a < 0$ in T , hölderian in x and of index 2λ , hölderian in y and of index $\lambda + \frac{1}{2}$, this uniformly with respect to the other arguments. f is subject to the same conditions, except that the Hölder indices are 2λ and λ . The boundary conditions are $z(x, 0) = z_0(x)$, $z(0, y) = z_1(y)$, $z(X, y) = z_2(y)$, $z_0(0) = z_1(0)$, $z_0(X) = z_2(0)$. This theorem is deduced, by means of easy transformations, from theorem A. The proof of theorem A is topological. Let Ω be the Banach space of the functions $z(x, y)$ defined in T , where they satisfy the Hölder conditions:

$$\begin{aligned} |q(x'', y'') - q(x', y')|^T &\leq |q|_\lambda^T \{ |x'' - x'|^{2\lambda} + |y'' - y'|^\lambda \}, \\ |r(x'', y'') - r(x', y')|^T &\leq |r|_\lambda^T \{ |x'' - x'|^{2\lambda} + |y'' - y'|^\lambda \} \end{aligned}$$

and have the norm: $\|z\| = \max_T \|z\| + \|q\|_\lambda^T + \|r\|_\lambda^T$. Let Ω' be the Banach space of the functions $Z(x, y)$ such that:

$$|Z(x'', y'') - Z(x', y')| \leq |Z|_\lambda^T \{|x'' - x'|^{2\lambda} + |y'' - y'|^{2\lambda}\}$$

having the norm: $\|Z\| = \max_F \|Z\| + |Z|_\lambda^T$. The boundary value problem under consideration amounts to proving that the mapping $\Omega \rightarrow \Omega'$ defined by the functional equation $T(z, \lambda) = F(x, y, z, p, q, r, \lambda) = Z(x, y)$ where $z = 0$ on three sides of T , covers the element $0 \in \Omega'$ for values of λ in a certain neighbourhood of α_0 . Under the conditions assumed by the author, the proof of this „covering“ depends on an existence and a uniqueness theorem relative to the „variational equation“ deduced from $F = Z$ by forming the Fréchet differential of F . The proposition holds on account of a priori limitations obtained in the first five paragraphs of this article, as well as of important theorems of (L).

C. Racine.

Gagliardo, Emilio: Formule di maggiorazione integrale per le soluzioni dell'equazione del calore non omogenea. *Ricerche Mat.* 3, 202—219 (1954).

Soit D le domaine du plan (x, y) , défini par les inégalités $a \leq y \leq b$, $\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$, les fonctions $\alpha(y)$ et $\beta(y)$ admettant les dérivées continues pour $a \leq y \leq b$; on suppose que $\alpha(y) < \beta(y)$. Considérons une fonction $u(x, y)$, admettant les dérivées secondes continues dans D , constituant une solution de l'équation $u''_{xx} - u'_y = f(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ étant supposée continue dans D . Soit $u_1(x) = u(x, a)$ ($\alpha(a) \leq x \leq \beta(a)$), $u_{21}(y) = u(\alpha(y), y)$, $u_{22}(y) = u(\beta(y), y)$, ($a \leq y \leq b$). L'A. établit la limitation suivante

$$h \left\{ \iint_D [u^2 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u''_{xx})^2] dx dy + \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} [u_1^2 - (u'_1)^2] dx + \int_a^b [u_{21}^2 + u_{22}^2 + (u'_{21})^2 + (u'_{22})^2] dy \right\},$$

h étant une constante ne dépendant que du domaine D .

M. Krzyżański.

Rosenbloom, P. C.: Linear equations of parabolic type with constant coefficients. *Ann. Math. Studies.* 33, 191—200 (1954).

Soit (1) $u'_t = L(\partial/\partial x) u$ l'équation du type parabolique d'ordre m , à n variables d'espace x_1, \dots, x_n et à une variable de temps t ; soit E_n l'espace des variables x_1, \dots, x_n . L'opérateur $L(\partial/\partial x)$ est du type elliptique, à coefficients constants. L'A. énonce, sans démonstration, certains théorèmes concernant les solutions de (1) déterminées par la condition initiale. En particulier, soit $m/(m-1) = \mu$; si l'on a

$\int_{E_n} |\Phi(x)| \exp(-M|x|^\mu) dV_x \leq N < +\infty$, la solution du problème initial pour (1) est

représentable sous la forme de l'intégrale de Poisson $u(x, t) = \int_{E_n} \Phi(y) K(x-y, t) dV_y$,

où $K(x, t)$ est la solution fondamentale de (1). On a $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \Phi(x)$ aux points

lebesguiens de $\Phi(x)$. Soit $u(x, t)$ une solution de (1) continue pour $0 \leq t < c$; si l'on a $\int_{E_n} |u(x, t)| \exp(-M|x|^\mu) dV_x \leq N < \infty$ pour $0 < t < c$ et $u(x, 0) = 0$,

alors $u(x, t) = 0$ pour $0 \leq t < c$. L'A. énonce encore des autres théorèmes d'unicité, sous des hypothèses moins restrictives sur la fonction $u(x, t)$. Au cas de l'équation de la chaleur l'A. énonce un théorème, constituant un perfectionnement de celui de Täcklind. L'A. expose aussi des théorèmes relatifs à l'équation non homogène $u'_t = L(\partial/\partial x) u + f(x, t)$. Le travail contient de nombreux et valeureux indications bibliographiques.

M. Krzyżański.

Lax, D. P. and A. N. Milgram: Parabolic equations. *Ann. Math. Studies* 33, 167—190 (1954).

Soit

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^p \sum_{r=0}^{2p} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{n_r} a_{i_1, i_2, \dots, i_r} \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} = 0$$

une équation du type parabolique, dont les coefficients sont des fonctions de classe C^p dans un domaine borné G de l'espace cartésien à n dimensions, l'opérateur au second membre de (1) étant du type elliptique. On cherche une solution de (1) se réduisant à une fonction donnée pour $t = 0$, $(x_1, \dots, x_n) \in G$ et s'annulant ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $p - 1$ pour (x_1, \dots, x_n) situé sur la frontière de G et $t \geq 0$. Les AA. déduisent l'existence et l'unicité de la solution de ce problème des théorèmes concernant les opérateurs dans l'espace de Hilbert et les semigroupes d'opérateurs. Ces théorèmes sont aussi démontrés par les AA. dans le présent travail. Les AA. appliquent les résultats de Hille, Yosida et Friedrichs. La partie finale du travail contient les résultats concernant l'ordre de régularité de la solution obtenue.

M. Krzyżański.

Èjdel'man, S. D.: Über das Cauchysche Problem für parabolische Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 913—915 (1954).

On considère le système de la forme (1) $L(U) \equiv [\partial/\partial t - A(t, x, \partial/\partial x)] U = 0$, supposé du type parabolique. $A(t, x, \partial/\partial x)$ constituant une matrice d'opérateurs différentielles, contenant les dérivations d'ordre $2b$ au plus et dont les coefficients sont des fonctions complexes, suffisamment régulières. L'A. détermine la solution fondamentale du système (1) et établit une évaluation de cette solution et de ses dérivées. Si le vecteur-fonction $q(x)$ satisfait à l'inégalité $q(x) \leq M e^{k|x|^2}$ M et k étant des constantes positives, le système (1) admet une solution, telle que $U(x, 0) = q(x)$, représentable sous la forme $U(x, t) = \int Z(t, t_0, x, \xi) q(\xi) d\xi$ où la matrice $Z(t, t_0, x, \xi)$ est la solution fondamentale de (1). Cette solution satisfait à l'inégalité (2) $\sup |U| \leq M \exp k x^{2b/(2b-1)}$. Cette solution est unique dans la classe des vecteurs-fonctions satisfaisant aux inégalités de la forme (2) (les constantes M et k dépendant en général du vecteur-fonction particulier). Le théorème analogue relatif à une seule équation du second ordre, aux coefficients réels, fut démontré par le réf. [Ann. Soc. Polon. Math. 18, 145—156 (1945); ce Zbl. 34, 359] sous des hypothèses moins restrictives.

M. Krzyżański.

Gårding, Lars: On the asymptotic properties of the spectral function belonging to a self-adjoint semi-bounded extension of an elliptic differential operator. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. 24, Nr. 21, 18 S. (1954).

Es sei $a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein Differentialoperator vom elliptischen Typ, $m > 0$, wobei $D^\alpha = i^{-|\alpha|} (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$, $|x| = x_1 + x_2 + \dots + x_n$; die Koeffizienten $a_\alpha(x)$ seien hinreichend oft differenzierbar. Es habe $a(x, D)$ eine halbbeschränkte selbstadjungierte Erweiterung A auf L_2 . Die Spektraldarstellung von A sei $A = \int \lambda dE(\lambda)$. Satz 1: Für jedes λ gibt es einen Carlemanschen Kern $c(\lambda, x, y)$, welcher eine Borelsche Funktion seiner Argumente, für festes λ stetig und hermitesch bezüglich x, y ist ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$) und für welchen $(E(\lambda)f)(y) = \int c f dx$ für fast jedes y besteht. Die totale Variation von c , wenn λ ein endliches Intervall durchläuft, ist über kompakte Teilbereiche des (x, y) -Raumes beschränkt. Satz 2: Für große λ gilt $c(\lambda, x, y) = c_x(\lambda, x - y) + o(\lambda^{-m})$ gleichmäßig über kompakte Teilmengen des (x, y) -Raumes, wobei

$$c_x(\lambda, x - y) = (2\pi)^{-n} \int_{\hat{a}(z, \xi) < \lambda} e^{-i(x-y) \cdot \xi} d\xi, \quad \hat{a}(z, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z) \xi^\alpha.$$

Satz 3: Sind die $a_\alpha(x)$ Konstante, $n \geq 1$, dann gilt mit $c_x(\lambda, x - y) = c_0(\lambda, x - y)$:

$$\int_{\mu \leq \lambda_0} (\lambda - \mu)^{k-1} (\lambda - \lambda_0)^{1-k} d\nu(\mu, x, y) = \int_{\mu \geq \lambda_0} (\lambda - \mu)^{k-1} (\lambda - \lambda_0)^{k-1} d\nu_0(\lambda, x - y) + O(\lambda^{-m-k/m})$$

für $\lambda_0 < \min(A, A_0)$ und $k \geq 1$, und zwar gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge des (x, y) -Raumes. Zum Beweis des Satzes 3 wird der Taubersche Satz des Ref. (Freud, dies. Zbl. 44, 324; 48, 296; T. Ganelius, dies. Zbl. 57, 92) angewandt.

G. Freud.

Bertolini, Fernando: Sul problema di Cauchy per l'equazioni di Laplace in due variabili indipendenti. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **16**, 10—17 (1954).

Nella nota I (questo Zbl. **55**, 89) l'A. considerava un dominio D limitato e soddisfacente opportune ipotesi qualitative e ricercava una funzione di due variabili continua in D , armonica nell'interno di D che, su una porzione della frontiera di D , assumesse insieme alla sua derivata normale dei valori prescritti. In questa nota i risultati della nota precedente sono estesi a casi più generali; si considera infatti un campo A , tale che $A = \overline{f} A$ sia la somma di un numero finito di domini del tipo considerato nella nota I e si cerca una funzione armonica nel campo A , continua in $A = \overline{f} A$, la quale, su una porzione di $\overline{f} A$, assuma insieme alla sua derivata normale valori assegnati; successivamente vengono presi in considerazione taluni campi illimitati. L'A. dà condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza della soluzione ed una sua espressione analitica, mediante uno sviluppo in serie; vi sono anche alcuni esempi.

E. De Giorgi.

Garabedian, P. R. and Max Schiffman: On solution of partial differential equations by the Hahn-Banach theorem. Trans. Amer. math. Soc. **76**, 288—299 (1954).

In questo lavoro gli AA. dimostrano l'esistenza della funzione di Neumann per l'equazione $\Delta u - Pu = 0$ nel caso di due variabili e di un dominio D a contorno analitico S . Il metodo seguito consiste in una applicazione, in verità assai semplice ed elegante, del teorema di Hahn-Banach. Sia B lo spazio delle funzioni continue in $D \cup \overline{r} = \max \overline{r}$ e B' il sottospazio di B costituito dalle funzioni $f = \Delta u - Pu$ con u di classe $C^{2,1}$ in D e $du \, du = 0$ su S . Poichè in ogni punto w di D $|u(w)| < |f_1|$, il funzionale $u \mapsto L_w u$ è limitato in B' e perciò prolungabile in tutto B . Detta allora $S(w, z)$ una funzione di Levi dell'operatore $\Delta u - Pu$, tale che la funzione $\Delta S - PS$ sia continua anche per $w = z$, la funzione $S(w, z) - L_w(\Delta S - PS)$ è la funzione di Neumann dell'equazione $\Delta u - Pu = 0$. Per la stessa equazione viene anche dimostrata l'esistenza della funzione di Green nel caso di tre variabili. Gli AA. sottolineano il fatto che, in confronto a precedenti applicazioni del teorema di Hahn-Banach ai problemi esistenziali relativi alle equazioni ellittiche, la loro trattazione ha il pregio di far ricorso soltanto alla conoscenza di una funzione di Levi dell'equazione e non alla soluzione fondamentale. A questo proposito è da osservare che tale pregio si riscontra già nei lavori di G. Cimmino (questo Zbl. **18**, 25; **19**, 263). Sull'argomento vedi anche C. Miranda, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico (questo Zbl. **65**, 85).

C. Miranda.

Lammel, Ernesto: Über die Lösungen der Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U(x, y, z) = 0,$$

die Axialsymmetrie besitzen. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A **10**, 27—73 (1954) [Spanisch].

An expository article in which the author discusses the solutions of the equation of the title by means of homogeneous harmonic polynomials in z and $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 \right)$.

A. J. Lohwater.

Miranda, Carlo: Gli integrali principali nella teoria del potenziale. Rend. Sem. mat. fis. Milano **24**, 107—122 (1954).

Vengono riassunti i fondamenti della teoria degli integrali principali secondo Cauchy e indicate talune applicazioni alla teoria del potenziale e alle equazioni di tipo ellittico. Sono in particolare esposti i risultati ottenuti da Giraud (questo Zbl. **11**, 216; **14**, 309; **15**, 23, 24; **18**, 132; **24**, 411) in questo indirizzo. *G. Fichera.*

Allen, A. C. and E. Kerr: Harmonic functions and Tauberian theorems. I. J. London math. Soc. **29**, 104—115 (1954).

Eine in der Halbebene $\eta > 0$ positive harmonische Funktion $H(\xi, \eta)$ läßt sich in der Form

$$H(\xi, \eta) = D\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta dg(t)}{\eta^2 + (\xi - t)^2}$$

darstellen, wo D eine Konstante ≥ 0 und $g(x)$ eine monoton wachsende Funktion

mit $g(0) = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dg(t)}{1+t^2} < \infty$ bedeutet. Wie L. H. Loomis [Trans. Amer. math.

Soc. 53, 239—250 (1943)] zeigte, folgt aus $H(0, \eta) \rightarrow A$ für $\eta \rightarrow +0$ die Beziehung $g(x) - g(-x) \sim 2Ax$ für $x \rightarrow 0$. Eine von S. Verblunsky (vgl. dies. Zbl. 29, 390) ausgesprochene Verallgemeinerung dieses Satzes besagt, daß aus (*) $H(r \cos \theta, r \sin \theta) \rightarrow A$ für $r \rightarrow +0$ bei festem θ mit $0 < \theta < \pi/2$ die Beziehung $(\pi - \theta) g(x) - \theta g(-x) \sim A\pi x$ für $x \rightarrow +0$ folgt. Da sich jedoch der Beweis dieses Satzes als fehlerhaft erwies, beschäftigen sich die Verff. in der vorliegenden, von S. Verblunsky veranlaßten Arbeit mit der Frage, ob die Aussage des Satzes trotzdem richtig ist. Sie zeigen an Hand von Beispielen, daß in der angegebenen Fassung weder die Aussage des Satzes noch ihre Umkehrung gilt. Sie zeigen ferner, daß sich der Satz wie folgt berichtigen läßt: Aus (*) folgt

$$g(x) + f(x) \sim Ax\pi/(\pi - \theta) \quad \text{für } x \rightarrow +0,$$

wo $f(x)$ die eindeutig bestimmte monoton wachsende Funktion ist, die

$$f(0) = 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\eta df(t)}{\eta^2 + (\xi - t)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\eta d\{-g(-t)\}}{\eta^2 + (\xi - t)^2}$$

mit $\xi = r \cos \theta$, $\eta = r \sin \theta$ für alle $r > 0$ genügt.

F. Lösch.

Variationsrechnung:

Donder, Th. de: Sur les multiplicateurs indéterminées d'Euler-Lagrange. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 877—879 (1954).

Complément à une note Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 29, 293—301 (1943). Th. Lepage.

Masotti, Arnaldo: Questioni isoperimetriche nella fisica matematica. Rend. Sem. mat. fis. Milano 24, 3—33 (1954).

Verf. gibt eine mit kurzen Erläuterungen versehene Zusammenstellung der hauptsächlich von G. Pólya und G. Szegő und ihren Mitarbeitern untersuchten geometrischen, analytischen und physikalischen Gebietsfunktionale und der sich anschließenden Extremalprobleme. Abgesehen von einigen klassischen ebenen und räumlichen Fragen, werden die sich auf Flächeninhalt, Umfang, Abbildungsradien, Torsionssteifigkeit, Grundton und Kapazität beziehenden isoperimetrischen Ungleichungen besprochen. Die mitgeteilten Ergebnisse sind größtenteils dem Buch „Isoperimetric inequalities in mathematical physics“ der oben erwähnten Autoren (dies. Zbl. 44, 383) entnommen. — Als methodische Hilfsmittel für die Bearbeitung der Probleme werden u. a. die sich auf die Theoreme von Dirichlet und Thomson sowie auf Steiners Symmetrisierung stützenden analytischen und geometrischen Verfahren erwähnt.

H. Hadwiger.

Craig, Homer V.: On certain linear extensor equations. Tensor, n. Ser. 4, 40—50 (1954).

Das Hauptziel der Arbeit besteht darin, die Struktur der linearen Gleichungen derjenigen primären Extensoren ausführlich zu untersuchen, die den Schlüssel-Funktionen gewisser Probleme der mathematischen Physik und der Variationsrechnung zugeordnet sind. Insbesondere rät der Verf. aus heuristischen Gründen zur Untersuchung dieser Probleme durch Extensor-Gleichungen. Unter primären Extensoren einer Funktion verstehen wir die Extensoren $f_{,aa} = \partial f / \partial x^{(a)a}$ und

$f_{\alpha a}(-M_{\alpha} f_a^{(M-\alpha)})$, wobei f_a = Vektor $f; Ma$), wenn (α) die α -te Ableitung nach Parametern bedeutet. Die Anwendung der vorliegenden Methode auf Funktionen, die in den isoperimetrischen Aufgaben vorkommen, führt sogleich auf die Lagrange'sche Multiplikatorregel als eine natürliche Vermutung. Die Tatsache, daß die Eulerschen Gleichungen der Variationsrechnung als Extensor-Gleichungen dargestellt werden können, gewährleistet natürlich, daß die Methode auch auf jedes Problem der mathematischen Physik anwendbar ist, das als ein Problem der Variationsrechnung formiert werden kann. Z. B. haben wir für Probleme der Variationsrechnung von der Gestalt $\int F(x, x') dt$ unter der Bedingung $\int G(x, x') dt = k$ (konst.) die primären Extensoren $F;_{\alpha a}, F'_{\alpha a}, G;_{\alpha a}, G'_{\alpha a}$ ($M=1$) der Funktionen F und G . Dann sind die Extensor-Gleichungen $A F;_{0a} + B F'_{1a} + C G;_{0a} + D G'_{1a} = 0$, $A F;_{1a} + B F'_{1a} + C G;_{1a} + D G'_{1a} = 0$, wobei A, B, C, D Konstanten sind, die aus der zweiten Gleichung bestimmt werden; d. h., wenn $B \neq 0$, dann $A = -B$, $C = -D$, also $-(F + C G);_{0a} + (F + C G)'_{1a} = 0$, und diese sind nichts anderes als die Eulerschen Differentialgleichungen für die Funktion $F + C G$. Ähnlich erhalten wir die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen aus der kinetischen und potentialen Energie $g(x, x'), V(x)$. Verf. dehnt die Methode auch mittels des erweiterten KAWAGUCHI'schen Satzes (dies. Zbl. 23, 169) auf den Fall mehrerer Parameter aus und wendet sie auf Variationsprobleme, d. h. isoperimetrische Aufgaben für mehrfache Integrale, Maxwell'sche Gleichungen im freien Raume usw. an.

A. Kawaguchi.

Bott, Raoul: Nondegenerate critical manifolds. Ann. of Math., II. Ser. 60, 248—261 (1954).

Die kompakte Mannigfaltigkeit M sei glatt eingebettet in eine offene Menge U des E_n ; alle Punkte von M seien kritische Punkte einer glatten Funktion $J|U$ („glatt“ bedeutet die Existenz und Stetigkeit der 3. Ableitungen); die „nullity“ aller $x \in M$ sei gleich der Dimension von M . Es sei J_M bzw. J'_M die Menge aller $y \in M$ mit $J(y) \leq J(x)$ bzw. $J(y) < J(x)$ für $x \in M$ und λ_M der Index der $x \in M$. Verf. beweist für jede hinreichend kleine Umgebung V von M den Isomorphismus $H_k(J_M - V, J_M \cap V) \approx H_{k-\lambda_M}(M)$, wobei H_k die k -te singuläre Homologiegruppe mit Koeffizienten mod 2 bedeutet, und verwendet dieses Resultat für die Berechnung der „circular connectivities“ und der „sensed circular connectivities“ der n -Sphäre. (Für die Definitionen vgl. M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, dies. Zbl. 11, 28).

G. Nöbeling.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

● **Tricomi, Francesco G.:** Lezioni sulle equazioni integrali. Al Collega C. Agostinelli in occasione del suo 60° compleanno. Torino: Editrice Gheroni 1954. 343 p.

Den Inhalt des Buches bilden Vorlesungen, die Verf. über Integralgleichungen an der Universität Turin gehalten hat. Im ersten Kapitel werden die Integralgleichungen von Volterra, im zweiten und vierten die Fredholmschen, insbesondere diejenigen mit symmetrischen Kernen und die klassische Theorie von Hilbert und Erhard Schmidt, behandelt; dazwischen wird im dritten Kapitel eine Darstellung der Theorie der orthogonalen Funktionen gegeben. Das letzte Kapitel bringt singuläre Integralgleichungen (z. B. die Tragflügelgleichung, Carlemansche Gleichungen) und nichtlineare Integralgleichungen nach Hammerstein. Zahlreiche Anwendungen und jeweils Übungsaufgaben am Ende eines Kapitels erhöhen den Wert des Buches.

O. Volk.

Chang, Shih-Hsun: Integral equations with normal kernels. Acta math. Sinica 4, 1—16 und engl. Zusammenfassg. 16—20 (1954) [Chinesisch].

Let the L^2 integral operator $k(x, y)$ have the „singular“ values λ_j , and „singul-

lar function pairs q_h, ψ_h with $q_h = \lambda_h k \cdot \psi_h$ and $\psi_h = \lambda_h k^* \cdot q_h$, where $k^*(x, y) = k(y, x)$. Write $k = k(q_h, \psi_h, \lambda_h)$. An operator k is normal, i. e. $k k^* = k^* k$, if and only if with $k = k(q_h, \psi_h, \lambda_h)$ also $k = k(\psi_h^*, \chi_h, \lambda_h)$ holds, where $\chi_h = \lambda_h k^* \cdot \psi_h$, and, consequently $k^n(q_h, \lambda_h^{n-1} k^{*n-1} \cdot \psi_h, \lambda_h^n)$ is valid, $n = 1, 2, 3, \dots$. If q_{h_i}, ψ_{h_i} are

the pairs belonging to the same λ_h , $i = 1, 2, \dots, h_0$, then $\varphi_{hi} = \sum_{j=1}^{h_0} a_{h,i,j} \psi_{hj}$,

$a_{h,i,j}$ a unitary matrix. Denote the degenerate kernel $k_h = \sum_{i=1}^{h_0} q_{h,i}(x) \sum_{j=1}^{h_0} a_{h,i,j} \overline{\psi_{hj}(y)}$,

then the relation $k \sim \sum_{h=1}^{\infty} k_h$ holds, where the \sim sign means convergence in mean.

Using the degenerate kernels and the above expression of k , the author derives the existence of orthonormal, complete systems of eigenfunctions and eigenvalues μ_h of k . $\mu_h = \lambda_j$, and expansion theorems, solutions of integral equations etc. These theorems are listed in the english abstract at the end of the paper. Y. W. Chen.

Chvedelidze, B. V.: Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen mit Kernen vom Cauchyschen Typus. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 15, 401—405 (1954) [Russisch].

Verf. setzt seine Untersuchungen über die singuläre Integralgleichung

$$a(t_0) \varphi(t_0) + b(t_0) (\pi i)^{-1} \int_C \varphi(t) (t - t_0)^{-1} dt = f(t_0), \quad t_0 \in C,$$

für den Fall fort, daß a, b, f, q Funktionen der Klasse $L_p(C)$ ($p > 1$) sind (vgl. dies. Zbl. 42, 339; 45, 54), und formuliert die Sätze von Noether. Bemerkenswert sind folgende Hilfssätze: (1) Der Operator $s q = (\pi i)^{-1} \int_C q(t) (t - t_0)^{-1} dt$, $t_0 \in C$,

ist beschränkt in $L_p(C)$, $p > 1$. (2) Wenn $\omega(t)$ stetig auf C ist, so ist der Operator $h \varphi = \int_C (\omega(t) - \omega(t_0)) \varphi(t) (t - t_0)^{-1} dt$, $t_0 \in C$, vollstetig in $L_p(C)$, $p > 1$.

W. Thimm.

Gachov, F. D. und L. I. Čibrikova: Über gewisse Typen von singulären Integralgleichungen, die in geschlossener Form gelöst werden können. Mat. Sbornik, n. Ser. 35 (77), 395—436 (1954) [Russisch].

Bekanntlich kann die Integralgleichung $a(t) q(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{L_0} \frac{q(\tau) d\tau}{\tau - t} = c(t)$

unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über den Integrationsweg L_0 und die Koeffizientenfunktionen in geschlossener Form gelöst werden. Durch Zurückführung auf diesen Fall geben die Verff. explizite Lösungen für solche singulären Integralgleichungen an, deren Kerne automorphe oder multiplikativ automorphe Funktionen einer endlichen Gruppe von linearen Transformationen sind. Dazu gehören z. B. die Integralgleichungen

$$a(t) \varphi(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p_k(t)}{\pi i} \int_{L_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \omega_k(t)} d\tau = c(t).$$

Hier sind $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{m-1}$ die Substitutionen der Gruppe, und p_0, p_1, \dots, p_{m-1} bilden ein System von dazugehörigen Multiplikatoren, die als rationale Funktionen vorausgesetzt werden. L_0 sei eine glatte, einfache (geschlossene oder offene) Kurve. Bezeichnet L_j das Bild von L_0 vermittels ω_j , so sollen L_0, L_1, \dots, L_{m-1} getrennt sein oder nur endlich viele Punkte gemeinsam haben. Verff. behandeln auch den Fall, daß alle Kurven L_j zusammenfallen. Mehrere Beispiele werden ausführlich diskutiert.

W. Thimm.

Geglija, T. G.: Die Hilbertsche Randwertaufgabe und singuläre Integralgleichungen im Falle sich schneidender Konturen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 15, 69—76 (1954) [Russisch].

Eine (offene oder geschlossene) Kurve L gehöre zur Klasse A , wenn es eine Konstante $k > 0$ gibt, so daß für beliebige Punkte $t_1, t_2 \in L$ gilt $\varrho(t_1, t_2) \leq k s(t_1, t_2)$, wobei $\varrho(t_1, t_2)$ der Abstand von t_1, t_2 und $s(t_1, t_2)$ die Länge des kürzesten Bogens von L zwischen t_1 und t_2 ist. Es sei L eine Kurve der Klasse A und $t \in L$; t', t'' seien Punkte von L auf den Bögen at bzw. tb . Wenn t' und t'' gegen den Punkt t streben, so sei

$$\lim (2\pi i)^{-1} [\log (|t' - t|/|t'' - t|) + i \arg ((t' - t)/(t'' - t))] = \theta(t).$$

Die Kurve L der Klasse A gehöre zur Klasse B , wenn der Grenzwert $\theta(t)$ in jedem inneren Punkte von L existiert. Kurven der Klasse B können unendlich viele mehrfache Punkte enthalten und auch solche Punkte, in denen weder eine rechts- noch eine linksseitige Tangente existiert. Verf. kündigt Verallgemeinerungen der Theorie der singulären Integralgleichungen mit Cauchyschem Kern für den Fall an, daß der Integrationsweg eine Vereinigungsmenge von Kurven der Klasse B ist. Diese Übertragung beruht auf Verallgemeinerungen der Formeln von Pleimelj, in welche jetzt $\theta(t)$ eingeht, vgl. Kveselava, dies. Zbl. 40, 204. W. Thimm.

Povolockij, A. I.: Nichtlokale Existenzsätze für die Lösungen bei Systemen nicht-linearer Integralgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 901—904 (1954) [Russisch].

Bei der Untersuchung des Systems (1) $q(x) = \lambda \int_G K_i(x, y) f_i[y, q_1(y), \dots, q_n(y)] dy$, $i = 1, \dots, n$, mit Variationsmethoden muß die Existenz einer Funktion $F(x, z_1, \dots, z_n)$ mit $f_i(x, z_1, \dots, z_n) = \partial F / \partial z_i$, $i = 1, \dots, n$, vorausgesetzt werden. Unter Verwendung eines topologischen Prinzips von Krasnosel'ski (dies. Zbl. 50, 102) gelingt dem Verf. die Aufstellung einer Reihe von nichtlokalen Existenzsätzen, welche diese Voraussetzung nicht benötigen. Diese Sätze sind von dem folgenden Typ: Es seien $K_i(x, y)$ symmetrische, positiv definite Kerne, die einen linearen vollstetigen Operator A mit $Au(x) = \{A_1 u_1(x), \dots, A_n u_n(x)\}$ und $A_i u_i(x) = \int_G K_i(x, y) u_i(y) dy$ definieren. Der Operator A sei darstellbar in der Form $H H^*$, wobei H ein vollstetiger linearer Operator sei, der $L_{1/2}$ in $L_{2,p}$ abbilde; H^* sei der zu H adjungierte Operator und bilde $L_{1/q}$ in $L_{2,1}$ ab ($\{p\} = \{p_1, \dots, p_n\}$, $p_i^{-1} + q_i^{-1} = 1$). Außerdem sei $f_k(x, z_1, \dots, z_n) \cdot z_k \leq a_k z_k^2 + b_k(x) z_k^{2-\gamma_k} + c_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, $x \in G$, $-\infty < z_k < \infty$, wobei $0 < \gamma_k < 2$, $b_k(x) \in L^{2/\gamma_k}$, $c_k(x) \in L$ sei; ferner gelte $-\infty < \lambda < \min_{i=1, \dots, n} (1/a_i \lambda_i)$, wenn λ_i der größte Eigen-

wert des Kernes K_i ist. Dann besitzt das System (1) wenigstens eine Lösung in $L_{2,1}$. Weitere Sätze geben — leichter nachprüfbare — Bedingungen für das Erfülltsein der Voraussetzungen der Existenzsätze an und beziehen sich z. B. auf die Zerlegbarkeit des Operators A . Interessant ist das folgende Ergebnis: Es seien $K_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, beschränkte, symmetrische, positiv definite Kerne, die in L_2 einen vollstetigen Operator definieren. Die Funktionen f_i mögen die oben angegebenen Bedingungen erfüllen. Außerdem gebe es eine stetige Funktion $F(z_1, \dots, z_n)$, so daß $f_i(x, z_1, \dots, z_n) \leq F(z_1, \dots, z_n)$ ($i = 1, \dots, n$, $x \in G$, $-\infty < z_i < \infty$) gilt. Dann besitzt (1) wenigstens ein System beschränkter Lösungen. W. Thimm.

Gordon, Alan N.: Dual integral equations. J. London math. Soc. 29, 360—363 (1954).

Das in der theoretischen Physik auftretende Paar von Integralgleichungen

$$\int_0^\infty y^\alpha f(y) J_\nu(xy) dy = g(x) \quad (x < 1), \quad \int_0^\infty f(y) J_\nu(xy) dy = h(x) \quad (x > 1),$$

das in Spezialfällen von verschiedenen Autoren behandelt worden ist, wird dadurch gelöst, daß die linken Seiten durch geeignete Transformationen gleich gemacht werden, worauf die Lösung durch Umkehrung der Hankel-Transformation erfolgt.

G. Doetsch.

Brownell, F. H. and W. K. Ergen: A theorem on rearrangements and its application to certain delay differential equations. J. rat. Mech. Analysis 3, 565—579 (1954).

Untersucht wird für $t > 0$ die nichtlineare Integrodifferentialgleichung mit Nachwirkung

$$(1) \quad x'(t) = -\frac{c}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} (\vartheta - h) \{f[x(t-h)] - 1\} dh$$

bei gegebenen Konstanten $c > 0$ und $\vartheta > 0$ unter den Voraussetzungen, daß die reelle Funktion $f(x) > 0$ ist für alle reellen x , $f(0) = 1$, $f'(x) > 0$, und stetig. — Theorem 7: Zu jedem im Intervall $-\vartheta \leq t \leq 0$ vorgegebenen stetigen $x_0(t)$ gibt es eindeutig eine stetig differenzierbare Lösung $x(t)$ von (1), die für $-\vartheta \leq t \leq 0$ stetig in $x_0(t)$ übergeht. — Lemma 3: Jede Lösung $x(t)$ von (1) genügt für beliebige reelle Zahlen $t_2 > t_1 \geq \vartheta$ der Gleichung

$$(2) \quad \int_{t_1}^{t_2} x(t) \{f[x(t)] - f[x(t-\vartheta)]\} dt = -\vartheta \{[R(x)](t_2) - [R(x)](t_1)\},$$

worin

$$[R(x)](t) = 1 + \int_0^{x(t)} f(z) dz - \left[\frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} f[x(t-h)] dh \right] x(t) + \frac{1}{2c} [x'(t)]^2.$$

— Theorem 5: Für jede periodische Lösung von (1) gilt $x(t) = x(t-\vartheta)$, so daß ϑ ein Vielfaches der Periode ist. — Theorem 4: Jede nicht identisch verschwindende periodische Lösung $x(t)$ von (1) genügt der Gleichung

$$(3) \quad \gamma + 1 = 1 + \int_0^{x(t)} f(z) dz - x(t) + \frac{1}{2c} [x'(t)]^2,$$

wo $\gamma > 0$ mit ϑ in Zusammenhang steht und die Periode T sich aus γ berechnen läßt. — Theorem 11: Ist $f(x)$ analytisch für reelles x , so ist die Anzahl der wesentlich verschiedenen periodischen Lösungen von (1) beschränkt. — Theorem 9: Jede Lösung von (1) nähert sich mit $t \rightarrow \infty$ in einem genauer zu präzisierenden Sinn einer periodischen Lösung von (1) an. R. Iglisch.

● Doetsch, Gustav: Teoria degli sviluppi asintotici dal punto di vista delle trasformazioni funzionali. Pubbl. Ist. naz. Appl. Calcolo Nr. 420, 85 p. (1954).

Man kann die Meinung vertreten, daß die Systematisierung und Entwicklung der Methoden für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Funktionen einer der Hauptfortschritte der Analysis in diesen letzten Jahren darstellt. In der Tat — von der Tatsache abgesehen, daß manchmal, z. B. in der Zahlentheorie, die asymptotischen Eigenschaften die einzigen einfachen (und daher die einzigen wirklich interessanten) sind — kommt es öfter vor, daß für die Anwendung nicht die exakte, sondern die asymptotische Darstellung mancher Funktionen wichtig ist. In der angedeuteten Systematisierung der „Asymptotik“ haben sich zwei Hauptströmungen herauskristallisiert: 1. Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von Lösungen gewisser (meist linearer) Differentialgleichungen, wenn z. B. die unabhängige Variable oder ein Parameter gegen Unendlich strebt. 2. Die Asymptotik mancher linearer Funktionaltransformationen (z. B. der Laplace-Transformation), das heißt, die Bestimmung — auf der Grundlage bekannter Eigenschaften der „Originalfunktion“ — von gewissen asymptotischen Eigenschaften der „Resultatfunktion“ („Abelsche Asymptotik“) oder umgekehrt („Taubersche Asymptotik“). — Das vorliegende Heft — welches dem bekanntesten Spezialisten der Laplace-Transformation zu verdanken ist — stellt sich ausschließlich auf den zweiten Standpunkt und behandelt hauptsächlich die Abelsche Asymptotik der Laplace-Transformation, sei sie einseitig oder zweiseitig oder auch von einem endlichen Integrationsweg. Teilweise gehen die hier betrachteten „Abelschen Sätze“ über das hinaus, was man in

dem wohlbekannten Handbuch der Laplace-Transformation des Verf. (Basel, Birkhäuser, 1950—55; Teil I dies. Zbl. **40**, 59) finden kann. Die Taubersche Asymptotik wird dagegen nicht eigentlich betrachtet, sondern die indirekte Abelsche Asymptotik, welche Rückschlüsse auf das asymptotische Verhalten der Originalfunktion auf dem Wege über die komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation gestattet. Es werden auch zahlreiche Anwendungen (z. B. auf Zylinderfunktionen, unvollständige Gammafunktion, usw.) betrachtet, die manchmal auch selbständig von Interesse sind. Besonders wertvoll scheinen ferner dem Ref. diejenigen Seiten, auf welchen Verf. die Querverbindungen zwischen Abelscher Asymptotik, Sattelpunktmethode und dem Laplaceschen Problem der „Funktionen großer Zahlen“ klar dargestellt hat. — Dieses Heft — welches aus Vorlesungen des Verf. am „Istituto per le Applicazioni del Calcolo“ in Rom entstanden ist — scheint besonders für eine erste Einführung von angewandten Mathematikern in das betrachtete Feld geeignet.

F. G. Tricomi.

Riekstyňš, Ē. Ja.: Über ein Polynom, das zur Lösung der Telegraphengleichungen anzuwenden ist. Priklad. Mat. Mech. **18**, 738—744 (1954) [Russisch].

Bei der Lösung der Telegraphengleichung für die verzerrungsfreie Leitung (und bei einigen anderen Aufgaben) mittels der Laplace-Transformation hat Verf. gefunden, daß immer wieder zu Ausdrücken der Form

$$\exp(-k p) p^{-1} [(p + a - b)/p + a + b]^n,$$

a, b, k konstant, n ganz, $a - b = 0$, die Oberfunktion zu bilden ist. Dazu stellt er Kombinationen aus Laguerreschen Polynomen auf, die er mit $\text{La}_n(t, \lambda)$ bezeichnet:

$$\text{La}_n(t, \lambda) = - \sum_{k=0}^n \left(\frac{d}{dt} \right)^{k+1} L_{n+1}(t). \text{ Mit ihrer Hilfe gibt er die Oberfunktion zu } f(p) = (p-b)^{-1} [(p-b)\lambda/p]^{n+1} \text{ kurz als } F(t) = \text{La}_n(bt, \lambda) + e^{bt}(1-\lambda)^{n+1}$$

an. Im ersten Teil der Arbeit wird eine Reihe von Formeln für diese Polynome angegeben, im zweiten Teil wird der erwähnte Sonderfall der Telegraphengleichungen mit ihrer Hilfe behandelt und diskutiert.

U. T. Bödewadt.

Bhatnagar, K. P.: A general theorem. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 251—252 (1954).

Es wird ein allgemeiner Satz aufgestellt, der vom Verf. früher (dies. Zbl. **51**, 335; **52**, 110) abgeleitete Sätze als spezielle Fälle enthält.

G. Doetsch.

Bhatnagar, K. P.: Some self-reciprocal functions. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 245—250 (1954).

Die durch $\omega_{\mu\nu}(x) = x^{1/2} \int_0^\infty J_\nu(t) J_\mu\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}$, $\omega_{\mu\nu\lambda}(x) = \int_0^\infty \frac{J_\lambda(t)}{t^{1/2}} \omega_{\mu\nu}\left(\frac{x}{t}\right) dt$

usw. definierten Kerne stimmen für gewisse Werte der Indizes μ, ν, λ usw. mit Besselschen Funktionen überein. Auf Grund dieser Tatsache werden Funktionen angegeben, die in den Transformationen $\int_0^\infty f(x) \omega_{\mu\nu}(xt) dt$ usw. selbstreziprok sind.

G. Doetsch.

Chak, A. M.: Some theorems in operational calculus. I, II. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A **16**, 53—62 (1953); **17**, 11—17 (1954).

I. $\Phi(p)$ und $f(t)$ seien durch die Laplace-Transformation $\Phi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ verbunden. Es werden Sätze folgenden Typs bewiesen: 1. Wenn $t^{-n+1/2} f(t)$ selbstreziprok in der Hankel-Transformation der Ordnung n ist, so ist $t^{n-3/2} \Phi(t)$ selbstreziprok in der Hankel-Transformation der Ordnung $n-1$. 2. Wenn $\Phi(p)$ mit $f(t)$ und $\Psi(p)$ mit $g(t)$ verbunden ist, und wenn $t^{-n+1/2} f(t)$ in der Hankel-Transformation der Ordnung n der Funktion $t^{-n+1/2} g(t)$ entspricht, so entspricht $t^{n-3/2} \Phi(t)$ in der Hankel-Transformation der Ordnung $n-1$ der Funktion $t^{n-3/2} \Psi(t)$. — II. Ver-

allgemeinerung der Resultate von Teil I in der Weise, daß die Hankel-Transformation durch eine allgemeinere Transformation der Gestalt $\int_0^\infty g(xt) f(x) dx$ ersetzt wird.

G. Doetsch.

Šil'krut, D. I.: Über eine Verallgemeinerung der Transformation von Éfros. Priklad. Mat. Mech. **18**, 627—630 (1954) [Russisch].

Die Éfros-Transformation ist eine Verallgemeinerung der Operation im Originalbereich der Laplace-Transformation, die im Bildbereich eine analytische Abbildung der Veränderlichen bewirkt; vgl. etwa in den „Tabellen zur Laplace-Transformation“ von Doetsch (dies. Zbl. **29**, 45) Nr. 38 auf S. 78. Unter bestimmten Voraussetzungen besteht danach, wenn $\mathfrak{L} F(t) = f(p)$ und $\mathfrak{L} G(t) = f(g(p)) \cdot h(p)$, zwischen den Funktionen F, G der Zusammenhang $G(t) = \frac{d}{dt} \int_0^\infty K(t, u) F(u) du$, wobei der Kern K dieser Éfros-Transformation durch das komplexe Umkehrintegral zur Laplace-Transformation $\mathfrak{L} K(t, u) = p^{-1} h(p) \exp[-u g(p)]$ gegeben wird. — Verf. beweist eine ähnliche Formel mit zweimaliger Ableitung, wobei er freilich $g(p)$ durch die Identität ersetzt: $\mathfrak{L} F = f$, $\mathfrak{L} G = f(p) h(p)$; dann wird $G(t) = (d/dt)^2 \int K F du$, mit $\mathfrak{L} K = p^{-2} h \exp(-u p)$. Etwas undurchsichtig bleiben Betrachtungen über Parameter in $F(t)$, die aber von p abhängig gemacht werden. Abschließend einige Anwendungen der Formel.

U. T. Bödewadt.

Brachman, Malcolm K. and J. Ross MacDonald: Relaxation-time distribution functions and the Kramers-Kronig relations. Physica **20**, 1266—1270 (1954).

Verf. zeigt mit Hilfe Mellinscher Integraltransformationen: Real- und Imaginärteil von $J(\omega) = i H(\omega) = \int_0^\infty \frac{G(\tau) d\tau}{1 + i \omega \tau}$ genügen den „Kramers-Kronig-Relationen“

$$H(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{J(y) dy}{\omega^2 - y^2}, \quad J(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{H(y) y dy}{y^2 - \omega^2}.$$

Wenn andererseits $J(\omega)$ und $H(\omega)$ diesen Relationen genügen, so läßt sich dazu ein $G(\tau)$ angeben. Das Resultat ist in der Theorie der physikalisch realisierbaren Netzwerke von Bedeutung.

A. Stöhr.

Min, Szu-Hoa: Eine Bemerkung über die Bestimmung eines Grenzwertes. Acta math. Sinica **4**, 381—384 und russische Zusammenfassg. 385 (1954) [Chinesisch].

Let $\omega(u)$ be a real function defined by the relations $\omega(u) = u^{-1}$, for $1 \leq u \leq 2$ and $\frac{d}{du}(\omega(u)) = \omega(u-1)$, for $u > 2$. Let $f(s)$ be the Laplace transform of $\omega(u+1)$. The reviewer [Acta Sci. Sinica **2**, 393—402 (1951), since the paper is not reviewed in this Zbl., a little detail account is given here] proved that $f(s)$ satisfies the differential equation $f'(s) + |s^{-1}(e^s - 1) - 1| f(s) = s^{-1}(1 - e^{-s})$ with the initial condition $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$. Solving the differential equation, we obtain

$$f(s) = -1 - s e^s + \exp\left(-\gamma + s + \int_0^s t^{-1}(1 - e^{-t}) dt\right).$$

By Tauberian theorem, we have $\lim_{u \rightarrow \infty} \omega(u) = e^{-\gamma}$, where γ is Euler's constant. This result is due to Buchstab [Mat. Sbornik, n. Ser. **2** (44), 1239—1246 (1944)]. Further the reviewer used a simple lemma that if $F(u) > 0$ and $F(u) \leq \frac{1}{u} \int_0^1 F(u-1+\vartheta) d\vartheta$ then

$$F(u) \leq \exp\left[-u\left(\log u + \log \log u + \frac{\log \log u}{\log u} - 1\right) + O\left(\frac{u}{\log u}\right)\right];$$

and deduced that $\omega(u) - e^{-\gamma} = - \int_u^\infty \omega'(t) dt$

$$= O\left(\exp\left[-u\left(\log u + \log \log u + \frac{\log \log u}{\log u} - 1\right) + O\left(\frac{u}{\log u}\right)\right]\right).$$

By the inversion formula of Laplace transformation, the author proves that

$$\omega(u) - e^{-\gamma} = \frac{e^{-\gamma}}{2\pi i u(u-1)} \int_{-a-i\infty}^{-a+i\infty} \frac{e^{s(u-1)}(e^{-s} + 1)}{s} \exp\left(-\int_0^s \frac{e^{-x}-1}{x} dx - \log s\right) ds.$$

He then deduces the same estimation of the reviewer.

L. K. Hua.

Pistoia, Angelo: Sul prodotto di composizione, nella teoria della trasformata doppia di Laplace. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **87** (III. Ser. 18), 627–652 (1954).

Unter gewissen Voraussetzungen, die hauptsächlich absolute Konvergenz betreffen, ist die zweidimensionale Laplace-Transformierte der Faltung $F * G(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) G(x-u, y-v) du dv$ gleich dem Produkt der Transformierten von F und G , und die zweidimensionale Laplace-Transformierte der Faltung längs einer Achse, die mit der x -Achse den Winkel α bildet:

$$H * F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau) F(x - \tau \cos \alpha, y - \tau \sin \alpha) d\tau$$

gleich der Transformierten von F , multipliziert mit $h(p \cos \alpha + q \sin \alpha)$, wo h die eindimensionale Transformierte von H ist. Diese Sätze werden auf allgemeinere Fälle ausgedehnt, bei denen keine absolute Konvergenz vorausgesetzt wird. In Analogie zu Untersuchungen von A. Ghizzetti (dies. Zbl. **35**, 64) wird ein Kriterium für die Integrabilität der Ordnung $\alpha > -1$ für eine Funktion von zwei Variablen aufgestellt. Zum Schluß wird gezeigt, wie die Resultate auf die „Faltung hinsichtlich einer linearen Mannigfaltigkeit“ verallgemeinert werden können. *G. Doetsch.*

Chakravarty, N. K.: On some theorems and inequalities in operational calculus with two variables. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 221–235 (1954).

Nach Herleitung einiger spezieller Korrespondenzen für die zweidimensionale Laplace-Transformation

$$f(p, q) = p q \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} h(x, y) dx dy, \quad \text{symbolisch } f(p, q) \doteq h(x, y),$$

wird der Satz bewiesen: Aus $h(x, y) \doteq f(p, q)$ und $h(x^2, y^2) \doteq 4q(\frac{1}{4}p^2, \frac{1}{4}q^2)/pq$ folgt $q(p, q) \doteq \pi^{-1}(xy)^{-1/2} f(x^{-1}, y^{-1})$. Ferner wird eine allgemeine Ungleichung für mehrfache Integrale aufgestellt und zur Ableitung von Ungleichungen etwa folgender Art benutzt: Aus $\varphi(p, q) \doteq g(x, y)$ folgt

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-x-y} \varphi(x, y)}{xy} dx dy < \frac{\pi}{2} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty g^2(x, y) dx dy \right\}^{1/2}.$$

G. Doetsch.

Chakravarty, N. K.: On certain theorems in operational calculus with n variables. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 259–264 (1954).

Es werden Sätze von folgendem Typus bewiesen: Wenn $h(p)$ und $g(x)$ in der eindimensionalen und $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ und $h(x_1, \dots, x_n)$ in der n -dimensionalen Laplace-Transformation einander entsprechen, so besteht ein gewisser Zusammenhang zwischen $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ und $g(x)$. *G. Doetsch.*

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

● **Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis.** Ins Deutsche übertragen von L. Boll und U. Roth. (44. Beiheft zur „Sowjetwissenschaft“) Berlin: Verlag Kultur und Fortschritt 1954. 274 S., DM, 20.—.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

Mikulík, Miloslav: Metric lattices. Czechosl. math. J. 4 (79), 364—370 und engl. Zusammenfassg. 370—371 (1954) [Russisch].

Sia dato un reticolo S il quale goda delle seguenti proprietà: (U_1) S è un reticolo completo; (U_2) In S esiste una metrica ϱ rispetto alla quale S è compatto; (U_3) Dato un insieme non vuoto $A \subset S$, siano $l = \bigwedge_{t \in A} t$, $L = \bigvee_{t \in A} t$ il minimo e il massimo assoluto di A (certo esistenti per U_1); si ha allora: $d(A) = \varrho(l, L)$, essendo $d(A)$ il diametro di A rispetto alla metrica ϱ . [L'A. è stato condotto allo studio di reticoli S siffatti da un esempio particolare: quello dell'insieme M delle soluzioni di una equazione differenziale del tipo $x' = f(t, x)$, f uniformemente continua e limitata in un opportuno campo; M può infatti essere trasformato in un reticolo del tipo S qualora in esso si introducano, nel modo più „naturale“, un ordinamento parziale e una metrica.] In un reticolo completo, come è noto, si dice che la successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o -converge a x ($x_n \xrightarrow{o} x$), se $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k = x$; si dirà poi che la medesima successione $*$ -converge a x ($x_n \xrightarrow{*} x$), se da ogni successione parziale $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ si può estrarre una subsuccessione $\{x_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ la quale o -converge ad x . Nella presente nota l'A. dimostra innanzitutto che: (teor. 1) In un reticolo S convergenza, o -convergenza e $*$ -convergenza coincidono. Un subreticolo $A \subset S$ non vuoto si dice convesso se, contenendo due elementi x, y , contiene anche ogni z tale che: $x \leq z \leq y$; si dice chiuso se, contenendo un sottoinsieme X , contiene il suo massimo e minimo assoluto. Si ha allora che: (teor. 2) Un subreticolo non vuoto convesso $A \subset S$ è chiuso quando e soltanto quando A è compatto.

L. Lombardo-Radice.

Grothendieck, Alexandre: Sur les espaces (F) et (DF) . Summa Brasil. Math. 3, 57—121 (1954).

Les résultats principaux de cet important travail ont été annoncés en 1950 (ce Zbl. 37, 80); il se divise en 3 parties. La première est consacrée à l'étude des duals forts d'espaces (F) et à une catégorie plus générale que l'A. appelle espaces (DF) : ce sont les espaces localement convexes admettant une suite fondamentale de parties bornées et tels que toute intersection dénombrable de voisinages convexes cerclés fermés de 0, qui absorbe les parties bornées, est elle-même un voisinage. Le premier résultat de l'A. est qu'un dual fort d'espace (F) satisfait à cette dernière condition (moins restrictive que la propriété d'être quasi-tonnelé.) Tout espace quotient d'un espace (DF) par un sous-espace fermé est un espace (DF) , ainsi que toute limite inductive d'une suite d'espaces (DF) [mais un sous-espace fermé d'un espace (DF) n'en est pas nécessairement un]; tout espace de Banach est (DF) , ce qui montre qu'effectivement on a une catégorie plus vaste que celle des duals d'espaces (F) . Si E est un espace (DF) , G un espace localement convexe quelconque, pour qu'une application linéaire u de E dans G soit continue, il suffit que sa restriction aux parties bornées de E le soit; en particulier, si G est complet, l'espace $L(E, G)$ est complet pour la topologie de la convergence bornée, et plus particulièrement le dual fort de E est complet. En outre, si F est un sous-espace fermé de E , sur F^0 la topologie induite par la topologie forte de E' , et la topologie de dual fort de E/F , coïncident (propriété connue seulement jusqu'ici pour les espaces normés); de même la topologie quotient de la topologie de E' fort par F^0 et la topologie de dual fort de F coïncident sur E'/F^0 lorsque F est lui aussi un espace (DF) . Cette dernière proposi-

tion ne suppose d'ailleurs pas que E soit lui-même un espace (DF) , et elle est encore vraie lorsque F est métrisable et distingué. Un espace (DF) dans lequel il y a une suite partout dense, ou dont les parties bornées sont métrisables, est quasi-tonnelé. En outre, pour un dual fort E' d'espace (F) , E' est bornologique si et seulement si il est tonnelé (ou encore si E est distingué); mais un exemple de G. Köthe reproduit par l'A. montre qu'il n'en est pas toujours ainsi. La seconde partie contient une série de contre-exemples très ingénieux d'espaces (LF) , répondant par la négative à la plupart des questions posées par le Réf. et L. Schwartz [Ann. Inst. Fourier, 1, 61—101 (1949); ce Zbl. 35, 355]. L'A. donne aussi un exemple d'espace de Montel métrisable et complet (donc réflexif) dont un quotient est l'espace de Banach (l^1) non réflexif! Il montre enfin que pour une catégorie étendue d'espaces (F) , il y a dans le dual E' un sous-espace V et un point x' fortement adhérent à V qui n'est faiblement adhérent à aucune partie bornée de V . Enfin la troisième partie est consacrée à la définition et l'étude de deux nouvelles classes d'espaces localement convexes, les espaces quasi-normables et les espaces de Schwartz; des exemples ont été rencontrés par ce dernier en théorie des distributions, et l'A. a montré depuis que ces catégories d'espaces comprennent plus généralement ses espaces nucléaires [Mem. Amer. math. Soc. 16 (1955); ce Zbl. 55, 97; 64, 355]. Un espace E est quasi-normable si pour toute partie équivariante A de E' il y a un voisinage V de 0 dans E tel que la topologie induite sur A par la topologie forte de E' soit identique à la topologie de la convergence uniforme dans V . Un espace de Schwartz est un espace quasi-normable dont les parties bornées sont précompactes. Toute application linéaire continue d'un espace quasi-normable semi-réflexif E dans un espace de Banach F transforme un certain voisinage de 0 dans E en une partie relativement faiblement compacte de F . Les espaces de Schwartz sont remarquablement stables pour les opérations usuelles: sous-espace, espace quotient, produit quelconque, limite inductive dénombrable. Le mémoire se termine par une liste de questions non résolues.

J. Dieudonné.

Kasahara, Shouro: A characterization of Hilbert space. Proc. Japan Acad. 30, 846—848 (1954).

Let E be a Banach space in which the norm satisfies the following condition. (*) There is a constant α not exceeding $1/2$, and for each pair x, y of points of E there is at least one λ with $\alpha \leq \lambda \leq 1 - \alpha$, such that

$$\lambda \|x\|^2 + (1 - \lambda) \|y\|^2 \geq \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 + \|\lambda x + (1 - \lambda) y\|^2.$$

It is proved that, given any closed subspace M of E , there is a projection of E onto M with norm 1. Using a result of Kakutani (this Zbl. 22, 150), this shows that the condition (*) characterizes Hilbert space.

F. F. Bonsall.

Blanuša, D.: Plongement isométrique de l'espace de Hilbert généralisé dans une hypersphère de l'espace de Hilbert. Conseil Acad. RPF Yougoslavie, Bull. sci. 2, 10 (1954).

Froda, Alexandru: Ensembles de distances dans l'espace Euclidien total. Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat. 5, 29—67, russ. und franz. Zusammenfassg. 67—69, 69—71 (1954) [Rumänisch].

Die Teilmenge des cartesischen Produktes abzählbar vieler Geraden, die aus den Punkten besteht, die nur endlich viele von Null verschiedene Koordinaten besitzen, wird mit T bezeichnet und mit der üblichen euklidischen Metrik versehen. Für $E \subset T$ wird die Menge aller Entfernungen $d(P, Q)$, $P \in E$, $Q \in E$, $P \neq Q$, mit $D(E)$ bezeichnet: E heißt „mit ungleichen Entfernungen“, falls aus $d(P, Q) = d(R, S) \neq 0$ mit $P, Q, R, S \in E$ entweder $P = R$ und $Q = S$ oder $P = S$ und $Q = R$ folgt. Minimal heißt E , falls je endlich viele Vektoren P, Q mit $P \in E$, $Q \in E$, linear unabhängig sind. — Hauptergebnis: Es gibt abzählbare, in $(0, +\infty)$ dichte Mengen L mit der Eigenschaft, daß jedes $E \subset T$ mit ungleichen Entfernungen

minimal ist, sobald $D(E) \subset L$ gilt. Die Menge aller solchen L wird mit \mathfrak{L} bezeichnet. Jede in $(0, +\infty)$ dichte Teilmenge einer Menge aus \mathfrak{L} gehört zu \mathfrak{L} . Jede in $(0, +\infty)$ dichte Menge besitzt eine dichte, zu \mathfrak{L} gehörende Teilmenge. Die Menge aller rationalen Zahlen aus $(0, +\infty)$ gehört nicht zu \mathfrak{L} . Gesättigt heißt $L \in \mathfrak{L}$, falls aus $t \in (0, +\infty)$ und $t \notin L$, $L \cup t \notin \mathfrak{L}$ folgt. Jede Menge aus \mathfrak{L} , deren Mächtigkeit kleiner ist als das Kontinuum, ist Teilmenge einer gesättigten Menge L aus \mathfrak{L} , die im folgenden Sinne stark nicht meßbar ist: für jedes Intervall J ist das äußere Maß von $J \cap L$ dem von $J - L$ gleich, und beide sind dem Maß von J gleich. Für jedes $L \in \mathfrak{L}$ ist die Komplementärmenge $(0, +\infty) - L$ von zweiter Baireschen Kategorie in jedem Intervall.

T. Ganea.

Berge, Claude: Sur un théorème de la convexité régulière non linéaire. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2485—2486 (1954).

Die in dem Separationssatz der Arbeit des Verf., dies. Zbl. **57**, 352, angegebene Funktion $f(x)$ läßt sich so wählen, daß die dortigen Ungleichungen für diese scharf bestehen.

W. Gaschütz.

Christescu, Romulus: Espaces partiellement ordonnés pseudo-normés. Commun. Acad. Republ. popul. Romine **4**, 15—19, russ. u. französ. Zusammenfassg. **19**, 19—20 (1954) [Rumänisch].

This paper covers much the same ground as another communication by the same author (this Zbl. **57**, 338).

E. Hewitt.

Gillman, Leonard and Melvin Henriksen: Concerning rings of continuous functions. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 340—362 (1954).

Es bezeichne X einen vollständig regulären, separierten Raum und $C = C(X, R)$ den Ring aller stetigen, reellen (nicht notwendig beschränkten) Funktionen auf X . Im ersten Teil der Arbeit werden die Beziehungen zwischen den maximalen Idealen und den Primidealen von C studiert. Besondere Bedeutung kommt hierbei den wie folgt definierten pseudo-diskreten Räumen (kurz: P -Räumen) zu. X heißt P -Raum, wenn jede Nullstelle $x \in X$ einer beliebigen Funktion $f \in C$ eine Umgebung besitzt, auf welcher f identisch verschwindet. Verf. beweisen u. a. die Gleichwertigkeit folgender Aussagen: (1) X ist P -Raum; (2) der Durchschnitt einer jeden Folge offener Teilmengen von X ist offen; (3) C ist ein regulärer Ring; (4) jedes Primideal in C ist maximal; (5) jedes Ideal in C ist der Durchschnitt aller maximalen Ideale, die es enthalten. Eingehend untersucht werden sodann die linear geordneten P -Räume. — In einem zweiten, vom ersten im wesentlichen unabhängigen Teil werden diejenigen linear geordneten Räume untersucht, die zugleich Q -Räume im Sinne von E. Hewitt (vgl. dies. Zbl. **32**, 286) sind. Es zeigt sich, daß ein linear geordneter Raum X dann und nur dann Q -Raum ist, wenn X parakompakt und jeder abgeschlossene (diskrete) Unterraum von X ein Q -Raum ist. Allgemein erweist sich jeder linear geordnete Raum als „abzählbar parakompakt“.

H. Bauer.

Yamamuro, Sadayuki: Modulated sequence spaces. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **12**, 1—12 (1954).

Verf. geht aus von einer Folge $\{f_v\}$ monoton wachsender, konvexer reeller Funktionen einer reellen Variablen mit folgenden Eigenschaften: 1. $f_v(0) = 0$, 2. $\lim_{\xi \rightarrow \infty} f_v(\xi) = f_v(\infty)$, 3. $\lim_{\xi \rightarrow \infty} f_v(\xi) = +\infty$, 4. $f_v(\xi)$ ist nicht für alle $\xi > 0$ gleich $+\infty$. Für jede Folge $x = \{\xi_v\}$ von reellen Zahlen wird nun $m(x) = \sum_v f_v(\xi_v)$ gebildet. Bezeichnet man mit $l(f_v)$ die Menge aller Folgen x , für die $x > 0$ existiert, so daß $m(x)$ endlich ist; setzt man ferner $\|x\| = \inf_{\eta} \eta$ ($\eta > 0$, $m(x/\eta) \leq 1$), so wird $l(f_v)$ mit $\|x\|$ als Norm ein Banachscher Raum. Es werden nun notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß a) $l(f_v)$ die summierbaren Folgen enthält und b) $l(f_v)$ nur beschränkte Folgen enthält. Für die Gültigkeit des Schurischen Satzes, wonach starke und schwache Konvergenz in $l(f_v)$ äquivalent sind, ist (unter

gewissen zusätzlichen Forderungen an die f_r) a) hinreichend die Bedingung: $\lim_{r \rightarrow \infty} \chi^r = 1$, b) notwendig die Bedingung: für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\chi_r < 1 + \varepsilon$ für fast alle r . (Hier ist $\chi^r [\chi_r] = \inf [\sup] p$ ($p \geq 1$, $f_r(\xi)/\xi^p$ monoton abnehmend [monoton zunehmend])). *W. Nef.*

Yamamuro, Sadayuki: On finite modulars. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **12**, 13—21 (1954).

Sei R ein teilgeordneter Vektorraum und $m(a)$ eine auf R definierte reelle Funktion mit folgenden Eigenschaften (vgl. Nakano, *Modulated semi-ordered linear spaces*, dies. Zbl. **41**, 234): 1. $0 \leq m(a) \leq +\infty$, 2. $m(\xi a) = 0$ (für alle $\xi > 0$) $\rightarrow a = 0$, 3. Zu $a \in R$ existiert $\xi > 0$, so daß $m(\xi a) < +\infty$, 4. Für jedes $a \in R$ ist $m(\xi a)$ eine konvexe Funktion von $\xi > 0$, 5. $[a] \leq [b] \rightarrow m(a) \leq m(b)$, 6. $a + b = 0 \rightarrow m(a + b) = m(a) + m(b)$, 7. $0 \leq a_2 \uparrow \lambda \in A \rightarrow m(a) = \sup_{\lambda \in A} m(a)$, $a \in R$ heißt endlich, wenn $m(\xi a) < +\infty$ für alle $\xi > 0$. Wenn jedes $a \in R$ endlich ist, so heißt m endlich. Wenn $\gamma > 0$ existiert, so daß $m(2\xi a) \leq \gamma m(\xi a)$ (für alle $\xi > 0$), so heißt a nach oben beschränkt. Wenn alle $a \in R$ mit demselben γ nach oben beschränkt sind, so heißt m nach oben beschränkt. Die Endlichkeit von m folgt aus der Beschränktheit nach oben. Daß die Umkehrung falsch ist, wird durch ein Beispiel belegt. Hingegen folgt aus der Endlichkeit die Beschränktheit nach oben in einem etwas schwächeren Sinn. Falls R insbesondere ein Folgenraum ist (siehe vorhergehend. Referat), wird dieses Ergebnis mit Resultaten von Orlicz und Birnbaum in Beziehung gesetzt. *W. Nef.*

Amemiya, Ichiro: A characterization of the modulars of L_p type. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **12**, 22—33 (1954).

Sei R ein teilgeordneter Vektorraum und $m(x)$ eine auf R definierte reelle Funktion mit denselben Eigenschaften wie im vorhergehenden Referat. Es lassen sich dann auf R die folgenden beiden Normen bilden: 1. $\|x\| = \inf_{n > 0} \eta$ ($n > 0$, $m(\frac{x}{\eta}) \leq 1$), 2. $\|x\| = \inf_{\xi > 0} \frac{1 - m(\xi x)}{\xi}$. — Ist $R = L_p$ ($p \geq 1$), so ist $\|x\| = x \|x\|$, wo $x = p^{1/p} \cdot q^{1/q}$ ($1/p + 1/q = 1$). Nakano hat vermutet, daß hiervon auch die Umkehrung gilt und die vorliegende Arbeit dient der Aufklärung dieser Frage. *W. Nef.*

Krasnosel'skij, M. A. und Ja. B. Rutickij: Über lineare Funktionale in Orlicz-schen Räumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 581—584 (1954) [Russisch].

Let M and N be two complementary N' -functions (see Z. W. Birnbaum and W. Orlicz, this Zbl. **3**, 252). The Orlicz class L_M is the set of all measurable functions $u(x)$ (defined on a fixed compact subset of an Euclidean space) such that $\varrho(u, M) = \int M(u(x)) dx < \infty$. The Orlicz space L_M^* is the least linear set containing L_M , with the norm $\|u\|_M = \sup_{\varrho(v, N) \leq 1} \int u(x) v(x) dx$. Let E_M denote the greatest linear subspace of L_M . A sequence $u_n \in L_M^*$ is said to be (o)-weakly convergent if the sequence $\int u_n(x) v(x) dx$ converges for every $v \in E_N$. — The following theorems are proved: (1) Every linear functional $F(u)$ on E_M is of the form $F(u) = \int u(x) v(x) dx$ where $v \in L_N^*$. (2) If every linear functional $F(u)$ on L_M^* is of the above form, then M satisfies the condition A_2 , i. e. $\limsup_{t \rightarrow \infty} M(2t)/M(t) < \infty$ (this theorem is converse to a theorem of Orlicz, this Zbl. **6**, 315). (3) The set E_M is the closure in L_M^* of the set of bounded functions. (4) For each $u \in L_M$, the distance between u and E_M is ≤ 1 . (5) If $u_0 \in E_M$, then the sphere $\|u - u_0\|_M \leq 1$ is contained in L_M . (6) L_M^* is (o)-weakly compact and (o)-weakly complete. — The paper contains also a criterion for an integral operation from L_M^* into L_M^* , to be completely continuous. *R. Sikorski.*

Rutickij, Ja. B.: Über eine Eigenschaft eines vollstetigen linearen Integraloperators, der in einem Orlicz'schen Raume wirkt. Uspechi mat. Nauk **11**, Nr. 2 (68), 201—208 (1956) [Russisch].

We assume the same terminology and notation as in the preceding review. M, N and M_i, N_i ($i = 1, 2, 3$) denote some pairs of complementary N' -functions. The following theorems are proved: (1) A linear functional F on L_M^* is of the form $F(u) = \int u(x) v(x) dx$ where $v \in E_N$ if and only if it is (o) -weakly continuous. (2) Suppose that $\iint |K(x, y) u(y) v(x)| dx dy < \infty$ for $u \in L_{M_1}^*$ and $v \in L_{N_1}^*$, and that the operation $A u(x) = \int K(x, y) u(y) dy$ from $L_{M_1}^*$ into $L_{M_2}^*$ is completely continuous. The operation A transforms every (o) -weakly convergent sequence into a strongly convergent one if and only if the adjoint operation $A^* v(x) = \int K(y, x) v(y) dy$ transforms E_{N_2} into E_{N_1} . (3) Suppose that $\|u(x) v(y)\|_{M_1} \leq C \|u\|_{M_1} \|v\|_{N_1}$ for $u \in L_{M_1}^*$ and $v \in L_{N_1}^*$, and that $K(x, y)$ belongs to $L_{N_1}^*$. Then the operation A defined in (2) is completely continuous and transforms every (o) -weakly convergent sequence into a strongly convergent one. (4) If the operator \hat{f} defined by the formula $\hat{f}(u x) = f(x, u(x))$ (where f is continuous) transforms the open unit sphere S of $L_{M_1}^*$ into L_{M_2} , then $u_n \rightarrow u_0$ ($u_n, u_0 \in S$) implies $\hat{f} u_n \rightarrow \hat{f} u_0$ (o) -weakly. — Some application of the last theorem to the proof of the complete continuity of an operator of the Hammerstein type $B\varphi(x) = \int K(x, y) f(y, \varphi(y)) dy$ is also discussed.

R. Sikorski.

Krasnosel'skij, M. A.: Die Zerspaltung linearer Integraloperatoren, die aus einem Orlicz'schen Raum in einen anderen operieren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 777—780 (1954) [Russisch].

Let M, N, P, Q be some N' -functions (see Z. W. Birnbaum und W. Orlicz, this Zbl. **3**, 252). Suppose that M and N are complementary and that $M(u)$ increases more rapid than u^2 as $u \rightarrow \infty$. Let L_M^*, L_N^*, \dots denote the Orlicz spaces (defined on a compact subset of an Euclidean space) determined by M, N, \dots respectively. Let A be a linear (= additive and continuous) integral transformation of L_N^* into L_M^* with a symmetric, positive definite kernel $K(s, t)$ where $\iint |K(s, t)|^2 ds dt < \infty$. Obviously, A can be also interpreted as an endomorphism in the Hilbert space L^2 ; let $H = A^{1/2}$. The following theorems are announced: (1) If $M(u) = (P(u))^{1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), then H is a continuous transformation from L^2 into L_M^* . If M satisfies the condition Δ_2 (i. e. $\limsup_{u \rightarrow \infty} M(2u)/M(u) < \infty$), then H is completely continuous.

(2) If M satisfies the condition Δ_2 (i. e. there are positive constants a, b such that $M(au) < M^2(u) < M(bu)$ for $u > u_0$), then H is a continuous transformation of L^2 into L_M^* . (3) If $M(u) = (P(Q(u)))^{1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) or if $M(u) = P(Q(u))$ where P satisfies the condition Δ_2 , then H is a completely continuous transformation of L^2 into L_P^* . (4) If $M(u) = P(Q(u))$ and P and Q satisfy the condition Δ_2 , then H is a completely continuous transformation of L^2 into L_P^* . (5) If H is a continuous transformation from L^2 into L_M^* , then $A q = H H^* q$ for q belonging to the closure of $L_N^* \cap L^2$ (H^* is the transformation adjoint to H). (6) If $M(u)$ satisfies the condition Δ_2 and $\iint M(Q(K(s, t))) ds dt < \infty$, then $A = H H^*$ and H is a completely continuous transformation of L^2 into L_M^* . — As an application of the above results the author quotes a theorem on existence of a solution of the non-linear integral equation $\varphi(s) = \int K(s, t) f(t, \varphi(t)) dt$.

R. Sikorski.

Marinescu, G.: Sur la différentielle et la dérivée dans les espaces normés. Acad. Republ. popul. Romine, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. **6**, 213—217, russ. u. französ. Zusammenfassg. 218, 218—219 (1954) [Rumänisch].

E sei ein normierter reeller linearer Raum, F ein Banachscher Raum, x_0 ein Punkt von E , und T ein Operator, der eine Umgebung $U(x_0)$ in F abbildet. $\delta T(x_0; h)$

bezeichne das Gâteauxsche Differential von T , $dT(x; h)$ das Fréchet'sche Differential von T . Satz: $\delta T(x; h)$ existiere für alle $x \in U(x_0)$, und $\delta T(x; h)$ sei stetig für $x = x_0$ für alle $h \in E$, ferner sei $\delta T(x_0; h)$ stetig für $h = 0$. Dann ist $\delta T(x_0; h)$ linear und stetig als Funktion von h . Aus diesem Satz erhält Verf. zwei Sätze, die hinreichende Bedingungen für die Identität $\delta T(x; h) = dT(x; h)$ geben. Schließlich kündigt er einen Satz an, unter der Voraussetzung, daß die schwache Topologie in F dieselbe wie die normierte ist. Dies impliziert natürlich, daß F endlichdimensional ist.

E. Hewitt.

Scarfello, R.: Sur le changement de variables dans les distributions et leurs transformées de Fourier. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. **12**, 471–482 (1954).

Die Distributionen (über dem R^n) kann man bekanntlich sowohl als verallgemeinerte Funktionen wie auch als verallgemeinerte Maße deuten; bei jeder dieser Auffassungen wird man ihnen bei Variablentransformationen das angemessene Transformationsverhalten beilegen. Verf. gelangt zu diesen Transformationsweisen, indem er die Distributionen als de Rham'sche Courants, einerseits vom Grade 0 und andererseits vom Grade n , auffaßt und für Courants von beliebigem Grade das Transformationsverhalten bei Isomorphismen des R^n in sich (es wird nicht gesagt, was hierunter genau zu verstehen ist) in natürlicher Weise rekursiv nach ihrem Grad definiert.

— Weiter wird die Fouriertransformation F für Courants definiert und die für Courants T vom Grade 0 gültige Relation $F H \overset{0}{T} = \overset{0}{H} F \overset{0}{T}$ (H Isomorphismus des R^n auf sich, $\overset{v}{H}$ kontragredienter Isomorphismus) auf solche beliebigen Grades ausgedehnt. Anwendungen werden auf die Diracdistribution und die Pseudofunktionen gemacht.

H. König.

Pitcher, Tom: Sets of „positive“ functions in H-systems. *Trans. Amer. math. Soc.* **77**, 481–489 (1954).

Es sei G eine separable, lokalkompakte unimodulare Gruppe, $L^2(G)$ der Raum der bezüglich des Haarschen Maßes quadratisch integrierbaren Funktionen, und P die Gesamtheit der f. ü. nichtnegativen Elemente auf $L^2(G)$. Es sei ferner M der durch die Operatoren $(U_g f)(x) = f(g^{-1}x)$ ($f \in L^2(G)$, $g \in G$) erzeugte Operatorring in $L^2(G)$. Es wird bewiesen, daß in M die U_g ($g \in G$) die einzigen unitären Operatoren sind, die P in sich transformieren. Es sei ferner \mathfrak{H} ein H-System im Sinne von W. Ambrose (dies. Zbl. **32**, 356). Eine Untermenge P' von \mathfrak{H} wird Menge von positiven Funktionen genannt, wenn der zu \mathfrak{H} gehörige Hilbertraum als der L^2 -Raum eines Maßraumes dargestellt werden kann, so daß P' mit der Menge der f. ü. nichtnegativen Funktionen desselben zusammenfällt. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß \mathfrak{H} mit dem L^2 -System einer lokalkompakten unimodularen Gruppe identifiziert werden kann, so daß P in die Menge der f. ü. nichtnegativen Funktionen übergeht.

L. Pukánszky.

Fleming, W. H.: On a class of games over function space and related variational problems. *Ann. of Math.*, II. Ser. **60**, 578–594 (1954).

Setting. X : compact subset of euclidean k -space R^k . Y : compact subset of R^l . T : compact metric space. W : non-negative, finite, non-atomic Radon measure on T with $W(T) = 1$. \mathfrak{W} : family of the W -nullsets. $K(x, y, t)$: continuous (numerical) function defined on $X \times Y \times T$. q_i , $i = 1, 2, \dots, m$: continuous functions defined on $X \times T$. ψ_j , $j = 1, 2, \dots, n$: continuous functions defined on $Y \times T$. A play of the game G consists of the choice of a (Borel) measurable mapping $x(t)$ of T into X by player I and of a (Borel) measurable mapping $y(t)$ of T into Y by player II. The payoff (to I) is $M(x(t), y(t)) = \int_T K(x(t), y(t), t) dW$. The strategies $x(t), y(t)$ are subjected to the following constraints: $\int_T q_i(x(t), t) dW = a_i$, $\int_T \psi_j(y(t), t) dW = b_j$.

Definition of a mixed strategy. To any measurable mapping $x = x(t, u)$ of $T \times [0, 1]$ into X there corresponds an element f of the conjugate C_1^* of the Banach space C_1 of all real valued continuous functions φ on $X \times T$ defined by

$$f(\varphi) = \int_0^1 \int_T \varphi(x(t, u), t) dW du. \quad x(t, u) \text{ is called a description of } f. \quad S_1 \text{ denotes}$$

the set of all elements of C_1^* admitting such descriptions $x(t, u)$. The Radon measure $\gamma = \gamma_f$ on $X \times T$ corresponding to $f \in S_1$ possesses the following property (\mathcal{P}): for all Borel subsets E of T , $\gamma(X \times E) = W(E)$. Lemma 1: To any Radon measure γ on $X \times T$ with property (\mathcal{P}) there exists a conditional probability distribution α_t on X unique mod \mathfrak{N} such that $\int_{X \times T} \varphi(x, t) d\gamma = \int_T \int_X \varphi(x, t) d\alpha_t dW$ and the linear functional so defined belongs to S_1 . The mixed strategy space \hat{S}_1 is defined as the set of all $f \in S_1$ for which $f(\varphi_i) = a_i$. Similarly for \hat{S}_2 . The payoff $M(f, g)$ for $f \in S_1$, $g \in S_2$ with descriptions $x(t, u)$, $y(t, v)$ is defined as $\int_0^1 \int_0^1 \int_T K(x(t, u), y(t, v), t) dW du dv$. It is independent the particular descriptions used. Theorem 1. The game G has a solution f_0, g_0 in mixed strategies. Hint to the proof: \hat{S}_1 and \hat{S}_2 are convex and weakly compact. $M(f, g)$ is bilinear and weakly continuous in f and in g . A special case of a theorem by Ky Fan (this Zbl. 50, 65) is applied. Lemma 3: For $f \in S_1$ there exists a description $x(t, u)$ such that for almost all u , $f(\varphi_i) = \int_T \varphi_i(x(t, u), t) dW$. Hint to the proof: If $x_1(t, u)$ is a description of $f \in S_1$ and $Z(t, u)$ a measurable function defining for each t a rearrangement of $[0, 1]$, then $x(t, u) = x_1(t, Z(t, u))$ is also a description of f . $Z(t, u)$ has to be suitably chosen. Actual playing of (f_0, g_0) . Player I determines first a description $x_0(t, u)$ of f_0 according to Lemma 3, chooses $u = u_0$ at random (e. g. by spinning a pointer) and plays pure strategy $x_0(t, u_0)$. Similarly for player II. Theorem 2 asserts that, under an interiority requirement for the constraints, $\alpha_{0,t}$ and $\beta_{0,t}$ corresponding to f_0 and g_0 are W -almost everywhere on T a mixed strategy solution for the game over $X \times Y$ with payoff $K(x, y, t) + \sum \lambda_i^0 \varphi_i(x, t) + \sum \mu_j^0 \psi_j(y, t)$ for suitable multipliers λ_i^0 and μ_j^0 . Particular cases. (1) K does not contain y . (2) K does not contain t . (3) K is a function of (x, t) alone, $T = [0, 1]$, W is the Lebesgue measure. The game reduces to a 1-dimensional calculus of variation problems if we regard $x(t)$ as derivative of a function $\xi(t)$. The comparison functions $\xi(t)$ are uniformly Lipschitzian. Using Th. 1 and Lemma 3 a solution $\xi_0(t)$ is shown to exist (without concavity assumptions on K). (4) One dimensional variational problems in parametric form are treated similarly. [Remarks by the reviewer. In the proof of the existence of α_t corresponding to γ fulfilling (\mathcal{P}), the only properties of the family Γ of the Borel subsets I of X used are the existence of an enumerable Boolean algebra $I^0 \subset \Gamma$ generating Γ (in the sense of Borel) and of an enumerable family $\tilde{\delta}$ of decreasing evanescent sequences of I^0 -sets such that every sequence of I^0 -sets with the empty set as Borel limit is dominated by an $\tilde{\delta}$ -sequence. The procedure followed to attach to γ a description $x(t, u)$ rests on the existence of a homomorphism H of the Boolean σ -ring of the Borel sets Θ of $[0, 1]$ onto the Boolean σ -ring I^* (in the paper $H(\Theta) = X \cap B^{-1}(\Theta)$, B denoting a Borelian biunique mapping of R^k onto R^1 . As in a paper by Hewitt and Savage, Trans. Amer. math. Soc. 80, 470—501 (1955), the requirement of compact topologies (here on X , Y and T) aims at the use of weak topologies (namely of C_1^* and C_2^*). Topology could be removed from the paper reviewed in case of a positive answer to Hewitt's problem: Can the bounded measures defined on a Boolean σ -algebra \mathfrak{M} of sets with unit U (without topology) be interpreted as elements of the dual space of a Banach space C of \mathfrak{M} -measurable functions on U ?].

Chr. Pauc.

Neumark, M. A.: *Involutive Algebren.* Sowj. Arb. Funktionalanalysis, Beiheft zur Sowjetwiss. **44**, 89—196 (1954).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in dies. Zbl. **33**, 67.

Neumark, M. A.: *Operatorenalgebren im Hilbertschen Raum.* Sowj. Arb. Funktionalanalysis, Beiheft zur Sowjetwiss. **44**, 197—274 (1954).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in dies. Zbl. **33**, 67.

Umegaki, Hisaharu: *Conditional expectation in an operator algebra.* Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 177—181 (1954).

Es sei A eine W^* -Algebra von Operatoren in einem Hilbertschen Raum H mit einer normalen treuen Spur μ , wobei $\mu(1) = 1$, und A_1 eine W^* -Unteralgebra von A . Ferner bedeute $L^1(A)$ den Raum aller im Sinne von Segal (dies. Zbl. **51**, 342) mit A assoziierten und integrierbaren Operatoren in H . Aus dem verallgemeinerten Radon-Nikodým'schen Satz von Segal (loc. cit.) folgt die Existenz einer eindeutig bestimmten linearen, strikt positiven, mit $*$ vertauschbaren und in $L^1(A_1)$ konstanten Abbildung $x \rightarrow x^e$ von $L^1(A)$ auf den Unterraum $L^1(A_1)$ mit gewissen Stetigkeitseigenschaften und derart, daß $\mu(|x^e|) \leq \mu(|x|)$, wenn $x \in A$, $(x^e y)^e = (x y^e)^e = x^e y^e$, wenn $x \in L^1(A)$ und $y \in A$, und $(x y)^e = (y x)^e$, wenn $x \in L^1(A)$ und $y \in A_1 \cap A$, wobei A_1 den Kommutator von A_1 bezeichnet. Gewisse dieser Eigenschaften, die nicht Bezug auf A_1 nehmen, reichen bereits aus, Abbildungen dieser Art, sogenannte bedingte Erwartungen, zu charakterisieren, und ähnlich können die in der Form $x \rightarrow (x r)^e$ mit einem festen positiven Operator r aus $L^1(A)$ darstellbaren Abbildungen charakterisiert werden. Diese Charakterisierungen sind Verallgemeinerungen von Ergebnissen von Shu-Teh Chen Moy (dies. Zbl. **55**, 125), wo die üblichen bedingten Erwartungen als Transformationen eines Raums meßbarer reeller Funktionen aufgefaßt werden.

K. Krickeberg.

Nakamura, Masahiro und Takasi Turumaru: *Expectations in an operator algebra.* Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 182—188 (1954).

Als Quasierwartung bezeichnen die Verf. eine lineare positive und mit $*$ vertauschbare Abbildung $x \rightarrow x^e$ einer C^* -Algebra A in sich mit $(x^e y)^e = (x y^e)^e = x^e y^e$. Hat A eine Einheit und ist außerdem $1^e = 1$, so sprechen sie von einer Erwartung. Betrachtet werden die Konjugierte einer Erwartung und die C^* -Unteralgebra der Fixpunkte einer Quasierwartung. Ist A eine W^* -Algebra und folgt aus $x_x \neq x$, daß $x_x \neq x^e$, so bildet die Menge der Fixpunkte eine W^* -Unteralgebra. Schließlich werden Theoreme der im vorangegangenen Referat besprochenen Art behandelt.

K. Krickeberg.

Kaplansky, Irving: *Ring isomorphisms of Banach algebras.* Canadian J. Math. **6**, 374—381 (1954).

The author proves the following theorem. If Φ is a ring-isomorphism from one semi-simple Banach algebra A onto another, then A is a direct sum $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ with A_1 finite dimensional, Φ linear on A_2 and Φ conjugate linear on A_3 . This is a generalization of a result of Rickert (this Zbl. **65**, 347). On a finite dimensional A_1 there are many non-linear isomorphisms as we can see by the automorphisms of the complex number field. There are lemmas for this theorem. One of them states that any primitive Banach algebra A over a field F is central in the sense that every additive endomorphism of A commuting with all left and right multiplications by elements of A is a scalar multiplication.

Y. Kawada.

Shirotu, Taira: *On completely continuous operators on locally convex vector spaces.* Proc. Japan Acad. **30**, 837—840 (1954).

The classical theory of Riesz and Schauder concerning completely continuous operators on Banach spaces was extended on locally convex vector spaces by J. Leray (this Zbl. **37**, 357). However the proof of the Fredholm alternative was based on the invariance of the domain and the theory of Schauder for the conjugate space was incomplete. In the present note the author gives a simple, direct proof of the Fred-

holm alternative and establishes the Riesz-Schauder theory in Leray's setting. Reference is taken to a paper by M. Altman (this Zbl. 52, 120). [Reviewer's note. In a paper by J. H. Williamson (this Zbl. 55, 109) Leray's theory is extended to general linear topological spaces. A simple, direct proof for the Fredholm alternative is given in that setting.]

Chr. Pauc.

Miyadera, Isao: On the generation of a strongly ergodic semi-group of operators. Tôhoku math. J., II. Ser. 6, 38—52 (1954).

Extension of the theory of semi-group $\{T_t\}$, $t \geq 0$ of linear operators in a Banach space X to X , strongly continuous to the identity at $t = 0$ (E. Hille: Functional analysis and semi-groups, this Zbl. 33, 65; the reviewer: this Zbl. 37, 353). He deals with the generation of the semi-group which is strongly ergodic to the identity at $t = 0$ in the Abel sense:

$$\int_0^1 \|T_t\| dt < \infty \quad \text{and} \quad \text{strong} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_0^\infty \exp(-\lambda t) T_t x dt = x,$$

and in the $(C, 1)$ sense: $\int_0^1 \|T_t\| dt < \infty$ and $\text{strong} \lim_{s \downarrow 0} s^{-1} \int_0^s T_t x dt = x$.

These classes are just the classes $(0, C)$ and $(0, A)$ respectively in R. S. Phillips' paper [Ann. of Math., II. Ser. 59, 325—356 (1954)] which appeared almost at the same time as the present paper. Thus the results in the present paper are closely similar to those due to Phillips. The main difference is that the present author did not consider the notion of the „complete infinitesimal generator“, introduced in Phillips' paper.

K. Yosida.

Miyadera, Isao: On the generation of a strongly ergodic semi-group of operators. Proc. Japan Acad. 30, 335—340 (1954).

Preliminary report of the results given in the paper reviewed above.

K. Yosida.

Phillips, R. S.: A note on the abstract Cauchy problem. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 244—248 (1954).

The abstract Cauchy problem discussed here is somewhat different from that inaugurated by E. Hille (this Zbl. 49, 90; 55, 345) in that the author relies upon the semi-groups of class (C_0) and $(0, A)$ [Ann. of Math., II. Ser. 59, 325—356 (1954)]. Thus it is shown that if the „Cauchy problem“ is solvable in his sense with respect to a given closed linear operator U for all initial values in the domain of U , then U is the infinitesimal generator of a semi-group yielding the same solutions to the „Cauchy problem“. Also it is shown that the existence of a unique solution to the „Cauchy problem“ for all initial values in the domain of U implies that the solutions depend continuously on the initial data.

K. Yosida.

Elliott, Joanne: The boundary value problems and semi-groups associated with certain integro-differential operators. Trans. Amer. math. Soc. 76, 300—331 (1954).

The paper deals with the initial value problems for the pair of equations

$$(1) \quad u_t(x, t) = \pi^{-1} P \int_{-1}^1 (\xi - x)^{-1} u_\xi(\xi, t) d\xi = \Omega u \quad (\text{in } C[-1, 1]),$$

$$(2) \quad v_t(x, t) = \pi^{-1} \frac{d}{dx} P \int_{-1}^1 (\xi - x)^{-1} v_\xi(\xi, t) d\xi = \Omega^* v \quad (\text{in } L_1(-1, 1)),$$

where P denotes the Cauchy's principal value for $-1 < x < 1$ and the essential limits of such integrals for $x = \pm 1$. The author shows, by virtue of the semi-group theory, that all the admissible „lateral conditions“ for the backward diffusion equation in Feller's theory (this Zbl. 47, 93) have analogues for (1). Thus the contraction of Ω subject to the lateral condition gives the infinitesimal generator of a contraction

semi-group. For example, the resolvent equation $f - \Omega f = h$ with the boundary condition $f(1) = f(-1) = 0$ is, for $\lambda > 0$, solved by $f(x) = \int \Gamma(x, y, \lambda) h(y) dy$, where the non-negative kernel $\Gamma(x, y, \lambda)$ is symmetric and continuous in y for fixed x except when $x = y$. In this case the points ± 1 are „absorbing barriers“ in Feller's terminology. The author gives also the similar integral representations of the resolvent equation subject to the „one absorbing barrier“ or „one free boundary“ condition. Finally, as in Feller's paper loc. cit., it is shown that the infinitesimal generator of the „adjoint semi-group“ is given by a contraction of Ω^* plus an additional „boundary operator“.

K. Yosida.

Kato, Tosio: On the semi-groups generated by Kolmogoroff's differential equations. J. math. Soc. Japan **6**, 1—15 (1954).

The author discusses, by making use of the semi-group theory, the pair of differential equations

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) a_{kj}, \quad p'_{ij}(t) = \sum_k a_{ik} p_{kj}(t), \quad \lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij},$$

for an assigned Kolmogoroff matrix $a_{jk} \geq 0$ ($j \neq k$), $a_{jj} \leq 0$, $\sum_k a_{jk} = 0$. Let the operator A be defined for those $x = \{\xi_k\} \in (l)$ for which $Ax = y = \{\eta_k\}$, $\eta_k = \sum_j \xi_j a_{jk}$ belongs to (l) , and let A_0 be the contraction of A to the subspace D_0 [of the domain $D(A)$] spanned by the canonical base of (l) . It is shown that there exists at least one positivity-preserving semi-group of operators on (l) whose infinitesimal generator is an extension of A_0 . Among these semi-groups, there is a uniquely defined minimal one, $P(t)$, which is a contraction semi-group with the infinitesimal generator G such that $A \supset G \supset A_0$. This $P(t)$ is defined by $P(t) = \lim_{r \uparrow 1} P_r(t)$, where $P_r(t) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} [n t^{-1} R_r(n t^{-1})]^n$ with $R_r(\lambda) = (\lambda I + H)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} r^n B(\lambda)^n$. Here $-H$ is defined for those $x = \{\xi_k\} \in (l)$ for which $-Hx = \{a_{kk} \xi_k\} \in (l)$, and $Kx = \{\eta_k\}$, $\eta_k = \sum_{j \neq k} \xi_j a_{jk}$ for $x = \{\xi_k\}$ in the domain $D(H)$ of H . $B(\lambda)$ is defined by $B(\lambda) = K(\lambda I + H)^{-1}$. It is also proved that $P(t)$ is norm-preserving, i. e. $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ if and only if $\lim_{n \rightarrow \infty} B(\lambda)^n x = 0$ (in (l)) for every $\lambda > 0$.

K. Yosida.

Barrett, J. H.: Differential equations of non-integer order. Canadian J. Math. **6**, 529—541 (1954).

Zunächst werden über den Holmgren-Rießschen Operator

$$I(x; a, x|f) = \int_a^x f(t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt$$

zur Definition der Integration der Ordnung α ($\text{Re } \alpha > 0$) und damit der beliebig-zahligen Differentiation durch $I(\alpha) = D^n I(\alpha + n)$ [n = kleinste ganze Zahl $\geq -\text{Re}(\alpha)$] behandelt: Existenz, Stetigkeit der entstehenden Funktionen, Stetigkeit, Iterations- und Umkehrungseigenschaften des Operators. Für $\alpha > 0$ wird dann die Gleichung $I(-\alpha; a, x|y) = \lambda y(x) = h(x)$ mit gewissen n Anfangsbedingungen durch Anwendung des inversen Operators von $I(-\alpha)$ und die Neumannsche Reihe gelöst. Die wegen der Randbedingungen mögliche Lösung Y

der homogenen Gleichung wird mit der oft behandelten Funktion $E_\alpha(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{z^v}{\Gamma(z+1)}$

in Zusammenhang gebracht.

D. Morgenstern.

Hayes, R. M.: Iterative methods of solving linear problems on Hilbert space. National Bureau of Standards; Appl. Math. Ser. Nr. **39**, 71—103 (1954).

Es werden iterative Methoden zur Lösung linearer Probleme $\mathfrak{A}x = b$ bespro-

chen. \mathfrak{A} ist ein linearer Operator im Hilbert-Raum, und zwar ein „Legendrescher Operator“, der sich als Summe eines positiv definiten und eines vollstetigen Operators darstellen läßt. — Im Teil I wird auf die Definition des Hilbertraumes, starke und schwache Konvergenz, die Definition und die Fundamenteleigenschaften der Operatoren in diesem Raume eingegangen. Danach folgen in Teil II die grundlegenden Konvergenzbeweise für das iterative Vorgehen. Die Beweise werden in mehreren Schritten geführt, zunächst für einen positiv definiten Operator, anschließend für den nichtsingulären Legendre-Operator, dann für den nichtnegativen Operator und schließlich für den allgemeinen Legendre-Operator. In einem weiteren Abschnitt wird auf die Konvergenzfragen bei Eigenwertproblemen — ebenfalls unter Zugrundelegung eines Legendre-Operators — eingegangen. — Teil III behandelt iterative Vorgehensweisen. Diese werden als Relaxationsmethoden bezeichnet und arbeiten nach der Vorschrift: $x_{n+1} = x_n + a_n p_n$ mit $a_n = (p_n, r_n)/(p_n, \mathfrak{A} p_n)$ und $r_n = b - \mathfrak{A} x_n$. Folgende Methoden werden unterschieden: 1. Gradientenmethode $p_i = r_i$, 2. Konjugierte Richtungsmethode $(p_i, \mathfrak{A} p_j) = 0$ für $i \neq j$, 3. Konjugierte Gradientenmethode p_i aus $p_{i+1} = r_{i+1} + b_i p_i$ mit $b_i = -(r_{i+1}, \mathfrak{A} p_i)/(p_i, \mathfrak{A} p_i)$. Von der dritten Methode wird gezeigt, daß die Bildung der p_i so vorgenommen wird, daß es sich um einen Spezialfall von 2. handelt. Der letzte Teil der Arbeit bringt Anwendungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Integralgleichungen und partiellen Differentialgleichungen.

H. Unger.

Gavurin, M. K.: Über die Genauigkeit der Näherungsmethoden zum Aufsuchen der Eigenwerte von Integraloperatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 13—15 (1954) [Russisch].

Das in einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. 56, 112) betrachtete Störungsproblem wird in dem speziellen Fall näher untersucht, daß der Operator $A = A_0 + B$ der Hilbert-Schmidtschen Klasse angehört und A_0 von endlichem Rang ist: $A_0 f = \sum_{i=1}^n (f, \alpha_i) \beta_i$. Die in den Formeln des Verf. auftretenden Größen γ_0, \dots, R werden mit Hilfe matrizentheoretischer Betrachtungen bestimmt bzw. abgeschätzt.

B. Sz.-Nagy.

Fichera, Gaetano: Formule di maggiorazione connesse ad una classe di trasformazioni lineari. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 36, 273—296 (1954).

Verf. leitet eine Reihe interessanter Abschätzungen der Quadratintegrale der Lösungen linearer elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen her. Diese erweisen sich als Folgerung eines bemerkenswerten Abschätzungstheorems des Funktionals: $J(u) = \|u\|^2 / \|T(u)\|^2$ einer gewissen linearen Transformation T , definiert im Hilbertraum der quadratisch integrierbaren Funktionenvektoren. Zu der Voraussetzung, T^{-1} existiert, tritt u. a. noch, daß $T(E(u), L(u))$ sich aus zwei linearen Transformationen $E(u), L(u)$ auf einen Produktraum zusammensetzt und mit einer anderen invertierbaren Transformation $T^*(E^*(u), L^*(u))$ durch eine gewisse Bilinearrelation verknüpft wird. Diese entspricht bei der obigen Anwendung der Greenschen Formel, welche einen elliptischen Differentialoperator mit dem zugehörigen adjungierten verbindet.

H. Beckert.

Hosszú, M.: Some functional equations related with the associative law. Publ. math., Debrecen 3, 205—214 (1954).

Im Anschluß an T. Faragó (dies. Zbl. 56, 21) und A. R. Schweitzer [Bull. Amer. math. Soc. 18, 192 (1912); 19, 66—70 (1913)] untersucht der Verf. die aus dem Assoziativitätsgesetz durch Verschiebung der Faktoren und Klammern entspringenden Multiplikationsregeln, und zwar in den §§ 1—2 rein algebraisch, indem er sie zum Teil unter Lösbarkeitsbedingungen auf das gewöhnliche Assoziativitätsgesetz bzw. auf das Bisymmetriegesetz (vgl. Ref., dies. Zbl. 30, 27) zurückführt, in § 3 elementar analytisch, indem er die diesen Regeln genügenden stetigen und streng monotonen Operationen bestimmt. Z. B. sind die allgemeinsten stetigen und streng

monotonen Lösungen von $x \cdot (y \cdot z) = z \cdot (y \cdot x)$ bzw. $x \cdot (y \cdot z) = (z \cdot x) \cdot y$, d. h. $F[x, F(y, z)] = F[z, F(y, x)]$ bzw. $F[x, F(y, z)] = F[F(z, x), y]$ die Funktionen $x \cdot y = F(x, y) = f^{-1}[\alpha^2 f(x) + \alpha f(y) + \beta]$ bzw. $= f^{-1}[f(x) + f(y)]$, wo $\alpha \neq 0$, $f(x)$ stetig und streng monoton, f^{-1} die inverse Funktion ist. Im § 4 wird unter Hinzunehmen von Derivierbarkeitsvoraussetzungen die allgemeinere Funktionalgleichung $F[x, G(y, z)] = H[K(x, y), z]$ gelöst [vgl. O. Suto, Tôhoku math. J. 3, 47—61 (1913)].

J. Aczel.

Gheorghiu, Octavian Em.: Sur un système d'équations fonctionnelles. Commun. Acad. Republ. popul. Romine 4, 573—577, russ. u. französ. Zusammenfassg. 577—578 (1954) [Rumänisch].

L'A. considère le système à trois fonctions inconnues

$$T_1(u + u', v + v', w + w') = (T_1 + T'_1 + T_2 \cdot T'_3 + T_3 \cdot T'_2) \left/ \left(1 + \sum_{i=1}^3 T_i \cdot T'_i \right) \right.$$

$$T_2(u + u', v + v', w + w') = (T_2 + T'_2 + T_1 \cdot T'_3 + T_3 \cdot T'_1) \left/ \left(1 + \sum_{i=1}^3 T_i \cdot T'_i \right) \right.$$

$$T_3(u + u', v + v', w + w') = (T_3 + T'_3 + T_1 \cdot T'_2 + T_2 \cdot T'_1) \left/ \left(1 + \sum_{i=1}^3 T_i \cdot T'_i \right) \right.$$

{où $T_i = T_i(u, v, w)$ et $T'_i = T_i(u', v', w')$, $i = 1, 2, 3$ }, dont il trouve la solution générale sous la forme

$$T_1(u, v, w) = N^{-1} [1 + \exp(a_1 u + b_1 v + c_1 w) - \exp(a_2 u + b_2 v + c_2 w) - \exp(a_3 u + b_3 v + c_3 w)].$$

$$T_2(u, v, w) = N^{-1} [1 - \exp(a_1 u + b_1 v + c_1 w) + \exp(a_2 u + b_2 v + c_2 w) - \exp(a_3 u + b_3 v + c_3 w)].$$

$$T_3(u, v, w) = N^{-1} [1 - \exp(a_1 u + b_1 v + c_1 w) - \exp(a_2 u + b_2 v + c_2 w) + \exp(a_3 u + b_3 v + c_3 w)].$$

où $N = 1 + \sum_{i=1}^3 \exp(a_i u + b_i v + c_i w)$. Elle dépend seulement des constantes arbitraires a_i, b_i, c_i . — En utilisant une autre méthode, on donne la solution d'un système plus général à cinq fonctions inconnues, dont la solution générale contient une fonction arbitraire et neuf constantes arbitraires.

Französ. Zusammenfassg.

Praktische Analysis:

• Taussky, Olga (Edited by): Contributions to the solution of systems of linear equations and the determination of eigenvalues. (National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series No. 39.) Washington: US Government Printing Office 1954. III, 140 p. \$ 2,—.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

Fox, L.: Practical solution of linear equations and inversion of matrices. National Bureau of Standards; Appl. Math. Ser. Nr. 39, 1—54 (1954).

In dem Bericht werden verschiedene Methoden zur Auflösung linearer Gleichungssysteme $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ und zur Berechnung der Inversen \mathfrak{A}^{-1} einander gegenübergestellt. Hauptsächlich gelangen Eliminationsverfahren zur Behandlung. Iterationsverfahren werden nur eingangs kurz besprochen. Insgesamt sind zur Erläuterung der Vorgehensweisen 26 numerische Beispiele (meist 6. Ordnung) mit ausführlicher Darlegung des Rechenvorganges unter Berücksichtigung der Verwendung einer gewöhnlichen Rechenmaschine angegeben. Operationszahlen werden nicht mitgeteilt. I. Indirekte Methoden: Gesamtschrittverfahren mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} + \mathfrak{B}$ (\mathfrak{D} Diagonalmatrix $a_{ii} = d_i$) nach der Vorschrift: $\mathfrak{D} \mathfrak{x}^{(v+1)} = \mathfrak{b} - \mathfrak{B} \mathfrak{x}^{(v)}$; Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel) mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ [$\mathfrak{N} = (n_{ik})$ mit $n_{ik} = 0$ für $k > i$ und $n_{ik} = a_{ik}$ für $k \leq i$] gemäß $\mathfrak{M} \mathfrak{x}^{(v+1)} = \mathfrak{b} - \mathfrak{N} \mathfrak{x}^{(v)}$, Konvergenzfragen, Anwendungsmöglichkeit; Vorgehen von Hotelling mit Konvergenzbeschleunigung, Bemerkungen über Relaxationsmethoden, insbesondere Zusammenhang mit Gauß-

Seidel; Iteration hauptsächlich bei überwiegenden Hauptdiagonalelementen; Anwendung bei Berechnung der Kehrmatrix selten. II. Direkte Methoden: 1. Eliminationsverfahren: Gewöhnliches Gaußsches Eliminationsverfahren, Verwendung des jeweils betragsmäßig größten Elements als Diagonalelement, Verbesserung Δx_0 von x_0 aus $\mathcal{A} \Delta x_0 = r_0 = b - \mathcal{A} x_0$, entsprechendes Vorgehen bei Berechnung der Kehrmatrix; Verfahren von Gauß-Jordan, „Below the line“-Methode von Aitken; unter „kompakter Elimination“ werden diejenigen Methoden beschrieben, die auf eine Zerlegung der Matrix \mathcal{A} in zwei Dreiecksmatrizen hinauslaufen; die Elemente werden dabei in einem Zuge — ohne Aufschreiben der Zwischenergebnisse — ermittelt; näher eingegangen wird darauf in den Abschnitten, in denen die Eliminationsverfahren mittels Matrizen beschrieben werden. Ist \mathcal{Q} eine untere Dreiecksmatrix, \mathcal{U} eine obere, beide mit Einsen als Diagonalelementen, dann gilt: $\mathcal{A} = \mathcal{Q} \mathcal{D} \mathcal{U}$. Bei Gauß-Doolittle, ferner bei Dwyer, Fox und Waugh Aufspaltung in \mathcal{Q} und $\mathcal{D} \mathcal{U}$, bei Crout und Banachiewicz in $(\mathcal{Q} \mathcal{D})$ und \mathcal{U} . Bei $\mathcal{A} = \mathcal{U}'$ gilt $\mathcal{Q} = \mathcal{U}'$, Aufspaltung in $\mathcal{Q} \mathcal{D}^{1/2}$ und $\mathcal{D}^{1/2} \mathcal{U} = \mathcal{D}^{1/2} \mathcal{Q}'$, insbesondere bei positiv definiter Matrix \mathcal{A} , Verfahren von Cholesky. Verschiedene Anordnungen bei der Ermittlung der Kehrmatrix: Berechnung von \mathcal{Q}^{-1} und $(\mathcal{D} \mathcal{U})^{-1}$ bzw. $(\mathcal{Q} \mathcal{D})^{-1}$ und \mathcal{U}^{-1} , Bestimmung von \mathcal{A}^{-1} durch Multiplikation der invertierten Dreiecksmatrizen oder Bestimmung von \mathcal{Q}^{-1} aus $\mathcal{Q} \mathcal{X} = \mathcal{E}$ und \mathcal{A}^{-1} aus $\mathcal{D} \mathcal{U} \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{Q}^{-1}$; Vereinfachung bei $\mathcal{A} = \mathcal{U}'$. 2. Orthogonalisationsverfahren: a) Orthogonale Vektoren: Im Falle $\mathcal{A} = \mathcal{U}'$ Zerlegung von x in $\Sigma a_r x_r$ mit den „ \mathcal{U} “ orthogonalisierten Vektoren x_i ; die x_i bilden bei passend gewähltem Ausgangssystem eine obere Dreiecksmatrix \mathcal{X} mit $\mathcal{X}' \mathcal{A} \mathcal{X} = \mathcal{D}$, also $\mathcal{A} = (\mathcal{X}')^{-1} \mathcal{D} \mathcal{X}^{-1}$, Zusammenhang mit Eliminationsverfahren, keine Vorteile. b) Matrix-Orthogonalisierung: $\mathcal{A} = \mathcal{N} \mathcal{B}$ mit \mathcal{N} als unterer Dreiecksmatrix und $\mathcal{B} \mathcal{B}' = \mathcal{E}$. $\mathcal{N} v = b$ liefert $v = \mathcal{N}^{-1} b$, $\mathcal{B} x = v$ dann $x = \mathcal{B}' v$ als Lösung. Wird bei symmetrischer Matrix \mathcal{A} , die durch Normalisierung einer unsymmetrischen Matrix \mathcal{C} entstanden ist, die Methode der orthogonalen Vektoren durchgeführt, so ist dies gleichbedeutend mit der Matrix-Orthogonalisierung angewandt auf \mathcal{C} . — In einem besonderen Abschnitt wird auf die Vor- und Nachteile eingegangen und im wesentlichen die kompakte Elimination empfohlen im Sinne der Aufspaltung in Dreiecksmatrizen. Es wird auf Untersuchungen von G. Blanch hingewiesen, daß die Auswahl der jeweils betragsmäßig größten Elemente als Diagonalelemente nicht den anderen Vorgehen überlegen zu sein braucht. Mit einem Abschnitt über die Vorgehensweise bei Verwendung von Untermatrizen — es wird $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_4 \end{pmatrix}$ unterteilt — und einem Abschnitt über die Behandlung komplexer Gleichungssysteme wird die Arbeit beschlossen.

H. Unger.

Forsythe, A. I. and G. E. Forsythe: Punched-card experiments with accelerated gradient methods for linear equations. National Bureau of Standards, Appl. Math. Ser. Nr. 39, 55—69 (1954).

* Die zur Auflösung des linearen Gleichungssystems $\mathcal{A} x = a$ mit der symmetrischen Matrix \mathcal{A} (nichtsingulär, im nichtsymmetrischen Fall wird vorher die Gaußsche Transformation durchgeführt) bekannte optimale Gradientenmethode arbeitet nach der Vorschrift (1): $x_{k+1} = x_k + \gamma'_k r_k$ mit $r_k = a - \mathcal{A} x_k$ und $\gamma'_k = r'_k r_k / r'_k \mathcal{A} r_k$. Aus der Konvergenzbetrachtung folgt, daß die Methode im allgemeinen langsam konvergiert. Von den vielen Vorschlägen, die zur Konvergenzbeschleunigung gemacht wurden, werden zwei hier besprochen. 1. Abänderung von (1) gemäß $x_{k+1} = x_k + \beta \gamma'_k r_k$ nach Hestenes und Stein (β ist ein fester Faktor mit $0 < \beta < 2$, insbesondere β nahe 0,9). 2. Minimierung von $f(x) = |\mathcal{A} x - b|^2$ im p -dimensionalen Unterraum $\mathcal{X} = x_{k-p} + a_1 r_{k-p} + a_2 \mathcal{A} r_{k-p} + \dots + a_p \mathcal{A}^{p-1} r_{k-p}$ ($1 < p < n$; a_i reell). Hier wird die von Forsythe und Motzkin vorgeschlagene Methode genauer betrachtet, von der Hestenes gezeigt hat, daß sie mit dem Fall $p = 2$ übereinstimmt. Die Verfahren wurden an zwei verschiedenen Systemen der Ordnung 6

mit einem kartenprogrammierten Elektronenrechner (CP) erprobt und die Ergebnisse mitgeteilt. Eine ausführliche Diskussion der Untersuchung wird in einem letzten Abschnitt vorgenommen.

H. Unger.

Salechov, G. S. und M. A. Mertvecova: Über die Konvergenz gewisser Iterationsprozesse. Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.-mat. techn. Nauk 5, 77—108 (1954) [Russisch].

Im 1. Kapitel dieser Arbeit werden verschiedene bisherige Untersuchungen über das Newtonsche Iterationsverfahren und seine Verallgemeinerungen besprochen, wobei allerdings die Übersicht nicht sehr vollständig ist und auch nicht immer genügend kritisch erscheint. So schreiben z. B. die Verff. Herrn E. Bodewig zahlreiche Resultate und Ideen zu, die sämtlich bereits in der grundlegenden Arbeit von Schröder aus 1870 sich finden, die anscheinend von den Verff. nur sehr flüchtig konsultiert wurde. Im 2. Kapitel wird die „Methode der Berührungshyperbeln“ besprochen, und zwar gleich für Funktionalgleichungen im Banachschen Raum. Es ergibt sich dabei die kubische Konvergenz. Das sehr allgemeine Resultat wird nun speziell auf Integralgleichungen sowie Systeme algebraischer Gleichungen angewandt. Im 3. Kapitel werden Bedingungen dafür besprochen, daß Iterationsprozesse zur Lösung von Funktionalgleichungen nur Unterfunktionen bzw. nur Oberfunktionen zu den Lösungen liefern. Endlich wird im letzten Kapitel ein Iterationsverfahren besprochen, das sowohl auf Auflösung von gewöhnlichen Gleichungen als auch auf quadratische Operatorengleichungen anwendbar ist und bei dessen Konvergenzbeweis die Verff. mit den Näherungsbrüchen eines gewissen Kettenbruches operieren.

A. Ostrowski.

Myškis, A. D. und I. Ju. Ègle: Über die Abschätzung des Fehlers in der Methode der sukzessiven Approximationen. Mat. Sbornik, n. Ser. 35 (77), 491—500 (1954) [Russisch].

Verff. stellen an eine brauchbare Methode zur Fehlerabschätzung eines Näherungsverfahrens folgende Forderungen: a) die Fehlerschranke soll nur bekannte Größen enthalten, b) sie soll scharf sein, c) die Abschätzungsmethode soll möglichst umfassend und d) nicht zu mühsam sein. Viele bekannte Abschätzungen genügen diesen Forderungen nicht, lassen sich aber leicht entsprechend modifizieren. Das wird am Beispiel der iterativen Lösung der Volterraschen Integralgleichung

$$y(x) = \varphi(x) - \int_{x_0}^x F(x, s, y(s)) ds, \quad |F(x, s, y_1) - F(x, s, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

(φ, F stetig) gezeigt. Die übliche Abschätzung wird einerseits auf den Fall, daß K nicht konstant ist, sondern von x, s und den Intervallgrenzen abhängt, ausgedehnt und andererseits — unter Ausnutzung aller Eigenschaften der y_n — verschärft. Für die Näherungslösung $x^3/3 + x^{5/3}/5$ der Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ ($0 \leq x \leq 1$) wird so die Fehlerschranke 0,0018 x^3 gewonnen. Die benutzten Prinzipien sind verallgemeinerungsfähig und führen auf eine sehr allgemeine, dem Majorantenverfahren von Cauchy ähnelnde Abschätzungsmethode.

J. Weissinger.

Slobodjanskij, M. G.: Näherungslösung einer selbstadjungierten Randwertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung und Bestimmung der Gebiete, in denen die Eigenwerte liegen. Priklad. Mat. Mech. 18, 585—596 (1954) [Russisch].

Die Eigenwerte λ_n der selbstadjungierten Randwertaufgabe

$$A u = \sum_{k=0}^s (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right] = f(x),$$

$u^{(s-1)}(a) = u^{(s-2)}(a) = \dots = u(a) = 0$, $u^{(s-1)}(b) = u^{(s-2)}(b) = \dots = u(b) = 0$ seien positiv. Den Ausgangspunkt für die Bestimmung einer unteren Schranke des kleinsten Eigenwertes λ_1 bildet die Formel $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_r + c} = \int_a^b G_c(x, x) dx = J_c$,

wobei $G_c(x, y)$ die Greensche Funktion der betrachteten Aufgabe für den Differentialoperator $A_c u = A u + c u$ mit $c > 0$ ist. Aus ihr folgt $\lambda_1 > 1/J_c - c$. J_c wird geeignet nach oben abgeschätzt und für c sodann der Optimalwert bestimmt. Die Abschätzung von λ_1 nach der anderen Seite geschieht mit Hilfe des Variationsverfahrens von Raileigh-Ritz oder nach der Galerkinschen Methode. Die Ausdehnung der Betrachtungen auf die höheren Eigenwerte führt zu der Angabe von Intervallen, in denen die λ_r liegen. — Zur Bestimmung der Lösung selbst wird ein Näherungsverfahren angegeben. Numerische Untersuchungen werden für die Aufgabe $A_\beta u = -(d/dx)(du/dx) + (\beta + x)u = 1$, $u(0) = u(1) = 0$, insbesondere in den Fällen $\beta = 1$ und $\beta = -0,5$, durchgeführt.

W. Schulz.

Spirin, G. M.: Verbesserung der Iterationsmethode der Lösung der biharmonischen Gleichung in endlichen Differenzen. *Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR* 1954, 292—295 und russ. Zusammenfassg. 295 (1954) [Ukrainisch].

Ein verbessertes Verfahren der Iterationsmethode der Lösung der biharmonischen Gleichung in endlichen Differenzen für den allgemeinen Fall eines Netzes mit ungleichmäßigem Schritt wird vorgeschlagen. Die Verbesserung der Lösung wird erreicht durch Anwendung von Differenzenausdrücken für die zweiten Ableitungen nach fünf Punkten und durch Verbesserung der Extrapolationsformeln bei Operationen am Rande des Gebietes. Es wird ein Beispiel angeführt, das die Wirksamkeit der vorgeschlagenen Rechenmethode veranschaulicht.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Gautschi, Walter: Über die zeichnerischen Ungenauigkeiten und die zweckmäßige Bemessung der Schrittweite beim graphischen Integrationsverfahren von Meissner-Ludwig. *Verhdl. naturforsch. Ges. Basel* 65, 49—66 (1954).

Alle graphisch-rechnerischen Näherungsverfahren zur Integration von Differentialgleichungen sind erstens mit dem Verfahrensfehler (für seine Größenordnung ist der Quadraturfehler maßgebend) und zweitens mit dem „technischen Fehler“ (setzt sich zusammen aus Zeichen- und Abrundungsfehler) behaftet. Die Fehlerfortpflanzung ist für beide Typen gleich. Der technische Fehler verkleinert sich nicht entsprechend der Schrittweite. Durch Wahl der Schrittweite soll erreicht werden, daß der Verfahrensfehler etwa gleich dem technischen Fehler ist. Dies führt zur Definition einer natürlichen Schrittweite. An dem Meißner-Ludwigschen Verfahren (dies. Zbl. 42, 366) wird der technische Fehler untersucht. Der Zeichenfehler kann angegeben werden in der Form $n_1 \omega + n_2 \eta$, wobei n_1, n_2 Zahlen sind, die für das betreffende Verfahren charakteristisch sind und ω und η Konstanten für die Fehler geometrischer Grundoperationen (ω : Markieren eines Punktes auf einer Geraden und Ziehen einer Geraden durch einen Punkt; η : Abtragen einer Zahl als Strecke auf einer Geraden und Messen des Abstandes zweier Punkte; $\eta \approx 2\omega$). Verf. führt eine Dimensionierungszahl u ein als Verhältnis von technischem Fehler zu Verfahrensfehler, die etwa gleich Eins sein soll. Beim technischen Fehler kommt zu dem Zeichenfehler noch eine Größe $\delta \mu h$ hinzu, wobei δ den prozentualen Fehler der Rechnung (Abrundung), μ das Maximum des Betrages der Funktionswerte und h die Schrittweite bedeuten. Also ist $u = (Z + \delta \mu h) / \text{Max } R_v$ ($\text{Max } R_v = \text{maximaler Quadraturfehler}$). An einem Beispiel werden die Methoden erläutert.

R. Ludwig.

Serbin, H.: Numerical quadrature of some improper integrals. *Quart. appl. Math.* 12, 188—194 (1954).

$f(x)$ und $g(x)$ seien zwei in $(-\pi, +\pi)$ gegebene und in Fourierreihen mit den Koeffizienten a_n, b_n bzw. a'_n, b'_n entwickelbare Funktionen. Mit f_N wird der endliche bis a_N bzw. b_{N-1} gehende Abschnitt der Fourierreihe bezeichnet. Für $[f, g] = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{+\pi} f g dx$, $[f, g]_N = (2N)^{-1} \sum_{r=-(N-1)}^N f(x_r) g(x_r)$ mit $x_r = \frac{\pi r}{N}$ erhält man die Parsevalsche Gleichung $[f, g] = a_0 a'_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a'_n + b_n b'_n)$ bzw. das finite

Analogon $[f_N, g_N]_N = a_0 a'_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (a_n a'_n + b_n b'_n) + a_N a'_N$. Auf der Beziehung $[f_N, g_N] = [f_N, g_N]_N - \frac{1}{2} a_N a'_N$, baut sich die Arbeit auf, indem links f_N und g_N durch integrable Funktionen ersetzt werden und rechts eine Approximation des Integrals durch eine finite Summe steht. Eingehender betrachtet werden Integralgleichungen 1. Art insbesondere aus der Tragflügeltheorie. Die praktische Vorgehensweise ist etwa folgende: Mit einer Transformation $T[f_N(x)]$ sucht man einen geeigneten Kern $K(x, \xi)$ in $T[f_N(x)] = [K(x, \xi), f_N(\xi)]_N$ zu gewinnen, der in der Integralgleichung auftritt. Führt T z. B. f in die konjugiert harmonische Funktion über, so erhält man: $T[f_N(x)] = [2 \operatorname{ctg}(x - \xi) / 2, f_N(\xi)]'_N$ (' Strich bedeutet: Summation über ξ -Werte, die sich von x um ein ungerades Vielfaches von π/N unterscheiden). Behandlung der Birnbaumschen Integralgleichung führt so auf N Gleichungen von N unbekannten Funktionswerten. In einem weiteren Spezialfall gelangt man zur Multoppschen Quadraturformel. Eine Anwendung auf ein Integral mit unendlichem Integrationsweg bildet den Abschluß.

H. Unger.

Piccone, Piero: Calcolo grafico degli integrali di Stieltjes. Atti. Accad. Ligure Sci. Lett. 10, 53–56 (1954).

È indicato il calcolo grafico approssimato degli integrali di Stieltjes $\int_a^b f(x) dg(x)$ [f continua, g monotona] mediante poligoni funicolari.

L. Cesari.

Calvo Carbonell, Carlos: Reihendarstellung für die Wurzel einer algebraischen oder transzendenten Gleichung. Revista Acad. Ci. Madrid 48, 189–201 (1954) [Spanisch].

Verf. entwickelt die inverse Funktion von $y = f(x)$ in eine Taylorreihe. Die allgemeinen Formeln werden bis zur fünften Ableitung explizit gegeben. Verf. zeigt, wie die Formel von Newton erhalten wird, falls man sich auf zwei Glieder beschränkt, und diskutiert (bekannte) Resultate, die sich ergeben, falls man mehrere Glieder berücksichtigt. Viele numerische Beispiele werden angeführt.

E. M. Bruins.

• **Luekey, Paul:** Nomographie. Praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit durchgeführten Beispielen aus Wissenschaft und Technik. (Math.-phys. Bibliothek. Reihe I. Bd. 59/60.) 7. Aufl., durchgesehen und erweitert von W. Treusch. Stuttgart: B. G. Teubner, Verlagsges. 1954. 124 S. mit 65 Textabb. DM 5,60.

Die Zeichnungen des vortrefflichen und seit langen Jahren beliebten Büchleins sind vom Herausgeber neu gezeichnet worden. Hinzugefügt sind sehr beachtenswerte Abschnitte über Sonderrechenstäbe, über das praktische Vorgehen beim Entwurf einer Rechentafel und die Genauigkeit von Rechentafeln.

F. Rehbock.

Raymond, F. H.: Le calcul analogique. Principes et contribution à une théorie générale. Pubbl. Ist. naz. Appl. Calcolo 391, 130 p. (1954).

Das vorliegende Heft gibt den Inhalt von Vorträgen wieder, die der Verf. am Istituto per le applicazioni del calcolo in Rom über elektronisch arbeitende Analogiegeräte gehalten hat. Zunächst werden in einer umfangreichen Einleitung allgemeine Ausführungen über den Analogiebegriff gemacht. Dann werden im ersten Kapitel die Grundlagen der Analogierechnung behandelt, die Ausführungen elementarer mathematischer Operationen in Analogiegeräten beschrieben und Beispiele für einfache Analogierechner gegeben. Hier findet man Abbildungen und Beschreibungen zahlreicher in Europa und Amerika ausgeführter Geräte. Es folgt im zweiten Kapitel Prinzip und Arbeitsweise von Geräten zur Lösung algebraischer Gleichungen und linearer Differentialgleichungen, insbesondere solcher mit konstanten Koeffizienten. Kapitel 3 bringt eine allgemeine Behandlung von elektronischen Differentialanalysatoren und das letzte Kapitel endlich untersucht die Stabilität und die Ge-

naugigkeit von Analogiegeräten und deren Verbesserungsmöglichkeit, und zwar sowohl von Algebra-Rechenmaschinen, wie von Maschinen für die Lösung von Differentialsystemen.

Fr.-A. Willers.

● **Gruenberger, Fred: Diagrams in punched card computing.** Madison, Wisconsin: University of Wisconsin Press, 1954. 18 p., 108 wiring diagrams. \$ 3,75 Loose-Leaf.

Gewisse Typen von serienmäßig hergestellten Lochkarten-Rechenmaschinen haben weitgehende Verbreitung in Industrie und Wissenschaft gefunden. Die Hauptaufgabe des Benutzers einer solchen Maschine liegt in der richtigen Programmierung der Maschinenoperationen für ein vorliegendes Rechenproblem. Hierzu müssen durch entsprechende „Stöpselung“ vermittels loser elektrischer Kabelstücke die richtigen Stromkreise in der Maschine geschlossen werden. Die vorliegende Sammlung von Diagrammen will diese Aufgabe für eine ganze Reihe von oft vorkommenden Standard-Operationen erleichtern. Für die meistverwendeten Standard-Maschinen und für zahlreiche Rechenprozesse sind die richtigen Drahtverbindungen zeichnerisch dargestellt, so wie sie auf den auswechselbaren Schalttafeln („wiring boards“) durch Stöpselung herzustellen sind.

E. Rabe.

● **Fox, L.: A short table for Bessel functions of integer orders and large arguments.** (Royal Society Shorter Mathematical Tables, Nr 3.) Cambridge: Published for the Royal Society at the University Press 1954. 28 p. 6 s. 6 d.

In Erweiterung früherer Tafeln der Besselschen Funktionen $J_n(x)$, $Y_n(x)$ und der modifizierten Funktionen $I_n(x)$, $K_n(x)$ (vgl. dies. Zbl. 17, 415; 49, 94) wurden zur Funktionswertbestimmung für $x > 20$ bzw. 25 die Hilfsfunktionen P_n , Q_n , F_n und G_n tabelliert, die in den asymptotischen Entwicklungen

$$\sqrt{\pi x/2} J_n(x) = P_n(x) \cos \vartheta_n - Q_n(x) \sin \vartheta_n, \quad \sqrt{2\pi x} I_n(x) = e^x F_n(x),$$

$$\sqrt{\pi x/2} Y_n(x) = P_n(x) \cos \vartheta_n + Q_n(x) \sin \vartheta_n, \quad \sqrt{\pi x/2} K_n(x) = e^{-x} G_n(x)$$

mit $\vartheta_n = x - \pi n/2 - \pi/4$ auftreten: $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ für $1 \leq x = 0(0.001)0.05$ und $n = 0(1)20$ (9 Dez. für $n < 10$, 8 für $n \geq 10$), $F_n(x)$ und $G_n(x)$ für $1 \leq x = 0(0.001)0.05$ und $n = 0(1)9$ (9 Dez.), $\ln F_n(x)$ und $\ln G_n(x)$ für $1 \leq x = 0(0.001)0.05$ und $n = 10(1)20$ (8 Dez.). Zur Interpolation sind modifizierte zweite und vierte Differenzen angegeben.

H. Unger.

● **Karmazina, L. N.: Tafeln der Jacobischen Polynome.** (Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Institut für rationelle Mechanik und Rechentchnik. Mathematische Tafeln). Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1954. 250 S. R. 27,90 [Russisch].

Dies sind siebenstellige Tafeln der Werte der ersten fünf Jacobischen Polynome $G_n(p, q, x)$ ($1 \leq n \leq 5$), welche als Orthonormalsystem von Polynomen bezüglich des Intervalles $(0, 1)$ und der Belegungsfunktion $x^{q-1}(1-x)^{p-q}$ definiert sind. Die Schrittlänge für x ist 0,01 ($0 \leq x \leq 1$); die Parameter p und q variieren in $1.1 \leq p \leq 3$, $0.1 \leq q \leq 1$ mit einer Differenz von 0.1 (was insgesamt 200 Paare (p, q) gibt). Weiter werden noch die Koeffizienten und Wurzeln der Polynome gegeben und dasselbe für die Legendreschen Polynome ($p = q = 1$) durchgeführt. Ferner finden sich einige Formeln, sowie Kurven, Reliefskizzen und eine Anleitung zur Interpolation.

K. Prachar.

● **Table of salvo kill probabilities for square targets.** (National Bureau of Standards, Applied Math. Series Nr. 44.) Washington: US Government Printing Office 1954. IX, 33 p. 30 cents.

Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes und der Annahme einer quadratischen Zielscheibe mit achsenparallelen Seiten der Länge $2a$, deren

Mittelpunkt im Ursprung des Systems liegt, ist die Treffwahrscheinlichkeit für ein auf den Punkt (ξ, η) gezieltes Geschöß

$$P_R(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_{R_x}\sigma_{R_y}} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_{R_x}^2} - \frac{(y-\eta)^2}{2\sigma_{R_y}^2}\right] dx dy.$$

P_K sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Geschöß die Scheibe zerstört bzw. unbrauchbar macht. Werden N Geschosse auf den Punkt (ξ, η) abgefeuert und wirken sie bei Salvenabschuß unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu vernichten, durch $Q(\xi, \eta) = 1 - (1 - P_K P_R(\xi, \eta))^N$ gegeben. In der Praxis ist der wahre Zielpunkt (ξ, η) unbekannt. Die Zielverteilung wurde daher als normal, mit Zentrum (x, y) angenommen. Die zur Vernichtung des Zieles führende Treffwahrscheinlichkeit einer Salve von N Geschossen ist dann

$$P_{SK} = P_{SK}(x_0, y_0, \sigma_{Ax}, \sigma_{Ay}, \sigma_{Rx}, \sigma_{Ry}, N) \\ = \frac{1}{2\pi\sigma_{Ax}\sigma_{Ay}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(\xi-x_0)^2}{2\sigma_{Ax}^2} - \frac{(\eta-y_0)^2}{2\sigma_{Ay}^2}\right] d\xi d\eta.$$

Die vorliegende Tafel enthält die Werte von $P_{SK}(P_K, y_0, \sigma_A, \sigma_R, N)$ für die Parameterwerte

$$P_K = 0.1, 0.4, 0.7, 1.0; \quad y_0 = 0, a, 2a, 4a, 7a, 11a, 16a, 22a; \\ \sigma_R, \sigma_A = a, 2a, 4a, 7a, 11a, 16a, 22a; \quad N = 1, 5, 10, 25, 50, 100, 150, 200.$$

Die Zielscheibe wurde so orientiert angenommen, daß eine ihrer Seiten auf der Verbindungsstrecke von Zielmitte und Zentrum der Zielverteilung senkrecht steht ($x_0 = 0$). Die Verteilung sollte der Symmetriebedingung $\sigma_R = \sqrt{\sigma_{Rx}^2 + \sigma_{Ry}^2} = \sqrt{\sigma_{Rx}^2 + \sigma_{Ry}^2} = \sigma_{Rx} = \sigma_{Ry}$ genügen. — Für die Berechnung mit Hilfe moderner Hochleistungsrechenmaschinen (Standards Western Automatic Computer) wurde zur Annäherung des Fehlerintegrals $f(x) =$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ eine Entwicklung nach Tschebycheffschen Polynomen benutzt. Zahlreiche unabhängige Rechenproben wurden durchgeführt. Die mit einer Entwicklung von A. D. Hestenes versehene Tafel dürfte außer für spezifisch ballistische Zwecke (Entwurf von Waffen, Geschößentwicklung, strategische Planung) auch für andere Anwendungen wertvoll sein.

V. Garten.

● Kojima, Takashi: The Japanese abacus. Its use and theory. Tokyo: Charles E. Tuttle Co. 1954. 102 p., 167 illustr. 360 yen or 1 dollar.

Das japanische Rechenbrett ist wie unsere Kinder-„Rechenggeräte“ gebaut; es besteht aus einer der verwendeten Dezimalstellenzahl entsprechenden Anzahl von Stäben, auf denen sich je fünf Kugeln verschieben lassen. Die fünfte Kugel läuft auf einem besonderen Teil jeder Stange und gibt durch ihre Stellung an, ob man in der unteren oder in der oberen Hälfte einer Dekade ist. Die Stellung der übrigen vier Kugeln gibt den Zahlenwert innerhalb der Halbdekade. Mit diesem primitiven Gerät, das in Japan bei jedem Kaufmann in Gebrauch sein soll, werden alle vier Grundrechenarten ausgeführt. Es wird angegeben, man habe in einem Wettstreit erwiesen, daß die erzielbare Rechengeschwindigkeit beim Abacus durchweg größer sei als bei modernsten elektrischen Bürorechenmaschinen. Diese höchst erstaunlich klingende Behauptung kann nur durch eine ungeheure Fingerfertigkeit bei Ausschaltung jeglichen Gedächtnisbalastes während der Rechnung erklärt werden. Man findet eine minutiöse Anleitung, sich diese Technik anzueignen, wozu man allerdings ein solches Rechenbrett besitzen muß. Neuerdings wird es auch in USA billig vertrieben.

H. Wundt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● **Cramér, Harald:** *The elements of probability theory and some of its applications.* New York: John Wiley & Sons. Stockholm: Almqvist & Wiksell 1954 281 p. Sw. kr. 38,—, \$ 7,—.

Das 1949 völlig ungearbeitete schwedische Lehrbuch des Verf. liegt hier etwas erweitert in englischer Sprache vor. Es ist sehr elementar gehalten: dementsprechend werden verschiedene Sätze nicht bewiesen. Doch wird die Vertrautheit damit durch zahlreiche Übungsaufgaben gewonnen, deren Lösungen am Ende des Buches stehen und die z. T. wichtige Ergänzungen des Lehrbuchtextes darstellen. Das bekannte didaktische Geschick des Verf. tritt in allen Teilen des Buches hervor. — Teil I behandelt die Grundlagen. Nach einer historischen Einleitung wird die Wahrscheinlichkeit unter Verzicht auf strenge Axiomatisierung als Idealwert einer Größe eingeführt, deren Meßwerte die beobachteten relativen Häufigkeiten sind. Vielleicht sollte man auch in einem elementaren Lehrbuch auf die logischen Schwierigkeiten einer solchen „Definition vom Häufigkeitstypus“ hinweisen, um das Gefühl für die Notwendigkeit einer strengen Axiomatik zu wecken. Die Grundtheoreme werden in üblicher Weise abgeleitet. — In Teil II behandelt Verf. die elementaren Eigenschaften der Verteilungen. Betrachtet werden, im eindimensionalen Falle etwas eingehender, die Verteilungsfunktion, die Momente, weitere Verteilungsparameter und die erzeugende Funktion. Vertrautheit mit diesen Begriffen erlangt der Leser an Hand einiger spezieller Verteilungen. Der zentrale Grenzwertsatz wird ohne genaue Formulierung und ohne Beweis mitgeteilt. Ein reichliches Drittel (Teil III) behandelt als Anwendung einige Fragestellungen der mathematischen Statistik. Zunächst wird die logische Struktur solcher Probleme wie die Prüfung eines stochastischen Modellansatzes und die Schätzung eines unbekannten Parameters erläutert. Es folgen die Grundaufgaben der beschreibenden Statistik. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Analyse der Stichprobenparameter führt zu bekannten Verteilungen wie Student's t und darüber hinaus zur Behandlung der allgemeinen Probleme der Parameterschätzung und der Hypothesentestung. Die Konstruktion von Vertrauensbereichen wird an Beispielen gezeigt, das Problem der Minimalisierung der Irrtumswahrscheinlichkeit zweiter Art jedoch nur gestreift. Das Buch schließt mit einer kurzen Behandlung der Methode der kleinsten Quadrate, der Varianzanalyse und Regressionstheorie, der statistischen Auswertung von Stichproben und einiger einfachen Fragen der industriellen Qualitätskontrolle. — Im Anhang findet man Tafeln der normalen Verteilungsfunktion mit Ableitungen, sowie der χ^2 -, t - und F -Verteilung.

H. Richter.

● **Rényi, Alfréd:** *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* (Universitätslehrbuch.) Budapest: Tankönyvkiadó 1954. 746 S. 112.— Ft. [Ungarisch].

This book of nearly 750 pages is the first modern textbook of probability theory in the Hungarian language. It originated from lecture notes for courses which the author has held since 1948. The first five chapters (pp. 12—175) deal with the concept of probability, independence, the binomial distribution and its Poisson and normal approximations. The next six chapters (pp. 176—439) consider random variables, distributions of some of their functions (e. g. t and χ^2), mean and standard deviation, and the laws of large numbers as well as the log-log theorem. There is also a chapter on the elements of mathematical statistics. (Here the author insists that it is incorrect to consider social statistics as an application of mathematical statistics to social science. It is Marxism-Leninism which must be the guide to statistics in sociology.) The last five chapters (pp. 440—653) deal with characteristic functions, limit theorems, Markov chains, order statistics and stochastic series. At

the end of each chapter there are exercises, altogether 590, which contain further results, and solutions are given where this seems helpful. There are also four appendices. The first two deal with Boolean algebra and measure theory. The third contains an exposé of the author's new axiomatization, based on conditional probabilities. The fourth is entitled „A brief Survey of the History of Probability“. This very interesting essay, besides giving generous credit to many Hungarian mathematicians, exhibits also the author's philosophical point of view, based on dialectic materialism, and hence opposed to what he calls the idealistic, subjectivist, positivist, or bourgeois schools (with Mach and v. Mises as typical representatives). This attitude is also evident from the introductory paragraphs and numerous remarks such as the one mentioned earlier. One feels that the author sometimes overshoots his target. For instance, he states (on p. 385) that it would be an „idealistic“ interpretation to believe that errors of observation are, in general, normally distributed because the normal distribution has interesting properties. Surely such a belief is patently absurd on any philosophical background. However, a mathematical reviewer need not be too much concerned with this aspect of the book. He will unreservedly welcome another, possibly related, feature. In probability theory a book can only gain from its author's thorough knowledge of the Russian mathematical literature. Kolmogorov's axiomatic system is taken as the basis of the structure of probability theory and even rather recent results of Russian mathematicians, such as that of Gnedenko and Koroljuk concerning the distribution of the largest deviation between two empirical distributions from samples of equal size are proved and explained (pp. 601 ff). The author's own contributions to the theory of order statistics are also included. Didactically, the book is excellent. The demonstrations are clear and to the point. Even where, as in later chapters, some theorems are given without proof (e. g. Kolmogorov's and Smirnov's theorems about order statistics, both on p. 579), their meaning and significance is made perfectly clear. Applications, for instance to quality control and to other industrial problems, are stressed, particularly in the exercises. We end this review by a few critical comments. The first concerns the bibliography. It is divided into sections according to subject matter and contains most useful references, also to Russian publications and their translations. However, it is often difficult to find a required reference in the bibliography. (The reviewer was unable to find the source for the Gnedenko-Koroljuk theorem mentioned above.) A paper by Erdős, Feller and Pollard is on p. 558 incorrectly attributed to Erdős, Feller and Kac, but this is corrected on p. 690. On p. 384 it is stated that only if the distribution $i(x)$ is normal is it true that $\prod_{i=1}^N (x_i - x_0)$ has its maximum at $x_0 = \bar{x}$ for any x . It should be added that the proof depends on the assumption that this is true for all N . In the explanation of probability paper after p. 399 the reference should be to § 3 of Chapter XV, not to § 8. It is also worth mentioning that another graph gives confidence limits for 99.73%, corresponding to 3σ for the normal distribution. This is, of course, not the usual limit in the British or American literature. Although § 5 of chapter XIV is entitled „Ergodicity of Markov Chains in the Case of Infinitely Many States“, there is no explanation or even mention of the concept of ergodicity. These are, of course, small points. Recommending the book might seem futile, since only relatively few mathematicians can read Hungarian, but it is good to know that a German translation is apparently being prepared. The book deserves to become a popular monograph on its subject matter.

S. Vajda.

Gulotta, Beniamino: Su alcune questioni riguardanti gli eventi compatibili e sulla loro applicazione a una questione di logica. (Giorn. Ist. Ital. Attuari 17, 54—61 (1954).

Verallgemeinerung des Bayesschen Theorems unter schwächeren Bedingungen:

als Spezialfall (wenn die gegebenen Wahrscheinlichkeiten Null sind) entstehen offenbar Sätze der Aussagenlogik. B. de Finetti.

Jiřina, Miloslav: Conditional probabilities on strictly separable σ -algebras. Czechosl. math. J. **4**(79), 372—379 und engl. Zusammenfassg. 379—380 (1954) [Russisch].

Es sei π ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer Booleschen sigma-Algebra \mathcal{S} von Teilmengen einer Menge X und \mathcal{A} und \mathcal{B} je eine sigma-Unteralgebra von \mathcal{S} . Eine in $\mathcal{A} \times X$ definierte Funktion γ heißt eine bedingte Wahrscheinlichkeit (von \mathcal{A} relativ zu \mathcal{B}), wenn $\gamma(A, x)$ bei festem A eine \mathcal{B} -meßbare Funktion von x bildet und $\pi(A \cap B) = \int_B \gamma(A, x) d\pi(x)$ für jedes A aus \mathcal{A} und jedes B aus \mathcal{B} gilt. Ist $\gamma(A, x)$ bei festem x als Funktion von A abzählbar additiv, so wird γ regulär genannt; es handelt sich dann also um eine sogenannte bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung. Gegenstand der Arbeit sind hinreichende Bedingungen über \mathcal{A} für die Existenz einer regulären bedingten Wahrscheinlichkeit relativ zu beliebigem \mathcal{B} der folgenden Art. \mathcal{A} sei die kleinste sigma-Algebra über einem abzählbaren Halbring \mathcal{A}' mit $0 \in \mathcal{A}'$ und $X \in \mathcal{A}'$; es gebe Systeme \mathcal{C} und \mathcal{G} von Teilmengen von X , so daß zu jedem A in \mathcal{A} und jedem positiven ε Mengen S, T in \mathcal{S} , C in \mathcal{C} und G in \mathcal{G} mit $S \subseteq C \subseteq A \subseteq G \subseteq T$ und $\pi(T - S) < \varepsilon$ existieren und so daß jede abzählbare Überdeckung eines Elementes von \mathcal{C} durch Teilmengen von \mathcal{G} eine endliche Überdeckung enthält. Ersetzt man in der Überdeckungsbedingung \mathcal{C} und \mathcal{G} durch geeignete Mengen von Differenzen $C - G$ oder $G - C$, so genügt es, \mathcal{A}' als abzählbaren Verband vorauszusetzen. Die „Approximation von unten“ der Elemente von \mathcal{A}' durch ein System \mathcal{C} allein reicht aus, wenn \mathcal{C} kompakt im Sinne von Marczewski ist. Als Corollar ergibt sich, daß die Perfektheit von π im Sinne von Gnedenko und Kolmogoroff hinreicht, wenn \mathcal{A} eine abzählbare Basis hat, und, als Verallgemeinerung eines Satzes von Doob, eine hinreichende Bedingung, in der \mathcal{A} als Urbild einer „kompakten“ sigma-Algebra mit abzählbarer Basis unter einer meßbaren Abbildung erscheint. Schließlich wird der Fall eines metrischen Raums behandelt, wobei $\mathcal{A} = \mathcal{S}$ das System aller Borelschen Mengen ist und jede Borelsche Menge von unten durch kompakte Mengen approximiert werden kann.

K. Krickeberg.

Watanabe, Yoshikatsu: Bimodal distributions. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. **5**, 29—38 (1954).

Verf. stellt dem bekannten K. Pearsonschen System von Verteilungsdichten ein System bimodaler Kurven gegenüber, indem er von der Differentialgleichung $(1/y) dy/dx = (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) / (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$ ausgeht. Entsprechend dem für die Gestalt der Lösungen entscheidenden Verhalten des Nenners werden 1. beidseitig ins Unendliche verlaufende ($b_0 \neq 0, b_1 = b_2 = 0$) 2. einseitig ins Unendliche verlaufende ($b_1 \neq 0, b_2 = 0$) und 3. beidseitig begrenzte (zwei reelle verschiedene Wurzeln) Lösungstypen als Verteilungsdichten normiert. Mittels der Momentenmethode wird die Gewinnung dieser Typen 1. durch Superposition zweier Normalverteilungen, 2. durch Superposition zweier Pearson-Typ-III-Verteilungen und im 3. Fall natürlich durch zwei Pearson-Typ-I-Verteilungen erörtert. Vgl. aber K. Pearson, Philos. Trans. r. Soc. London, Ser. A **185**, 71—110 (1894).

L. Schmetterer.

Zubrzycki, S.: Some inequalities between the moments of equivalent random variables. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 59—61 (1954).

Sind die Zufallsgrößen X_1, X_2, \dots, X_n schwach äquivalent (d. h. sind die Momente $M(X_{i_1}^{s_1} X_{i_2}^{s_2} \dots X_{i_k}^{s_k})$ mit $s_1 + \dots + s_k \leq m$ von i_1, \dots, i_k unabhängig), so ist

$$\mu_{1,1,\dots,1}^l = \mu_{i_1,1,\dots,1}^k + T \quad (l < k \leq m),$$

wo T ein Korrektions-term ist. Im allgemeinen wird bewiesen, daß $T = O(1/n)$; für $m = k = 2$, $l = 1$, gibt $T = -(\mu_{2,0} - \mu_1^2)/(n-1)$ die bestmögliche Ungleichung. Anwendung betreffend ein statistisches Verfahren in der Landwirtschaft von E. B. Levy.

B. de Finetti.

Faleschini, Luigi: Sullo schema generale del problema delle prove ripetute con probabilità dipendenti secondo lo schema di contagio (o immunità). Bull. Inst. internat. Statist. 34, Nr. 2, 274—282 (1954).

Si considerino i serie di prove ($i = 1, 2, \dots, m$) e si indichi con iX_r la variabile casuale che assume il valore 1 con probabilità $i p_r$ se si verifica l'evento favorevole nella r ma prova ($r = 1, 2, \dots, n$) della i ma serie. Posto $Y = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n iX_r$ si ha

$$\text{Var}(Y) = n p q - n M(i\sigma^2) - n(n-1) \sigma_i^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[\sum_{h \neq k} \text{cov}(iX_k, iX_h) \right]$$

dove \bar{p} è la media di tutte le $i p_r$, $\bar{q} = 1 - \bar{p}$, $i\sigma^2$ la varianza della i ma serie o σ_i^2 la varianza delle $\bar{p}_i = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n i p_r$. L'A. ricava dalla precedente espressione le varianze del numero dei successi in n prove, quando vengono eseguite m serie di n prove ciascuna, nei vari schemi di prove ripetute a probabilità indipendenti e dipendenti. In particolare si sofferma sullo schema del contagio studiato dal Polya, su quello di Polya-Lexis (probabilità iniziale variabile da serie a serie e con coefficiente δ di contagio costante) e su quello di Polya-Poisson. Accenna inoltre che nella formula generale data può rientrare lo schema dell'eredità, e altri schemi di dipendenza misti più complessi (eredità-contagio, ecc.).

T. Salvemini.

Vajda, S.: A problem of encounters. Trabajos Estadíst. 5, 217—228 (1954).

Es sei ein System von n Partikeln des Typus A und m Partikeln des Typus B gegeben, und es werde angenommen, daß zwischen Partikeln verschiedener Typen zufällige Zusammenstöße stattfinden. Es soll nun die Wahrscheinlichkeit $f(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t)$ gefunden werden, daß nach einem Zeitraum t die Partikeln vom Typus A bzw. B eine Anzahl von x_1, \dots, x_n bzw. y_1, \dots, y_m Stößen erleiden. Die Funktion $f(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t)$ hängt von der Wahrscheinlichkeit ab, gemäß welcher eine bestimmte Partikel vom Typus A mit einer bestimmten Partikel vom Typus B zusammentrifft. Wir bezeichnen mit $p dt$ die Wahrscheinlichkeit eines solchen Zusammenstoßes in einer Zwischenzeit dt . Wir nehmen ferner an, daß p weder von t noch von den Partikeln abhängt. Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{df(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t)}{dt} + (n-k)(m-l) p f(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t) = p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_1, \dots, x_i = 1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_j = 1, \dots, y_m; t),$$

wobei k die Anzahl der x_i ist, die gleich X sind und l die Anzahl der y_j , die gleich Y sind; dabei ist $X \geq 0$ bzw. $Y \geq 0$ je die größtmögliche Anzahl von Zusammenstößen für Partikeln des Typus A bzw. B , nach denen sie aus dem System ausscheiden. Die Wahrscheinlichkeit, daß $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_m = s$ in einem bestimmten Zeitraum t eintritt, ist durch ein allgemeines Glied einer Poissonschen Verteilung gegeben, und der Mittelwert von s ist $n m p t$. Ferner wird der Fall untersucht, daß den x_i Restriktionen auferlegt werden, wobei die y_j willkürlich bleiben. Man erhält ein Funktionalverhältnis, welches gestattet, den Fall $n = 1$ auf den Fall eines beliebigen n zu verallgemeinern. Die Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeit und den Mittelwert der Gesamtzahl von Zusammenstößen werden angegeben. Schließlich wird der Spezialfall betrachtet, daß $X = Y = 1$, und es werden Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeit und den Mittelwert der Zusammenstoß-Anzahl erhalten.

R. Theodorescu.

Lancaster, H. O.: *Traces and cumulants of quadratic forms in normal variables.* J. Roy. statist. Soc., Ser. B **16**, 247—254 (1954).

Verf. benutzt eine enge Beziehung zwischen den Kumulanten einer quadratischen Form von n unabhängigen normalverteilten Wahrscheinlichkeitsgrößen und den Spuren der Matrix der Form, um einige bekannte Sätze über quadratische Formen von Wahrscheinlichkeitsgrößen zu beweisen. Ergibt auch C o c h r a n s zweiten Satz über quadratische Formen in Matrixform: Wenn die A_i , k reelle symmetrische Matrizen sind, die der Bedingung $\sum_{i=1}^k A_i = J_n$ genügen, dann hat jede der folgenden

drei Relationen die beiden anderen zur Folge: (i) $\sum_{j=1}^k n_j = n$, wo n_j der Rang von A_j ist, (ii) $A_j^2 = A_j$ für jedes j , (iii) $A_i A_j = 0$ für $j \neq i$. Dieser Satz wird bewiesen. Es sei bemerkt, daß der Satz wohlbekannte Tatsachen aus der Theorie der Matrizen aussagt. Verf. stellt auch den folgenden Satz auf: Es seien x_i ($i = 1, \dots, n$) unabhängige Wahrscheinlichkeitsgrößen mit dem Durchschnitt 0 und der Streuung 1, und es gebe eine nicht-triviale lineare Transformation von den x_i zu n neuen unabhängigen Wahrscheinlichkeitsgrößen y_i mit dem Durchschnitt 0 und der Streuung 1. Behauptet wird, daß jedes x_i normalverteilt ist. Um den Satz zu beweisen, benutzt Verf. die Kumulanten, deren Existenz nicht bewiesen wird. Daher ist der Beweis nicht allgemein. Der Satz ist aber richtig. Er kann z. B. mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes bewiesen werden. Es folgt nämlich leicht (was der Verf. auch gezeigt hat), daß die Transformation orthogonal sein muß, und daher, daß die Verteilungsfunktion jedes x_i als Faltung von beliebig vielen Verteilungsfunktionen darstellbar ist, die die Bedingungen des Grenzwertsatzes erfüllen. *H. Bergström.*

Vorob'ev, N. N.: *Die Addition zufälliger Größen auf endlichen Abelschen Gruppen.* Mat. Sbornik, n. Ser. **34** (76), 89—126 (1954) [Russisch].

Die recht interessante Arbeit besitzt Vorläufer in P. Lévy (dies. Zbl. **23**, 58) und A. Dvoretzky-J. Wolfowitz (dies. Zbl. **43**, 339). Ausgangspunkt ist die reguläre Darstellung einer (additiv geschriebenen) endlichen Gruppe \mathfrak{G} . Zum Teil kommen die Untersuchungen auf das Studium gewisser multiplikativer Teilsysteme des Gruppenringes (über dem Körper der reellen Zahlen) hinaus. Mit $\omega(F)$ sei jene Untermenge von \mathfrak{G} bezeichnet, die aus sämtlichen Elementen besteht, denen vermöge des Verteilungsgesetzes F von 0 verschiedene Wahrscheinlichkeit zugeordnet ist. Es gilt dann: F ist genau dann unbegrenzt teilbar, wenn $\omega(F)$ Vereinigungsmenge irgendwelcher Nebenklassen nach einer nichtleeren Untermenge ist. Unter Heranziehung des Charakterensystems der Gruppe werden das Stetigkeitstheorem und der Eindeutigkeitssatz über die eindeutige Bestimmtheit eines Verteilungsgesetzes durch ihre charakteristische Funktion übertragen. \mathfrak{H} sei eine Untergruppe von \mathfrak{G} . F heißt \mathfrak{H} -gleichwahrscheinlich, wenn den Elementen, die derselben Nebenklasse nach \mathfrak{H} angehören, gleiche Wahrscheinlichkeit zukommt. Damit sich ein Gesetz selbst reproduziert (d. h. gegenüber Faltung mit sich selbst invariant bleibt), ist notwendig und hinreichend, daß $\omega(F)$ Untergruppe von \mathfrak{G} ist und F $\omega(F)$ -gleichwahrscheinlich ist. Für die stabilen Gesetze wird eine Charakterisierung erhalten, welche in Analogie zur Formel von Lévy-Chinč'in steht. Die Arbeit endet mit Bemerkungen über Markoffsche Ketten. *L. Schmetterer.*

Deuker, E. A.: *Über die Verteilungsfunktionen von Vektorsummen.* Z. angew. Math. Mech. **34**, 162—174 (1954).

Durch Vergleich der notwendigen Rekursionseigenschaften und der Additionstheoreme der Besselschen Funktionen wird für den Betrag der Vektorsumme von n Einheitsvektoren mit unabhängig gleichverteilten Orientierungen im p -dimensionalen Raume folgende Wahrscheinlichkeitsdichte bestimmt:

$$f_{p,n}(x) = K x^{m+1} \int_0^\infty J_m^n(t) \cdot J_m(x \cdot t) t^{-m(n-1)-1} dt$$

(wo: K = Normierungsfaktor, $m = \frac{1}{2}(p+1)$). Ähnliche Formeln für verschiedene feste oder unabhängig zufällige Beträge a_1, a_2, \dots, a_n der Summanden. Grenzeigenschaften für $n \rightarrow \infty$. Beziehungen zwischen Zusammensetzung der Verteilungen bei Vektorsumme und Hankel-Transformation (Verallgemeinerung der bekannten Eigenschaften der charakteristischen Funktion: Spezialfall für $p=1$, Laplace-Transformation).

B. de Finetti.

Sparre Andersen, Erik: Some theorems on sums of symmetrically dependent random variables. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 291–296 (1954).

La réunion des fonctions de distribution de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n étant représentée par $F(x_1, \dots, x_n) = \Pr \left\{ \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x_i] \right\}$, ces variables sont symétriquement dépendantes si la fonction F est symétrique par rapport à x_1, \dots, x_n .

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$; $L_n = \min_i \{i \geq 0, S_i = \max(0, S_1, \dots, S_n)\}$, $M_n = \max_i \{i \leq n, S_i = \min(0, S_1, \dots, S_n)\}$; N_n = nombre des termes positifs de S_1, \dots, S_n . Après un bref historique, l'A. rappelle le théorème: Si X_1, \dots, X_n sont symétriquement dépendants et si C est symétrique par rapport à X_1, \dots, X_n , alors:

$\Pr \{[N_n = m] C_n\} = \Pr \{[L_n = m] C_n\} = \Pr \{[M_n = n - m] C_n\}$; $m = 0, 1, \dots, n$.

Il énonce un nouveau théorème: Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et distribuées identiquement avec une distribution non symétrique, alors:

$$\Pr \{N_n = n\} = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_n}^* \prod_{v=1}^n \frac{1}{a_v!} \left(\frac{a_v}{v} \right)^{a_v}, \quad \Pr \{N_n = 0\} = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_n}^* \prod_{v=1}^n \frac{1}{a_v!} \left(1 - \frac{a_v}{v} \right)^{a_v}$$

($n = 1, 2, \dots$), où la somme est étendue à l'ensemble de tous les nombres entiers non négatifs a_1, a_2, \dots, a_n tels que $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$. La démonstration sera donnée plus tard.

A. Sade.

Sparre Andersen, Erik: On the fluctuations of sums of random variables. II. Math. Scandinav. 2, 195–223 (1954).

L'A. poursuit ses investigations (ce Zbl. 53, 97; pour les notations voir aussi la récession précédente). Il établit une série de douze propositions dont l'objet est le suivant: Probabilités relatives à L, M, N, H dans le cas où les variables X sont indépendantes et ont la même fonction de distribution. (H_n = nombre des i , $1 \leq i \leq n-1$, tels que S_i coïncide avec la plus grande minorante convexe de la suite S_0, S_1, \dots, S_n). En particulier, expression de la probabilité pour que $K_n = m$ et pour que $K_n = m$; $S_{-1} = 0$, où K est l'une des variables aléatoires L, M ou N , en fonction de $a = \Pr \{S_i > 0\}$. Compléments sur les résultats relatifs aux variables aléatoires symétriquement dépendantes. Etude de H quand les X sont indépendantes et ont la même fonction de distribution, continue F . Dans ce cas la distribution de H ne dépend pas de F .

A. Sade.

Sparre Andersen, Erik: Remarks to the paper: On the fluctuations of sums of random variables. Math. Scandinav. 2, 193–194 (1954).

L'A. rectifie une erreur d'impression dans la seconde d'une longue série de propositions, contenues dans un précédent travail (ce Zbl. 53, 97) et revient sur la démonstration de la troisième de ces propositions.

A. Sade.

Anis, A. A.: On the distribution of the range of partial sums of independent random variables. Proc. math. phys. Soc. Egypt 4, Nr. 5, 83–89 (1954).

Es seien $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ unabhängige Zufallsveränderliche mit $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, ferner sei $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Verf. bestimmt explizit die Verteilung der Breite $R_n = \max(0, S_1, \dots, S_n) - \min(0, S_1, \dots, S_n)$. Das Problem wird dadurch gelöst, daß es auf ein Irrfahrtsproblem zwischen absorbierenden Wänden zurückgeführt wird, welches dann mittels des Matrizenkalküls behandelt wird. Als Grenzfall ergibt sich auch die Verteilung der Breite bei dem Gaußschen Prozess. (Vgl. W. Feller, dies. Zbl. 43, 342.)

L. Takács.

Prochorov, Ju. V.: Über einen lokalen Grenzwertsatz für gitterförmige Verteilungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 535—538 (1954) [Russisch].

Es seien $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ ganzwertige unabhängige Zufallsveränderliche, ferner sei $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ gesetzt. Es bezeichne A_n bzw. B_n den Erwartungswert bzw. die Streuung von s_n ; man setze ferner $P(\xi_n = j) = p_{nj}$, $P(s_n = m) = P_n(m)$. Gilt für $n \rightarrow \infty$,

$$P_n(m) = (2\pi)^{-1/2} B_n^{-1} \exp \left\{ -(m - A_n)^2 / 2 B_n^2 \right\} + o(B_n^{-1})$$

gleichmäßig für $-\infty < m < \infty$, so sagt man: für die Folge $\{\xi_n\}$ gilt der lokale Grenzwertsatz; gilt dieselbe Tatsache auch dann, wenn endlich viele Glieder der obigen Folge geändert werden, so sagt man: für die Folge $\{\xi_n\}$ gilt der starke lokale Grenzwertsatz. Verf. zeigt, daß unter den Bedingungen A) $|\xi_n| \leq K$, B) $p_{nj} < p_{n,0}$, C) $\lim B_n = \infty$ für die Folge $\{\xi_n\}$ dann und nur dann der starke lokale Grenzwertsatz gilt, wenn der größte gemeinsame Teiler der j . für die

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{nj} = \infty \text{ ist, gleich 1 ist.}$$

L. Takács.

Takano, Kinsaku: On some limit theorems of probability distributions. Ann. Inst. statist. Math. 6, 37—113 (1954).

Zunächst wird Khintchine's Satz über Typenkonvergenz von Verteilungen auf einfache Weise unter Benützung der Inversen der Verteilungsfunktion bewiesen und eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf mehrdimensionale Verteilungen gegeben, die von der von M. Fisz (dies. Zbl. 64.128) aufgestellten sich dadurch unterscheidet, daß zwei Verteilungen F, G vom gleichen Typ heißen, wenn

$$F(x_1, \dots, x_n) = G(a x_1 + b_1, \dots, a x_n + b_n)$$

gilt; die in dem Satz auftretenden Verteilungen müssen aber nur als von der ein-Punkt-Verteilung verschieden vorausgesetzt werden. In den weiteren Teilen der Arbeit werden Ausdehnungen bekannter Resultate auf mehrdimensionale Verteilungen gegeben: die, wie Verf. bemerkt, schon bekannte kanonische Darstellung der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze, die Bedingungen für ihren Anziehungsbereich, und verschiedene Fassungen des zentralen Grenzwertsatzes mit Beschreibung des Anziehungsbereiches der Normalverteilung.

D. Morgenstern.

Mihoc, G.: Extension de la loi de Poisson pour les chaînes de Markov, multiples et homogènes. Acad. Republ. popul. Romine, Bul. Şti., Sect. şti., mat. fiz. 6, 5—11, russ. u. französ. Zusammenfassg. 12—15 (1954) [Rumänisch].

Es handelt sich um die Fortsetzung der Arbeiten des Verf., welcher sich früher mit dem Poissonschen Gesetz im Falle der einfachen Markoffschen Kette befaßte. Mit $\varphi(i_1, i_2, \dots, i_s, i_{s+1}; \tau)$ wird die Übergangswahrscheinlichkeit bezeichnet von der Aufeinanderfolge der Zustände $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_s}$ zu dem Zustand $E_{i_{s+1}}$ für einen homogenen Prozeß, welcher eine vielfache Markoffsche Kette der Ordnung s über die m Zustände E_1, E_2, \dots, E_m bildet. Es wird vorausgesetzt, daß die φ stetige Funktionen mit stetigen Ableitungen erster Ordnung in τ sind. Die Poissonsche Hypothese wird hier durch die Forderung eingeführt, daß die Matrix $|\Phi(i_1, i_2, \dots, i_s; j_1, j_2, \dots, j_s; \tau)|_{\tau=0}$ stochastisch sei, wenn $i_1, i_2, \dots, i_s, j_1, j_2, \dots, j_s$ nur die Werte $q, q+1, \dots, m$ (mit $q > 1$) annehmen und $\Phi(i_1, i_2, \dots, i_s; j_1, j_2, \dots, j_s; \tau) = 0$, ausgenommen der Fall $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_s = i_{s+1}$, wo dann $\Phi(i_1, i_2, \dots, i_s; j_1, j_2, \dots, j_s; \tau) = q(i_1, i_2, \dots, i_{s-1}; \tau)$ ist. Der Verf. wendet genau wie bei den einfachen Ketten, die Methoden der charakteristischen Funktion an und erhält so als charakteristische Funktion der Frequenz des Zustandes E in $n = a/\tau$ Proben (mit einem sehr kleinen τ) den asymptotischen Wert

$$P(i_1, i_2, \dots, i_s; n, t; a/n) \sim \{R_r(e^{it})/Q_r(e^{it})\} e^{P_r(e^{it})/Q_r(e^{it})},$$

wobei P_r, Q_r, R_r Polynome in e^{it} von höchstem Grade m^{s-1} sind. O. Onicescu.

Dugué, D.: Éléments limites stochastiques. Bull. Inst. internat. Statist. 34, Nr. 2, 60—71 (1954).

Der Begriff der vollständigen Konvergenz (s. dies. Zbl. 30, 201) wird eingehend untersucht und Anwendungen gegeben, so z. B. auf das Maximum-Likelihood-Prinzip und auf die Frage der Konvergenz der Stichprobenverteilungen. x_1, \dots, x_n seien n identisch verteilte unabhängige zufällige Variable und $M_n = \max(x_1, \dots, x_n)$. Dann gilt: M_n n konvergiert genau dann der Wahrscheinlichkeit nach (fast sicher) [vollständig], wenn $n(1 - F(n)) \rightarrow 0$ strebt $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (1 - F(n)) \right.$ konvergiert $\left. \right)$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty} n(1 - F(n)) \right.$ konvergiert $\left. \right]$. L. Schmetterer.

Rios, S.: Bemerkung zu meiner Note „Über die Konvergenz von Verteilungen und die Konvergenz der Wahrscheinlichkeit nach“. *Trabajos Estadist.* 5, 327 (1954) [Spanisch].

Betrifft die in dies. Zbl. 42, 374 besprochene Note.

Akaike, Hirotugu: An approximation to the density function. *Ann. Inst. statist. Math.* 6, 127—132 (1954).

Given a sample of size N from a population with density function $f(x) dm$ (where m is a Lebesgue measure), denote by $f_\varepsilon(x)$ the ratio of those items which fall in the interval $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. The author defines that value of ε as best for given N which minimizes $\int E[f_\varepsilon(x) - f(x)]^2 w(x) dm$ where the integral is taken over the space of all x , $w(y)$ is some weight function and E denotes expected values. Formulae are given for N for which given values of ε are best, for various $f(x)$ and weight functions $w(x) = 1$ or $= f(x)$. They are illustrated by tables and by a graph. S. Vajda.

Jaglom, A. M.: Effektive Lösungen linearer Approximationsaufgaben für Prozesse mit zufälligen stationären n -ten Zuwachsen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 98, 189—192 (1954) [Russisch].

Für Prozesse $\xi(t)$ mit zufälligen stationären n -ten Zuwachsen vgl. man dies. Zbl. 51, 105 und 55, 368. Hier geht Verf. von einer Reihe von speziellen Typen von Spektraldichten aus und gibt konkrete Lösungen für die Extrapolation und Filtration der zugehörigen Prozesse $\xi(t)$ an. Es handelt sich dabei vielfach um Verallgemeinerungen des Falles $n = 1$, für den wir einige Literaturhinweise angeben: A. N. Kolmogoroff, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 26, 115—118 (1940); N. Wiener, dies. Zbl. 36, 37; L. A. Zadeh und R. Ragazzini, *J. appl. Phys.* 21, 645—655 (1950); M. G. Krejn, dies. Zbl. 57, 350 usw. Die Resultate werden ohne Beweis aufgezählt. L. Schmetterer.

Bartlett, M. S.: Processus stochastiques ponctuels. *Ann. Inst. Henri Poincaré* 14, 35—60 (1954).

La première partie de l'ouvrage contient quelques problèmes et méthodes d'étude concernant les processus stochastiques ponctuels, rencontrés en physique et biologie (spécialement les méthodes de Ramakrishnan et Babha). L'A. passe ensuite à l'étude des processus ponctuels multiplicatifs, par exemple le simple processus de renouvellement, croissance de population, cascades de nucléons, en utilisant surtout la fonctionnelle caractéristique. Une application intéressante des méthodes exposées, déjà indiquée par l'A. (ce Zbl. 36, 85), est donnée à la théorie des épidémies. L'ouvrage a plutôt un caractère expositif. R. Theodorescu.

Malecot, G.: Sur les modèles stochastiques linéaires asymptotiquement stationnaires. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér. Sect. A* 17, 19—35 (1954).

Der Verf. erwähnt, daß viele lineare Probleme in der Ökonometrie, der Demographie und Genetik sich zurückführen lassen auf das Studium von r Variablen q_i , die zufällige Funktionen der ganzen Zahl n sind und dem folgenden linearen stochastischen Schema genügen $q_i(n) = a_i + \sum_k l_{ik} q_k(n-1) + \varepsilon_i(n-1)$. Die $\varepsilon_i(n-1)$ sind zufällige Größen, deren bedingtes Wahrscheinlichkeitsgesetz, wenn die $q_k(n-1)$

bekannt sind, von keinem anderen vorherigen Werte der q_k abhängt, da deren bedingte Mittelwerte Null sind; die „Influenzkoeffizienten“ l_{ik} werden als Konstante betrachtet, wenn die q_k innerhalb gewisser Grenzen bleiben. Hier wird der Fall $a_i = 0$ betrachtet. Der Verf. verfolgt die Entwicklung der Mittelwerte, der Kovarianzen und den asymptotischen, stationären Fall. In der Folge werden die bei der Genetik erzielten Resultate angewendet.

R. Theodorescu.

Rajalakshman, D. V. and M. Madhusudana Rao: Some properties of a simple stochastic model with time-trending coefficients. J. Madras Univ., Sect. B **24**, 405—420 (1954).

The model considered is $X(t) = a(t) X(t-1) + \varepsilon(t)$ with $t > 0$ and integer, and $\varepsilon(t)$ having zero mean. Its correlogram is obtained, as is that of $S_n(t) = \sum_{r=1}^n X(t-r)$, viz. $\rho_k = \frac{E[S_n(t) S_{n-k}(t)]}{E[S_n^2(t)]}$. It is also shown that $S_n(t)$ tends to normality under given conditions. The expressions for the correlation coefficients are rather unmanageable, but some simple results can be derived from them.

S. Vajda.

Burgers, J. M.: Further statistical problems connected with the solution of a simple non-linear partial differential equation. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B **57**, 159—169 (1954).

L'A. se propose d'étudier la structure des solutions aléatoires de l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$\partial v / \partial t + v \partial v / \partial y = \nu \partial^2 v / \partial y^2$$

dont il s'est déjà servi à plusieurs reprises comme d'un modèle pour l'étude de la turbulence. La solution de cette équation s'écrit

$$v = -2\nu \frac{\partial}{\partial y} \log u, \quad u = \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{Z(\xi)}{2\nu}\right] d\xi, \quad Z(\xi) = -\frac{\xi^2}{2(t-t_0)} + \int_0^{y+\xi} a(\xi') d\xi',$$

avec $v(t_0, y) = -a(y)$. Si ν est petit, on a sensiblement $v(t, y) = -a(y + \xi_m)$, où ξ_m est l'abscisse du maximum absolu de $Z(\xi)$. De cette remarque découle une méthode de construction de $v(t, y)$ à partir de la „courbe de sommation“ $s_p(\eta) =$

$\int_0^\eta a(\xi') d\xi'$. Si en particulier cette courbe est constituée par une juxtaposition d'arcs de paraboles égales, dont le sommet est tourné vers le haut, $v(t_0, y)$ est une courbe en dents de scie, formée de segments parallèles et inclinés, séparés par des discontinuités. Cette courbe peut être définie par deux familles de quantités ε_i, θ_i , fixant les abscisses des sauts et celles des points où $v(t_0, y) = 0$. On suppose les ε_i, θ_i aléatoires, indépendants, d'écarts types respectifs σ_1 et σ_{11} . Lorsque $t - t_0$ est grand, la détermination de ξ_m n'exige en pratique que la connaissance des maxima de la courbe de sommation, dont on obtient une valeur approchée en fonction de θ_i, ε_i .

J. Bass.

Burgers, J. M.: Statistical problems connected with the solution of a simple non-linear partial differential equation. Continuation I, II, III. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B **57**, 403—413, 414—424, 425—433 (1954).

I. L'A. résume d'abord les résultats qu'il a obtenus dans des publications antérieures (voir le rapport précédent). Il s'agit des solutions „turbulentes“ de l'équation

$$(1) \quad \partial v / \partial t + v \partial v / \partial y = \nu \partial^2 v / \partial y^2,$$

dont on sait écrire la solution générale en fonction de $v(t_0, y) = -a(y)$. Lorsque ν est très petit, on écrit cette solution à l'aide de l'artifice suivant. On construit la

„courbe de sommation“ $s(\eta) = \int_0^\eta a(\xi) d\xi$. Une parabole $s_p(\eta) = \frac{(\eta - y)^2}{2(t - t_0)}$ glisse

sur la courbe de sommation, la touchant au point d'abscisse ξ . On a $v(t, y) = a(y - \xi)$. Lorsqu'il y a double contact, $v(t, y)$ subit un saut. Entre deux sauts, v est à peu près linéaire en y . Pour étudier les propriétés statistiques de v , on doit donc partir de celles de a , puis étudier celles de la courbe de sommation s . En écrivant que $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} a_i$, et en supposant les a_i aléatoires, nuls en moyenne, indépendants si $i - j > Q$, et statistiquement homogènes, on peut calculer les moments de s . Pour les grandes valeurs de η , ils sont ceux d'une loi normale d'écart type $\sqrt{2J\eta}$ où

$$J = \int_0^{\infty} R(\zeta) d\zeta, \quad R(\zeta) = a(\xi) \overline{a(\xi + \zeta)}.$$

La densité $\psi(l, s)$ de cette loi vérifie une équation de diffusion $\partial \psi / \partial t = J \partial^2 \psi / \partial s^2$ et définit la probabilité pour qu'une courbe de sommation, partant de l'origine, passe entre les points (l, s) et $(l, s + ds)$. On se propose ensuite de déterminer la probabilité pour qu'une telle courbe touche, sans la recouper, une parabole considérée comme „barrière absorbante“. Ce problème ne peut d'ailleurs être abordé qu'avec une certaine approximation. — II. Soit $E(x)$ la probabilité pour qu'une courbe partant du point $(0, 1 - 1_1)$ atteigne $-\infty$ sans rencontrer (avec l'approximation I), la „barrière d'absorption“ représenté par la parabole $s = (x\eta + \eta^2)/2t$. $E'(x)$ est la probabilité pour qu'une courbe partant du point $(0, 1 - 1_1)$ ait au moins un sommet entre les deux paraboles définies par $x \pm dx$ et x , sans rencontrer la première. Si $Y(l, s)$ représente la densité de celles de ces courbes ayant leur premier sommet entre les abscisses l et $l + dl$, on a

$$E(x) = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} dl \int_{-\infty}^s ds' Y(l, s'), \quad S = x\eta + \frac{\eta^2}{2t}.$$

On définit la densité $\Psi(l, S)$, au point $(l, S = 1 - 1_1)$, des trajectoires issues du point $(0, 1 - 1_1)$, et touchant la parabole sans la traverser. On vérifie que $Y(l, S) = \Psi(l, S) E'(x + l/t)$. On peut alors calculer la probabilité pour qu'une courbe touche une parabole donnée en t et en -4 sans jamais la traverser. On en déduit les divers moments de la distance aléatoire l entre deux contacts successifs, puis la densité de probabilité de la distance des axes de deux paraboles successives, d'où la densité de probabilité de la distance de deux points de discontinuité successifs de $v(y, t)$. On obtient enfin une expression pour la quantité

$$\partial R(\zeta) / \partial \zeta = \partial [\overline{a(\xi) a(\xi + \zeta)}] / \partial \zeta.$$

III. Le modèle de turbulence étudié satisfait à une loi de similitude. Si l'on pose

$$\eta = \eta_* J^{1/3} t^{2/3}, \quad l = l_* J^{1/3} t^{2/3}, \quad \delta = \delta_* J^{1/3} t^{2/3}, \\ s = s_* J^{2/3} t^{1/3}, \quad S = S_* J^{2/3} t^{1/3}, \quad A = A_* J^{2/3} t^{1/3},$$

t et J disparaissent des équations. l_* croît comme $t^{2/3}$. On montre ensuite que $\Psi(l, S) = \Phi(l) \exp(-S^2/4Jl)$. La fonction $\Phi(l)$ ne dépend pas de S , on peut en donner des expressions approchées. Si en particulier la „barrière absorbante“ est une parabole très plate, on trouve que

$$\Phi = (A_*^{1/2} / 2 \sqrt{\pi J^{1/3}}) (1 - \frac{1}{4} \sqrt{\pi} l_*^{1/2} + \dots).$$

En ce qui concerne $E(x)$, on en indique d'abord une borne supérieure et une borne inférieure. La relation

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\infty} dl \cdot l \Psi(l, S) E\left(\alpha \pm \frac{l}{t}\right)$$

permet ensuite d'écrire le développement de $E(x)$ suivant les puissances négatives

de α . Pour terminer, l'A. donne des valeurs numériques approximatives des principales grandeurs dont l'étude mathématique a été faite. Il obtient en particulier les valeurs de $E(\alpha)/\Delta_1$, et il trouve que $\bar{l} = 0,92 \sqrt{J^{1/3} t^{2/3}}$. *J. Bass.*

Middleton, D., W. W. Peterson and T. G. Brisdall: Discussion of „Statistical criteria for the detection of pulsed carriers in noise. I. II.“ J. appl. Phys. 25, 128—130 (1954).

Siehe dies. Zbl. 52, 368.

Statistik:

• Ríos, Sixto: Einführung in die Methoden der Statistik. II. Teil. Madrid: Andrés Mellado 1954. VIII p., p. 193—434 [Spanisch].

The first part of this textbook was reviewed in this Zbl. 43, 135. It was then mimeographed, but has since appeared in print and the present book is also printed. It deals with the theory of estimation and of testing, with quality control, design of experiments, multivariate analysis and small sample theory, on familiar lines. Moreover, it contains also rather sketchy lessons on decision functions, sequential analysis, non-parametric tests, time series and stochastic processes. (The last mentioned lesson starts with an axiomatic system of probability.) — The exposition is throughout elementary, but introduces the student to a fairly large portion of statistical theory. Most lessons are followed by a few exercises, without solutions. — There is an appendix on Operational Research and a bibliography, divided into „general“ and „special“ books. Some of them do not seem to have any connection with the topics of the main text and the criterion used in their selection is not clear. The appendix on Operational Research covers about one tenth of the book and is based on lectures given at various colleges and other educational institutions. It does not contain anything that is not available in English publications, but its inclusion is presumably justified by the present organisation of statistical teaching in Spain, of which the author is a protagonist. The reviewer would have welcomed a clearer statement about the mutual relations between statistics and operational research. *S. Vajda.*

• Masuyama, Motosaburo: Graphical method of statistical inference. Tokyo: Maruzen Company, Ltd. 1954. III, 83 p.

The author is interested in the use of graph papers in order to solve approximately some problems of the statistics of inference. He studies, in particular, the applicability of double square root paper. (See in this connection: Mosteller and Tuckey, this Zbl. 32, 419.) — The elementary pamphlet gives a clear explanation of certain (well known) relevant ideas and problems and a very workable introduction into the use of this particular graphical procedure. *H. Geiringer.*

• Royo, J. und S. Ferrer: Statistische Tafeln. (Zufallszahlen, Stichprobenfehler und Normalverteilung.) Madrid: Instituto de Investigaciones Estadísticas (C. S. I. C.) 1954. 244 p. [Spanisch].

Royo, José und Sebastian Ferrer: Aus den Zahlen der spanischen National-lotterie erhaltene Tafeln aleatorischer Zahlen. Trabajos Estadíst. 5, 247—256 (1954) [Spanisch].

Barberi, Benedetto: Statistics and the theory of probability. Bull. Inst. internat. Statist. 34, Nr. 2, 42—59 (1954).

Verf. betont die Notwendigkeit einer strengen begrifflichen Unterscheidung zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung (als subjektiver Theorie des Voraussehens) und Statistik (als Methode für die Sammlung von gemachten Beobachtungen), obwohl (und sogar desto mehr) beide Theorien fast in jeder Anwendung eng zusammen benutzt werden sollen. *B. de Finetti.*

Ottaviani, Giuseppe: Sui metodi di stima applicati in statistica e sulla loro interpretazione probabilistica. Bull. Inst. internat. Statist. **34**, Nr. 2, 181—184 (1954).

Verf. bemerkt, daß die Problemstellung, aus der später die mathematische Statistik erwachsen ist, schon im Lehrbuch von G. Castelnovo, *Calcolo delle Probabilità* (Rom, 1919; 2. Aufl. Bologna, 1926) klar auseinandergesetzt worden ist.

B. de Finetti.

Hemphill, F. M.: Suggested desk calculator operations for computing moments by the row. Biometrics **10**, 152—154 (1954).

Siotani, Minoru: An estimate of standard deviation of normal population based on the difference between means of two groups divided by sample mean. Ann. Inst. statist. Math. **6**, 153—160 (1954).

Let x_1, \dots, x_n be an ordered normal sample, let r be defined by $x_r \leq \bar{x} < x_{r+1}$, and let \bar{x}' , \bar{x}'' be the means of the first r and the last $n - r$ x 's, respectively. Then $U = \bar{x}'' - \bar{x}'$, divided by a proper constant, provides an estimator for σ . The distribution for U (conditionally for given r , as well as absolutely) is derived and the efficiency studied. There is no reference to the purely linear estimators of Lloyd (this Zbl. **46**, 366) from which the present one differs by the role of \bar{x} in the definition of U .

G. Elfving.

Moore, P. G.: A note on truncated Poisson distributions. Biometrics **10**, 402—406 (1954).

Der Verf. schlägt Formeln zur Abschätzung der Mittelwerte im Falle einer abgestumpften (truncated) Poissonschen Verteilung vor, nachdem diese vorerst in vier Klassen nach den Regionen, in welchen die Beobachtungen nicht ausgeführt werden können oder nicht gültig sind, eingeteilt wurden. Wenn wir mit n_r die Frequenz der r -maligen Erscheinung eines Ereignisses in N -Proben oder in N -Ablesungen eines Kontors bezeichnen, entspricht die Klasse (1) den Fällen, wo wir die Beobachtungen $r \geq s$ außer acht lassen müssen, entsprechend die Klasse (2) den Fällen mit $r \leq k$, die Klasse (4) den Fällen mit $r < v$ und $r > w$ und die Klasse (3) den Fällen, wo eine Kombination von (1) und (2) vorliegt. Die vorgeschlagenen Schätzungen sind durch einfache Formeln, den vier Klassen entsprechend, gegeben, so zum Beispiel

für die Klasse (1): $\hat{\lambda}_1 = \sum_{r=0}^{s-1} r n_r \int \sum_{r=0}^{s-2} n_r$. Die Bildung dieser Formeln wurde durch

die Identität $\sum_{r=0}^{s-1} r \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!} = \lambda \sum_{r=0}^{s-2} \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$ angeregt, die Begründung aber ist haupt-

sächlich empirisch. Für die entsprechenden Varianzen werden in den weiteren Ausführungen einfache Formeln gegeben. Auch werden die Abschätzungen für die binomialen abgestumpften Verteilungen auf derselben Grundlage aufgebaut.

O. Onicescu.

Aoyama, Hirojiro: On the interviewing bias. Ann. Inst. statist. Math. **5**, 73—76 (1954).

Für jedes Stichproben-Kollektiv k wird statt des wahren Wertes x_k ein infolge von Fehlern des Befragers transformierter Wert $y_k = T(x_k)$ festgestellt. Sei die Wahrscheinlichkeit für den wahren Wert $p = \Pr \{T(x_k) = x_k\}$. Bei Stichproben gleichen Umfangs n und R Klassen von je L Befragern, also $n = RLn$ Befragten, erhält man einfache Ausdrücke für Stichproben-Mittelwert \bar{y} , -Erwartungswert $E(\bar{y})$ und -Streuung $V(y)$, wenn angenommen werden kann, daß die p_{ij} , $i \leq R$, $j \leq L$, für alle Befragerklassen gleich sind, $p_{ij} = p_i$. Ein Beispiel mit $R = 4$, $L = 22$, $n = 10$, $p_i = 0,95$ ergibt, daß die Befrager-Verzerrung $E(y) - \bar{X}$ mit 0,008 gegenüber einem Mittelwert für die ganze Bevölkerung $\bar{X} = 0,34$ so klein ist, daß sie vernachlässigt werden kann.

H. Härten.

Fisher, Ronald: The analysis of variance with various binomial transformations. Biometrics **10**, 130—139 (1954).

Verf. diskutiert die wichtigsten Transformationen, die besonders bei der biologischen Auswertung von Wirkstoffen vorkommen, und zwar die 1) Probit-, 2) Winkel- (angular), 3) logit-, 4) log log-, 5) legit-Transformation, geht besonders auf das Verfahren der größten Plausibilität (maximum-likelihood) und die „Information“ ein, kritisiert die Korrekturen der Winkel- und Quadratwurzel-Transformationen, wie sie von M. S. Bartlett [J. Roy. statist. Soc., Suppl. **3**, 68–78 (1936)] und F. I. Anscombe (dies. Zbl. **32**, 37) vorgeschlagen wurden, sowie eine Arbeit von Cochran zu diesem Thema (dies. Zbl. **23**, 341), und die Auffassung Berksons, daß die logistische Kurve insbesondere auch aus rechentechnischen Gründen der normalen vorzuziehen sei.

O. Ludwig.

Fisher, Ronald: Discussion of the analysis of variance with various binomial transformations. Biometrics **10**, 140–151 (1954).

Es werden Bemerkungen und Erwidern zur Kritik Sir Ronald Fishers (vgl. vorstehend. Referat) von M. S. Bartlett, F. I. Anscombe, W. G. Cochran und J. Berkson gebracht. Diese beziehen sich darauf, daß die Voraussetzungen für eine strenge Maximum-likelihood-Analyse häufig nicht gegeben seien, daß Fragen der rechnerischen Einfachheit nicht immer nebensächlich seien, und daß der Minimum-logit- χ^2 -Schätzer auch theoretische Vorteile gegenüber dem Maximum-likelihood-probit-Schätzer habe.

O. Ludwig.

Aoyama, Hirojiro: A study of the stratified random sampling. Ann. Inst. statist. Math. **6**, 1–36 (1954).

Die Arbeit befaßt sich mit Problemen der Hypothesenprüfung und Parameterschätzung geschichteter Ausgangsgesamtheiten auf Grund geschichteter Stichproben. Erfolgt die Schichtung N_1, \dots, N_R der N -gliedrigen Population auf Grund einer oder mehrerer, mit der interessierenden Variablen X korrelierter Variablen Y, Z , etc., so sind zur Schichtung diejenigen Variablen zu verwenden, die die multiple Korrelation mit X maximalisieren. Bei bekannter Verteilung dieser schichtenden Variablen werden deren Schichtgrenzen optimal bestimmt, d. h. so, daß die Varianz der Schätzung

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^R \frac{N_i \cdot \bar{x}_i}{N} \quad \left(\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{x_{ij}}{n_i} \right)$$

minimal sei. Bei proportionaler Stichproben-Schichtung ($n/n = N/N$) sowie bei Neymanscher Schichtung ergibt sich als optimal approximativ konstante Intervallbreite der schichtenden Variablen. Sodann untersucht Verf. die Auswirkung sukzessiver Schichtungen auf die Erwartungstreue der Schätzer. In einem Kapitel über systematische Stichproben zitiert Verf. eigene ältere Resultate (dies. Zbl. **49**, 222) und beweist einen Satz, der aber trivial ist, da er einen Spezialfall der sattsam bekannten hypergeometrisch-multinomialen Verteilung (Bernoulli-Schema mit k Klassen, Ziehungen ohne Zurücklegen) behandelt. — Erfolgt die Schichtung der Population zufällig, so gilt eine allgemeinere Tschebyscheff-Ungleichung

$$\Pr \{ |X - \varepsilon E(X)| \geq k \sqrt{\text{var } \bar{X} + [E(\bar{X}) - \varepsilon E(X)]^2} \} \leq k^{-2},$$

wo E und var die Stichprobenentnahme aus einer Schicht betreffen und ε die Erwartung bezüglich der zufälligen Populationsschichtung. Früheren Ergebnissen über den χ^2 -Test der AnpassungsgröÙe bei geschichteten Proben (H. Aoyama, dies. Zbl. **51**, 368) folgen entsprechende Rechnungen für den χ^2 -Test zur Homogenitätsprüfung in $s \times t$ -Kontingenztafeln, schließlich Erwartung und Varianz des mit Gewichten $w_i = N_i/n_i$ gebildeten Korrelationskoeffizienten der geschichteten Stichprobe. Abschließend folgen Anwendungen auf Abnahmeprüfungen in der statistischen Qualitätskontrolle.

M. P. Geppert.

Matusita, Kameo, Yukio Suzuki and Hiroshi Hudimoto: On testing statistical hypotheses. Ann. Inst. statist. Math. **6**, 133–141 (1954).

Let H_0 and H_1 be the hypotheses that the random vector variable X in space R is distributed according to a function in the set ω_0 or ω_1 , respectively. Define the distance of two distribution functions F and G with density functions $f(x)$ and $g(x)$ by $d(F, G) = \left\{ \int_R [\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}]^2 dx \right\}^{1/2}$ and the distance between ω_0 and ω_1 by $d(\omega_0, \omega_1) = \inf_{F \in \omega_0, G \in \omega_1} d(F, G)$. The author proves the following theorem: If $d(\omega_0, \omega_1) > 0$ and if there exist $F_0 \in \omega_0$ and $G_0 \in \omega_1$ such that $F_0(W) \geq F(W)$ and $G_0(W) \leq G(W)$ for any $F \in \omega_0$ and $G \in \omega_1$, then W can be used as a critical region for testing H_0 against H_1 and the two kinds of error are bounded by the following relations:

$$F(W) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \int_R \sqrt{f_0(x) g_0(x)} dx, \quad G(W) \leq 1 - \sqrt{k} \int_R \sqrt{f_0(x) g_0(x)} dx$$

for any $F \in \omega_0$ and $G \in \omega_1$. Five examples are given for the purpose of illustration.
S. Vajda.

Matusita, Kameo: Decision rule by probability ratio. *Ann. Inst. statist. Math.* 6, 143—151 (1954).

Let $f_1(x)$ and $f_2(x)$ be two density functions in space R and m a Lebesgue measure in R . If the a priori probabilities for $f_1(x)$ and $f_2(x)$ to hold are, respectively, p and q , and S and $R - S$ are the sets of x which lead to the decision that $f_1(x)$ holds, or that $f_2(x)$ holds, respectively, then a Bayes solution is given by $S(p, q) = \{x: p f_1(x) \geq q f_2(x)\}$. If, also, there exist p_0, q_0 such that $\int_{S(p_0, q_0)} f_1(x) dm = \int_{R-S(p_0, q_0)} f_2(x) dm$ then (p_0, q_0) is a least favourable distribution and the decision based on $S(p_0, q_0)$ is minimax. A truncated sequential rule is also given which limits the errors of both kinds.
S. Vajda.

Anscombe, F. J.: Fixed-sample-size analysis of sequential observations. *Biometrics* 10, 89—100 (1954).

Ziegler, James: A note on item analysis with an electronic computer. *Psychometrika* 19, 261—262 (1954).

● **Fruchter, B.:** Introduction to factor analysis. New York: Van Nostrand and Co. 1954. XII, 280 p. 27 s. 6 d.

Das vorliegende Buch schrieb Verf. für den Anfänger auf dem Gebiete der Faktorenanalyse. Sein Ziel ist, Schritt für Schritt die einzelnen Hauptprobleme darzulegen und zu lösen, wobei, wenn vorhanden, die verschiedenen Lösungsmethoden erklärt und gegeneinander abgewogen werden. Hierbei sucht Verf. erfolgreich in erster Linie das Verständnis für die Gedankengänge zu wecken. Im Gegensatz zu anderen bewährten Lehrbüchern verzichtet Verf., obwohl er ein kurzes Kapitel über Matrizen einschaltet, weitgehend auf die formalen Hilfsmittel der Matrizen-schreibweise und schildert statt dessen die auf Matrizen-Kalkül beruhenden Verfahren durch wörtliche Beschreibung der vorzunehmenden Operationen, die er laufend an Zahlenbeispielen erläutert. Dieses Vorgehen ist zweifellos geeignet, dem Nicht-Mathematiker, insbesondere dem Psychologen, den Zugang zur Technik der Faktorenanalyse zu erleichtern, während es den beweisungsrigen Mathematiker anregen wird, mathematisch anspruchsvollere und formal elegantere Lehrbücher durchzuarbeiten. Die rein methodischen Ausführungen werden ergänzt durch wertvolle historische Hinweise und durch Besprechung einer Reihe methodisch typischer Faktorenanalysen verschiedener Autoren. Ein abschließendes Kapitel gibt wichtige Überblicke über die benutzten Begriffe und Ausblicke auf künftige Entwicklungen, wie sie sich bei der inversen Faktorenanalyse (Q -Technik), P -Technik etc. im Gegensatz zur klassischen R -Technik abmahnen. Den einzelnen Kapiteln sind kurze Übungsaufgaben mit Lösungen beigegeben. Wertvoll ist eine sehr umfangreiche Biblio-

graphie, die die wesentlicheren Arbeiten auf dem Gebiete der Faktorenanalyse in den Jahren 1940–1952 umfaßt. — Alles in allem schließt das Buch wohl in mancher Beziehung auf glückliche Weise eine fühlbare Lücke. *M. P. Geppert.*

Ahmavaara, Yrjö: The mathematical theory of factorial invariance under selection. *Psychometrika* 19, 27–38 (1954).

Verf. zeigt, daß die für die Auswirkung einer auf Grund von l Auslese-Faktoren erfolgenden Auslese auf Varianzen und Korrelationen von A. C. Aitken (dies. Zbl. 10, 406) angegebenen Matrix-Formeln einer linearen Transformation im Faktorraum äquivalent sind und daß sich jede l Variablen betreffende Auslese auf l sukzessive einvariable Auslesen zurückführen läßt; auf dieser Grundlage leitet er eine Reihe (teilweise schon bekannter) Sätze über die Invarianz der Zahl gemeinsamer Faktoren, der Faktorengewichte und der einfachen Struktur gegen Auslese her.

M. P. Geppert.

Harman, Harry H.: The square root method and multiple group methods of factor analysis. *Psychometrika* 19, 39–55 (1954).

Nach einer historischen Einleitung beschreibt Verf. an Hand der beim multivariablen Regressionsproblem zu lösenden Normalgleichungen die in den Grundzügen uralte „Quadratwurzel-Methode“ zur Lösung eines linearen Gleichungssystems, die bei gegebener symmetrischer Matrix R der Zerlegung $R = \mathcal{E}' \cdot \mathcal{E}$ äquivalent ist, und erläutert ihre Bedeutung und Verwendung zur Zerlegung der Korrelationsmatrix beim multiplen-Gruppen-Verfahren der Faktorenanalyse. *M. P. Geppert.*

Plumlee, Lynnette B.: The predicted and observed effect of chance success on multiple-choice test validity. *Psychometrika* 19, 65–70 (1954).

Assuming chance to be fully operative, the predicted effect of chance success on test validity when answer options are supplied depends on the number of options, the difficulty of the test and the variance of test scores. Predicted validity values are compared with empirical validity values in an experiment which used the same mathematics test items with and without answer options.

Zusammenfassg. des Autors.

Guttman, Louis: Some necessary conditions for common-factor analysis. *Psychometrika* 19, 149–161 (1954).

Es sei R eine Korrelationsmatrix, ferner U^2 eine diagonale Matrix so, daß $G = R - U^2$ eine Gramsche Matrix mit dem minimalen Rang r sei. Es wird gezeigt, daß $r \geq s_1$, wo s_1 die Anzahl derjenigen Eigenwerte von R ist, die nicht kleiner sind als 1. Ferner werden einige weitere Sätze, die mit den Grundproblemen der Faktoranalyse verknüpft sind, angegeben. *K. Sarkadi.*

Thurstone, L. L.: An analytical method for simple structure. *Psychometrika* 19, 173–182 (1954).

One of the most difficult parts of multiple-factor analysis for the student to learn is the rotation of the coordinate axes to simple structure. The complete graphical methods have been the most dependable. The writer has tried many times to develop an analytical method which would eliminate the graphical methods of successive approximation. The method to be described here seems at last to be successful and practically feasible. It is equally applicable to unimodal and bimodal hyperplanes so that no restrictive assumptions need to be made about the positive or negative signs of the factorial components.

Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Sakoda, James M.: Osgood and Suci's measure of pattern similarity and Q-technique factor analysis. *Psychometrika* 19, 253–256 (1954).

Ferguson, George A.: The concept of parsimony in factor analysis. *Psychometrika* 19, 281–290 (1954).

The concept of parsimony in factor analysis is discussed. Arguments are advanced to show that this concept bears an analogue relationship to entropy in statistical mechanics and information in communication theory. A formal explication of the term parsimony is proposed which suggests approaches to the final resolution of the rotational problem.

Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Mandel, John: Chain block designs with two-way elimination of heterogeneity. *Biometrics* 10, 251–272 (1954).

Calvin, Lyle D.: Doubly balanced incomplete block designs for experiments in which the treatment effects are correlated. *Biometrics* 10, 61—88 (1954).

The author considers incomplete block designs when there may be correlation among the observations within a block. The following mathematical model is proposed:

$$Y_{hi} = n_{hi} \left\{ \mu + \beta_h + \tau_i + \sum_{k \neq i} n_{hij} m_{ij} \lambda_{ij} + \varepsilon_{hi} \right\} \quad (h = 1, 2, \dots, q; \quad i, j = 1, 2, \dots, p),$$

where Y_{hi} is the observed value for the i -th treatment in the h -th incomplete block; μ , β_h and τ_i are effects for the mean, the h -th incomplete block and the i -th treatment respectively; λ_{ij} the effect common to the i -th and j -th treatments when they are in the same block ($\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$); the ε_{hi} are the errors assumed to be independent and normally distributed with mean zero and variance σ^2 ;

$n_{hi} = \begin{cases} 1 & \text{when the } i\text{-th treatment is in the } h\text{-th block} \\ 0 & \text{when the } i\text{-th treatment is not in the } h\text{-th block} \end{cases}$; $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{when } i = j \\ -1 & \text{when } i \neq j \end{cases}$.

Estimates for the parameters μ , β_h , τ_i and λ_{ij} are obtained by the least squares analysis which can be carried through fairly easily since some complementary restrictions are introduced. Of these restrictions two are related to pairs and triplets of treatments occurring together in a block, what justifies the notation double balanced blocks. The analysis of variance is applied in the usual way.

H. Bergström.

Zelen, Marvin: Analysis for some partially balanced incomplete block designs having a missing block. *Biometrics* 10, 273—281 (1954).

Partially balanced incomplete block designs with two associate classes are considered when there is a block missing and all treatments in the missing block are the same associates of each other. It is shown how the theory of partially balanced block designs can be modified in order to suit the mentioned model. The method is illustrated by a numerical example.

H. Bergström.

Bross, Irwin: Misclassification in 2×2 tables. *Biometrics* 10, 478—486 (1954).

Meier, Paul: Analysis of simple lattice designs with unequal sets of replications. *J. Amer. statist. Assoc.* 49, 786—813 (1954).

The author investigates the simple square lattice designs for experiments in which two replication patterns from the basic set are repeated with unequal frequencies. The paper is divided into two parts. The former part which deals with the theory of analysis begins with describing the mathematical model. Then the average mean squares corresponding to the analysis of variance are given for testing the significance of varieties, and the method of estimating varietal means is stated. Finally, the efficiency of the unequal sets lattice relative to alternative designs is discussed. The latter part of the paper consists of a numerical example illustrating the theory.

Y. Komatu.

Horst, Paul: The maximum expected correlation between two multiple-choice tests. *Psychometrika* 19, 291—296 (1954).

Dingman, Harvey F.: A computing chart for the point biserial correlation coefficient. *Psychometrika* 19, 257—259 (1954).

Perry, Norman C. and William B. Michael: The reliability of a point biserial coefficient of correlations. *Psychometrika* 19, 313—325 (1954).

Sei x eine dichotome, nur der Werte 1 und 0 mit Wahrscheinlichkeiten \tilde{p} , $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$ fähige, y eine kontinuierliche stochastische Variable mit Varianz σ_y^2 , deren durch $x = 1$ bzw. $x = 0$ bedingte Verteilungen normal seien mit Erwartungswerten μ_x , μ_y und mithin $\varrho = \varrho_{xy} = (\mu_x - \mu_y) / \tilde{p}\tilde{q}\sigma_y$ ihre Zweizeilen-Korrelation (point biserial). Wenn p , q , s_x^2 , y_x , y_q die entsprechenden Schätzer einer N -gliedrigen Stichprobe und $r_{pbx} = (\bar{y}_p - \bar{y}_q) / pqs_x$ deren Zweizeilen Korrelation bedeuten, folgt nach J. Lev (dies. Zbl. 32, 38) $t = r_{pbx} \cdot \sqrt{N - 2} / \sqrt{1 - r_{pbx}^2}$ einer nicht-zentralen t -Verteilung, und die Tafeln derselben von N. L. Johnson und

B. L. Welch (dies. Zbl. 23, 148) gestatten die Bestimmung von Confidenzintervallen für ϱ_{pb} . Verff. beschreiben die Methode ausführlich, illustrieren sie an Zahlenbeispielen, und geben ein für große Stichproben brauchbares, auf Normalverteilung beruhendes Näherungs-Verfahren an. Auf Grund numerischer Vergleiche für 5 verschiedene N -Werte vermuten Verff., daß bei gleichem Signifikanzniveau die Confidenzbereiche für die Zweizeilen-Korrelation ϱ_{pb} allgemein schmaler seien als die entsprechenden für die Bravaisische Korrelation ϱ . *M. P. Geppert.*

Amato, Vittorio: Una nuova espressione dell'indice di cograduazione ϱ di Spearman. Bull. Inst. internat. Statist. 34, Nr. 2, 329 — 335 (1954).

Siano x e y due variabili casuali date e sia $y' = K - y$ dove $K = (2 \sum y)/n$. L'A. parte dall'osservazione che $\text{Var}(x + y)$ tende ad un massimo nel caso di concordanza tra le modalità x, y ed assume invece un valore minimo nel caso di discordanza. Conseguentemente, un indice che assume i valori $+1$ e -1 in questi due casi estremi e valori intermedi negli altri casi si può scrivere:

$$(1) \quad r = 2 [\text{Var}(x + y) - \text{Var}(x + y')]/[\text{Var}(2x) + \text{Var}(2y)].$$

Sostituendo ai valori di x e y i numeri p e q che esprimono i posti occupati nelle graduatorie crescenti dalle coppie di modalità x, y si ricava $r = \varrho$, dove ϱ è l'indice di cograduazione dello Spearman. Se invece della varianza si assume come indice di variabilità lo scostamento semplice medio, dalla (1) si ricava l'indice semplice di cograduazione del Gini, mentre se si assume lo scostamento quadratico medio si ottiene un nuovo indice ϱ' legato da una semplice relazione con ϱ . L'A. osserva che altri numerosi indici di cograduazione si possono ottenere dall'espressione considerata cambiando la misura della variabilità. Essi concordano perfettamente nell'assumere i valori estremi $+1$ e -1 ma possono differire nell'indicazione del caso di indifferenza perchè l'annullarsi di $V(p - q) - V(p - q')$ dipende dall'indice di variabilità V impiegato. *T. Salvemini.*

Durbin, J.: Errors in variables. Revue Inst. internat. Statist. 22, 23 — 32 (1954).

Consider the relation $y'_i = \beta x'_i + \xi_i$ ($i = 1, \dots, n$) where the ξ_i are uncorrelated random variables with zero mean and constant variance and suppose that instead of y'_i and x'_i , we actually observe y_i and x_i which are subject to errors. Then the least square estimate of β , viz. $b = \sum x_i y_i / \sum x_i^2$ is in general biased as well as inconsistent. The author treats three different methods of dealing with this problem, namely (i) that of Berkson (this Zbl. 40, 224) who has shown that in certain conditions (which may well hold in economic models) b will be unbiased, (ii) the method of „instrumental variables“ z_i which are correlated with the x'_i but not with their errors or with the ξ_i when $b' = \sum z_i y_i / \sum z_i x_i$ is a consistent estimate of β with small bias (examples are given), and (iii) the „classical approach“, e. g. that of Tinbergen in Econometrics (this Zbl. 46, 375) which requires, however, a knowledge of the covariance matrix of the errors of observation. *S. Vajda.*

Prais, S. J. and J. Aitchison: The grouping of observations in regression analysis. Revue Inst. internat. Statist. 22, 1—22 (1954).

After an exposition of the general regression model (i. e. that with a general covariance matrix) by matrix methods the authors treat by analogous methods grouped homoscedastic observations and show that if they are replaced by the average value of their group, the resulting estimators of the linear regression coefficients are unbiased. They also find the variance of the estimators and hence their efficiency as compared with that of ungrouped observations. This is followed by remarks about efficient methods of grouping: broadly speaking, groups should contain as homogeneous units as possible. For heteroscedasticity with unknown variances, the authors suggest an iterative procedure illustrated by a numerical example, and discuss again grouping. *S. Vajda.*

David, S. T.: Confidence intervals for parameters in Markov autoregressive schemes. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **16**, 195—203 (1954).

The paper deals with interval estimation of ϱ on the basis of a segment of a stationary time series u_t following the Markovian autoregressive scheme $u_t = \varrho u_{t-1} + \varepsilon_t$, the non-observable disturbances ε_t being normal and independent. For convenience in algebra, the segment is closed into a circular process. Two approaches indicated by Kendall and Wold, respectively, are explored. They are based on the facts that the quantities $a = (\bar{\varepsilon} - \mu_\varepsilon)^2 / \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2$, and $b = \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) (\varepsilon_{t-1} - \bar{\varepsilon}) / \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2$ have known distributions, and that, on the other hand, a and b are expressible in terms of ϱ and the sample u . The percentile inequalities $a' \leq a(\varrho, u) \leq a''$ and $b' \leq b(\varrho, u) \leq b''$ yield confidence intervals for ϱ . The author gives a detailed discussion of the properties of these intervals, ending in favour of the second approach.

G. Elfving.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

● Bliss, C. I. and D. W. Calhoun: Outline of biometry and statistics. New Haven, Conn.: Yale Co-operative Corporation 1954. XVI, 271 p. \$ 4.50.

Li, C. C. and Louis Sacks: The derivation of joint distribution and correlation between relatives by the use of stochastic matrices. *Biometrics* **10**, 347—360 (1954).

Considering the Mendelian segregation of multiple alleles, autosomal or sex-linked, a simple procedure is given of finding the frequencies of various genotypic combinations of near relatives. The method consists in making use of matrices of transition probabilities. Such a matrix is expressed in the form of a linear function of some basic matrices. Finally the correlations between relatives are deduced also from such linear expressions of the basic matrices.

Y. Komatu.

Komatu, Yûsaku: Distributions of genotypes after a panmixia. *J. math. Soc. Japan* **6**, 266—282 (1954).

Consider two distributions, one for males, one for females of $m(m+1)/2$ genotypes; consider $m(m+1)/2$ stochastic variables. Denote by $\varphi(t')$ the probability that the distribution in the next generation after a panmixia is t' each mating being supposed to produce one child. The aim of the paper is to establish a moment generating function for φ with respect to an appropriately defined set of variables z .

H. Geiringer.

Komatu, Yûsaku: Mother-child combinations concerning an inherited character after a panmixia. *J. math. Soc. Japan* **6**, 283—302 (1954).

The analogous problem discussed in the preceding review is now considered with respect to a mother child combination.

H. Geiringer.

Kimball, A. W. and A. S. Householder: A stochastic model for the selection of macronuclear units in paramecium growth. *Biometrics* **10**, 361—374 (1954).

Almond, Joyce: A note on the χ^2 test applied to epidemic chains. *Biometrics* **10**, 459—477 (1954).

The paper is concerned with the Reed-Frost model for the spread of an epidemic within a closed population. In this model, the time range is divided into intervals of length equal to the incubation period, and the number of cases occurring within such an interval is assumed to be binomially distributed, with n and p determined by the previous development together with a constant q indicating the contagion probability. The question arises whether one may test this model by means of the χ^2 -criterion, using at each stage the conditional expected number of cases determined by the previous stages. Applying moment methods the author makes an affirmative answer plausible, provided that q is small whereas the number of susceptibles remains large throughout the process.

G. Elfving.

Gulliksen, Harold: A least squares solution for successive intervals assuming unequal standard deviations. *Psychometrika* **19**, 117—139 (1954).

Zur Bestimmung der n Reizen entsprechenden unbekannten Skalenwerte werden bei der „Methode der sukzessiven Intervalle“ die n Reize in N Versuchen $k+1$ lückenlos aneinander schließenden Intervallen der t -Skala zugeteilt. Ist die Verteilung über die t -Skala für alle n Reize gleich und nach Standardisierung durch $f(z) dz$ gegeben, so bestimmen sich bei fehlerfreien Versuchen die n Skalenwerte z_{ig}^* und k Klassengrenzen t_g^* aus den beobachteten Mittelwerten m_i^* und Standardabweichungen s_i^* der n N -gliedrigen Stichproben und der beobachteten Häufigkeit p_{ig}^* , mit welcher Reiz i dem Intervall $t < t_g^*$ zugeteilt wird, mittels

$$(1) \quad p_{ig}^* = \int_{-\infty}^{z_{ig}^*} f(z) dz, \quad (2) \quad t_g^* = m_i^* + s_i^* z_{ig}^* \quad (i = 1, \dots, n; \quad g = 1, \dots, k).$$

Bei zufallsfehlerbehafteten Daten sind die beobachteten Werte m_i, s_i, p_{ig} nur Schätzungen der wahren Werte m_i^*, s_i^*, p_{ig}^* , mithin die nach (1) ihnen entsprechenden Werte z_{ig} Schätzungen der z_{ig}^* , und (2) ist i. a. für die beobachteten Werte nicht exakt erfüllbar. Verf. schätzt die $2n+k$ Unbekannten m_i^*, s_i^*, t_g^* nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate durch Minimalisieren von

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{g=1}^k (m_i - s_i z_{ig} - t_g)^2 b^2$$

unter den Nebenbedingungen $\sum_{g=1}^k t_g = k a, \quad \sum_{g=1}^k t_g^2 = k (a^2 + b^2)$ mit beliebigem (Anfangspunkt) a und (Maßeinheit) b . Sodann wird an Stelle dieser exakten Lösung eine vereinfachte approximative hergeleitet. Die formale Identifizierung des Problems der „sukzessiven Intervalle“ mit dem von P. Horst [*Soc. Sci. Res. Council Bull.* **48** (1941)] gelösten Problem der „Matrix unvollständiger Daten“ führt zu einer neuen exakten Lösung für letzteres. Ferner erörtert Verf. den Zusammenhang des vorliegenden Problems und seiner Lösung mit zahlreichen Verfahren anderer Autoren (L. L. Thurstone, M. A. Saffir u. a.).

M. P. Geppert.

Sampford, M. R.: The estimation of response-time distribution. III: Truncation and survival. *Biometrics* **10**, 531—561 (1954).

Teil I, II, *ibid.* **8**, 13, 307 (1952).

Caranti, Elio: Metodi di misura della mortalità infantile. *Bull. Inst. internat. Statist.* **34**, Nr. 3, 326—332 (1954).

Es werden mehrere Formeln verglichen, die mit verschiedenen Korrektionsverfahren die Sterbewahrscheinlichkeit im ersten Lebensjahr angeben, dessen Bestimmung stark von der Veränderlichkeit der Geburtenhäufigkeit gestört ist.

B. de Finetti.

Ferra, Claudio de: Tavola di mortalità per una popolazione inhomogenea. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **17**, 62—76 (1954).

Verf. betrachtet das Sterblichkeitsgesetz einer gemischten Bevölkerung, für deren Bestandteile Makehamsche Gesetze $\mu(x) = a + b e^{\lambda x}$ gelten (mit denselben $\lambda = \lambda_0$ und verschiedenen a und b), und untersucht, wie es mit einer Makehamschen Formel in geeignetem Sinne angenähert werden kann (hauptsächlich bei Festhaltung der Werte von $l(x)$, $l'(x)$ und $l''(x)$ am Anfangsalter $x = x_0$, und von $l(x)$ für ein weiteres $x = x_0 + \tau$). Das approximierende λ wird zuerst im Normalfalle (Gaußsche zweidimensionale Verteilung der a, b) bestimmt (als Funktion von $T = \lambda_0 \tau$ und $\sigma_a, \sigma_b, r_{a,b}$, d. h. der Streuungen und der Korrelation); für eine allgemeine Verteilung ist der so berechnete Wert wesentlich nach Vorzeichen und Größe des dritten Moments $M_{a+b}^{(3)}$ abzuändern [wo $E = (e^T - 1)/T$, $T = \lambda_0 \tau$].

B. de Finetti.

• Bizley, M. T. L. and A. E. Lacey: *Approximate valuation of life assurance and annuity contracts*. Cambridge: Published for the Institute of Actuaries and the Faculty at the University Press 1954, VIII, 108 p. 17 s. 6 d.

Bei diesem Werk handelt es sich um eine Einführung, die sich an Studenten wendet und gut geschrieben ist. Es fehlt nicht der Hinweis, daß die behandelten Näherungsmethoden der Zeit vor Einführung der elektronischen Rechenhilfsmittel angehören. Hauptsächlich werden solche Verfahren behandelt, die allgemein auf Summen der Form $\sum u_i f_i$ anwendbar sind (Henry, Kenchington und Trachtenberg, King, Woolhouse, Gunlake und Hellig, Perks). Zunächst wird jeweils der Grundgedanke auseinandergesetzt, dann die Methode selbst dargelegt und durch ein Zahlenbeispiel (Versicherungsbestand mit Nettoprämien und Leistungswerten) erläutert; dann folgen praktische Hinweise und grundsätzliche Bemerkungen, namentlich über Vorteile und Nachteile des Verfahrens, das natürlich nicht zuletzt mit Rücksicht auf die englischen Rechnungslegungsvorschriften beurteilt wird. Theoretische Untersuchungen über den Fehler des Näherungsverfahrens werden kaum jemals gegeben. Bei den auf Versicherungswerte zugeschnittenen Verfahren (Tappenden, Meier, Jecklin und Zimmermann, Hinweis auf Pöttker) ist die Darstellung noch mehr referierend als in den übrigen Abschnitten. Außerdem wird der approximative Übergang zu neuen Rechnungsgrundlagen mittels verfeinerter Durchschnittskombinationen behandelt. Die Lidstonesche Z-Methode und die wichtigen Approximationen bei Versicherungen mit Invaliditätsrisiko sind nicht Gegenstand des Buches, auch findet man kaum etwas über die in der deutschsprachigen Literatur viel erörterte näherungsweise Zusammensetzung der Versicherungen auf verbundene Leben aus solchen einzelner oder gleichaltriger Leben.

W. Schöbe.

Pöttker, Werner: *Erweiterung einer von Jecklin angegebenen Formel zum Zinsfußproblem*. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 2, 93—96 (1954).

Die von Jecklin (Dies. Zbl. 42, 147) elementar-algebraisch abgeleitete, einfache Zinsfuß-Formel wird von Verf. verallgemeinert, indem er von der Taylor-Entwicklung nach dem Diskontierungsfaktor v des Ausdrucks $1 a_{x:n} - 1 a_n$ ausgeht. Bei Vernachlässigung aller Glieder mit $v^* - v$, v^* Diskontierungsfaktor zu dem neuen Zinsfuß, ergibt sich die Jecklinsche Formel. Vernachlässigung aller in $(v^* - v)$ nicht linearen Glieder ergibt eine Approximation II, in die die Kommutationswerte 2. Ordnung S_x eingehen. Vernachlässigung aller in $(v^* - v)$ mehr als quadratischen Glieder ergibt eine Approximation III mit Kommutationswerten 3. Ordnung $\sum_v S_{x+v}$. Eine Tabelle

zeigt, daß nach der Volkssterbetafel 1924-26 Männer 39% und $v^* - v = 0,01$ (also Übergang zu 4%) die Jecklinschen Werte bei abgekürzten Leibrenten auf 40 Jahre oder weniger durchweg etwas zu hoch sind, und zwar mit absolutem Betrag der relativen Fehler 1 bis zu 0,6%; für lebenslängliche Renten sind sie durchweg zu niedrig mit 1 bis zu 1,4%. Die Approximationswerte II sind fast alle zu niedrig mit 1 bis zu 0,1% bzw. bis zu 0,2%; die Approximationswerte III (Beispiele nur für abgekürzte Renten mit mindestens 40jähriger Dauer und für lebenslängliche Renten) sind durchweg zu hoch mit $|A|$ bis zu 0,04%.

H. Härten.

Schmidt, F. J.: *Valuation of the premium reserve without grouping by age*. Verzekerings-Arch. 31, Bijvoegsel actuar. 1—5 (1954).

Ausgehend von der Hilfszahlmethode mit Ansatz

$$V = C_1 + C_2 a_x + C_3 10^5/D_x + C_4 r^x$$

versucht Verf. nach dem Vorbild von J. Fraisse (Trans. 13th Internat. Congr. Actuaries 1, 53—61, Scheveningen 1951) die Gruppierung nach erreichten Altern zu vermeiden, indem er a_x und $10^5/D_x$ durch lineare Kombinationen von Exponentialfunktionen approximiert, nämlich durch $\sum_1^n a_i s_i^x$ und $\sum_1^n b_i s_i^x$. Wenn von einem be-

stimmten Termin ausgegangen wird, zu dem das erreichte Alter x_1 ist, $x_1 = x - h$, ist

$$V = C_1 + \sum_{i=1}^n C_i'' s_i^h + C_4 r^{x_1} r^h, \quad C_i'' = (C_2 a_i + C_3 b_i) s_i^{x_1}.$$

Verf. rechnet ein Beispiel mit $n = 4$ durch, also mit den 12 Parametern $a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4, s_1, \dots, s_4$. (s_1 und s_4 sind im Beispiel konjugiert komplex.) Benötigt werden 6 Hilfszahlen $C_1, C_1'', \dots, C_4'', C_4$. Verf. macht ferner den vereinfachten Ansatz $s_1 = 0, s_2 = r$, so daß er nur noch 10 Parameter hat und zur Reservebestimmung nur mehr 4 Hilfszahlen nötig sind.

H. Härten.

Estrugo y Estrugo, José Antonio: Einfluß der Aufzinsung des Reservefonds auf die Prämien der Lebensversicherung. *Revista Acad. Ci. Madrid* **48**, 23—32 (1954) [Spanisch].

Crosara, Aldo: La tipicità nella distribuzione dei redditi e l'espeditività di rilevazioni orientative sommarie. *Bull. Inst. internat. Statist.* **34**, Nr. 2, 426—435 (1954).

Das vom Verf. betrachtete (nur halbmathematisch erklärte) Steuergesetz scheint folgendes zu bedeuten: für Einkommen $R > R_0$ (wenn R_0 = steuerfreies Minimum), Steuer = $S = R [1 - (R/R_0)^{\tau-1}]$ (τ = Konst., mit $0 < \tau < 1$) ist τ bei Angabe der gewünschten Steuergesamteinnahme G bestimmt. B. de Finetti.

Cherubino, Salvatore: Sui modelli lineari di equilibrio economico. *Bull. Inst. internat. Statist.* **34**, Nr. 2, 227—238 (1954).

Verf. untersucht, wie das Ergebnis von B. Cameron [*Economic J.* **62**, 191—197 (1952)], betreffend die Gültigkeit der Arbeit-Wert-Theorie in Leontiefs Schema, verändert werden kann bei Abschwächung der Annahmen oder im Entartungsfalle.

B. de Finetti.

Winkler, Wilhelm: Older and newer ways of solving the index numbers problem. *Bull. Inst. internat. Statist.* **34**, Nr. 2, 15—41 (1954).

In wohl erschöpfender Weise zeigt Verf. hier die Entwicklung des Problems der Indexzahlen auf, und zwar unterscheidet er dabei drei Epochen: a) die klassische Epoche, in der die grundlegenden Indexformeln für die Preisrelationen und die Kosten von Güterkombinationen (vor allem die Formeln von Laspeyres, Paasche usw.) aufgestellt werden; b) die Epoche der Mechanisierung und Formalisierung des Index-Problems durch Einführung von a priori-Tests für die Beziehungen und neuer, durch „Kreuzung“ entstandener Indexformeln (z. B. von Irving Fisher); c) die neuere Epoche, die von der Betrachtung der Unveränderlichkeit der sog. „Güterkörbe“ Abstand nimmt und neue Formen der Bildung von Indexzahlen findet (z. B. den sog. Satisfaktions-Index). Verf. diskutiert ausführlich und kritisch die verschiedenen Indexformeln, und zwar speziell vom Standpunkt ihrer wirtschaftlichen Bedeutung aus, der er die größte Wichtigkeit beimißt. Demzufolge werden die mechanisierten Indexformeln von Irving Fisher verworfen, dessen „Idealformel“, wie Verf. bemerkt, glücklicherweise noch als eine gute Annäherung an wirtschaftlich besser begründete Indexformeln, wie z. B. den Geldindex nach Divisia oder den Satisfaktionsindex nach R. Frisch, R. Roy u. a. angesehen werden kann.

G. Wünsche.

Inada, Ken-ichi: Elementary proofs of some theorems about the social welfare function. *Ann. Inst. statist. Math.* **6**, 115—122 (1954).

Davis, Robert L.: Introduction to „Decision processes“. *Decision processes* 1—18 (1954).

In this first chapter of the book entitled „Decision Processes“ one of the editors (the other two are R. M. Thrall and C. H. Coombs) gives a short introduction to the history of the subject and to its treatment in the following 18 chapters. The term of the title is here not restricted to the branch of statistics originated by A. Wald, but extends to formal, normative, and descriptive aspects as well. They are, in various ways, of interest to mathematicians, philosophers, psychologists,

economists and sociologists. While this chapter and the next serve as background and indicate the framework of the book, the later ones are grouped into these parts: I. Individual and social choice (5 chapters), II. Learning theory (3), III. Theory and applications of utility (5), IV. Experimental studies (4). *S. Vajda.*

Goodman, Leo A.: On methods of amalgamation. Decision processes 39—48 (1954).

Let a matrix (u_{ij}) be given, where rows may represent strategies of a player, or social choices. In general, they indicate alternatives, while the columns represent different bases of comparison, e. g. prices. The problem is to amalgamate the bases so as to obtain a „best“ alternative. The author presents a general method of amalgamation as follows: associate with each pair u_{ij}, u_{kj} a number $s(u_{ij}, u_{kj})$ which is positive when u_{ij} is preferred to u_{kj} , negative when the opposite is the case, and zero when neither is preferred. Let $t(x)$ be a non-decreasing function and p_j non-negative for all j . Then row i is better than row k by $\Phi(i, k) = \sum_j s(u_{ij}, u_{kj}) p_j$ and the „utility“ of row i is defined as $\sum_k t[\Phi(i, k)]$. The following special cases are

implied: Bayes solution $s(u, v) = u - v$, $t(x) = x$. Laplace criterion, viz. Bayes solution and also $p_j = a$ (constant). Majority rule $p_j = a$ and $s(u, v) = 1, 0$ or -1 . Copeland solution, viz. Majority rule and also $t(x) = \text{sign } x$. The author considers also a modified Copeland solution where $t(x) = x$ and mentions the minimax principle as a further possible method of amalgamation. *S. Vajda.*

Milnor, John: Games against nature. Decision processes 49—59 (1954).

The author characterizes several criteria (attributed to Laplace, Wald, Hurwitz and Savage respectively) (cf. also previous review) for playing finite games by 10 axioms, such as symmetry, ordering etc. He shows how the various criteria satisfy some sets of axioms and points out that it is impossible for any criterion to have all intuitively desirable properties. He proposes a less restrictive set which he proves can be simultaneously satisfied, though they do not appear to lead to simple computations. *S. Vajda.*

Radner, Roy and Jacob Marschak: Note on some proposed decision criteria. Decision processes 61—68 (1954).

The (slightly generalized) Hurwitz criterion and Savage's minimax regret criterion (see also previous review) are shown to be generalisations of the minimax principle and some objections to them are formulated by showing that each of them contradicts apparently common sense requirements. *S. Vajda.*

Coombs, Clyde H.: Social choice and strength of preference. Decision processes 69—86 (1954).

Vail, Stefan: Alternative calculi of subjective probabilities. Decision processes 87—98 (1954).

Flood, Merrill M.: Environmental non-stationarity in a sequential decision-making experiment. Decision processes 287—299 (1954).

The author reports on an experiment concerning the hypothesis that „behavior is asymptotically pure or mixed according as subjects are or are not convinced of non-stationarity“. (For definitions see the paper.) To test this hypothesis, he compares frequencies of later choices with asymptotic frequencies predicted by the Bush-Mosteller theory (see the following review). The results do not appear to be conclusive. *S. Vajda.*

Bush, Robert R., Frederick Mosteller and Gerald L. Thompson: A formal structure for multiple-choice situations. Decision processes 99—126 (1954).

The paper contains a model of learning, using the concepts of „alternatives“ A_j and „outcomes“ O_k . Let $p(n)$ be a probability vector whose components are the probabilities of the various A_j on the occasion of the n -th trial. For each pair

(A_j, O_k) , called an „event“, an operator T_{jk} is defined such that $p(n+1) = T_{jk} p(n)$. The operators are subject to certain restrictions in view of their intended applications to practical problems and can thus be written $\alpha_{jk} I + (1 - \alpha_{jk}) \cdot 1_{jk}$ where I is an identity matrix and 1_{jk} a matrix all columns of which are the same probability vector. The authors prove „trapping theorems“ which state that as n increases, the probability vector is eventually contained, for all sufficiently large n , within specified regions. Special consideration is given to the case $\alpha_{ij} = \alpha$ (all i, j).
S. Vajda.

Estes, W. K.: Individual behavior in uncertain situations. An interpretation in terms of statistical association theory. Decision processes 127–147 (1954).

The author reports on experiments, the theory of which may be described in terms of that in the paper of the previous review. His own approach which is somewhat different, was explained in papers in Psychol. Rev. vols 57 and 60.

S. Vajda.

Flood, Merrill M.: On game-learning theory and some decision-making experiments. Decision processes 139–158 (1954).

The Bush-Mosteller theory (see two preceding reviews) is combined with game theory to study a succession of games in which a player learns to improve his strategy during a sequence of plays, while the opponent uses the same (mixed) strategy throughout. A Monte Carlo technique is used to investigate the properties of the model and some experimental results are discussed.

S. Vajda.

Debreu, Gerard: Representation of a preference ordering by a numerical function. Decision processes 159–165 (1954).

After pointing out that it is incorrect to assume that if a set X in a finite Euclidean space is completely ordered, it is always possible to define on X a real-valued order-preserving function, the following theorems are proved: If for every $x' \in X$ the sets $\{x \in X \mid x \leq x'\}$ and $\{x \in X \mid x' \leq x\}$ are closed and if the space X is completely ordered and either (i) separable and connected, or (ii) perfectly separable then there exists on X a continuous, real, order-preserving function. S. Vajda.

Hausner, Melvin: Multidimensional utilities. Decision processes 167–180 (1954).

The author is concerned with the concept of utility and defines mixture spaces which can be embedded in vector spaces. He introduces axioms making a mixture space into a non-archimedean utility space, which can be embedded in an ordered vector space.

S. Vajda.

Thrall, Robert M.: Applications of multidimensional utility theory. Decision processes 181–186 (1954).

The axioms of the paper of the previous review are discussed mathematically and from the point of view of interpretation. The author shows that „non-archimedean utilities are perfectly satisfactory for game theory“, and hence also for linear programming problems.

S. Vajda.

Marschak, Jacob: Towards an economic theory of organization and information. Decision processes 187–220 (1954).

Consider a group consisting of n members, and let a set S of „states“ be given. The members are called „rational“, if for every one of them there exists a complete (preference) ordering on S . If, also, there exists a (at least partial) transitive ordering for the group as a whole, and if, whenever state s is not worse than state s' for any member, the same is true of the group (Pareto's optimality principle), the latter is called a „coalition“. (This is the same concept as that in the theory of games.) If the ordering of preferences of a coalition is complete, the author speaks of a „foundation“, and if the ordering of all members of a foundation is identical with that of the group, we have a „team“. Now assume that every member can make an observation of and perform an action on the external world, and send messages about

it, at a cost. The author formalizes these and other ideas and is concerned with determining the „best rule of action and communication“.

S. Vajda.

Bohnert, Herbert G.: The logical structure of the utility concept. Decision processes 221—230 (1954).

A critique of the interpretations of utility theory, without immediate mathematical interest.

S. Vajda.

Hoffman, Paul J., Leon Festinger and Douglas H. Lawrence: Tendencies toward group comparability in competitive bargaining. Decision processes 231—253 (1954).

The authors report on an experiment in competitive bargaining behaviour. In addition to the assumptions of the von Neumann-Morgenstern theory of games it is assumed that the players' concerns for their relative status play a decisive role in the pattern of bargaining and in the emerging coalitions. The results of the experiment seem to support this conclusion.

S. Vajda.

Coombs, C. H. and David Beardslee: On decision-making under uncertainty. Decision processes 255—285 (1954).

The authors present a model concerned with decisions among offers, which consist of amounts to win (prize), amounts to lose (stake) and probabilities of either. It is assumed that the expected utility of an individual, which he wishes to maximize, equals $p^w U_p^* + (1-p) U_s^*$ where p is the probability of winning the prize, U_p^* its utility, and U_s^* the utility of the stake; x, y, z and w are parameters. A pilot experiment has been carried out and it indicates that with increasing stakes subjects tend to prefer offers with greater certainty, even if with smaller utility.

S. Vajda.

Kalisch, G. K., J. W. Milnor, J. F. Nash and E. D. Nering: Some experimental n -person games. Decision processes 301—327 (1954).

The paper is concerned with experiments to shed light on the concepts of the theory of cooperative games (with side payments), and to observe bargaining behaviour itself. Four 4-person, one 5-person and one 7-person games were played repeatedly. Also, a 3-person game without side payments was considered. There was a reasonably good agreement with the value as defined by Shapley (this Zbl. 50, 144) but not such a satisfactory agreement with the concept of strategic equivalence as defined by von Neumann and Morgenstern. As the authors point out, it is difficult to test agreement with the concept of „solutions“ in the von Neumann-Morgenstern theory. They consider also bounds established by J. W. Milnor which the pay-offs of the several players should satisfy.

S. Vajda.

Bellman, Richard, Irving Glicksberg and Oliver Gross: On some variational problems occurring in the theory of dynamic programming. Rend., Circ. mat. Palermo, II. Ser. 3, 363—397 (1954).

The control of a physical system leads to a class of variational problems concerning the expression

$$\|Af + g\|^2 = a \|f\|^2 + \int_0^T [(Af + g, Af + g) - a(f, f)] dt, \quad a > 0$$

where A is a bounded linear operator and f, g belong to $L^2(0, T)$. Here (x, y) stands for the inner product of the vectors x and y . The integral may, for instance, be interpreted as the sum of the cost of deviations and of control of an electrical or also of an economic system. The author shows that a unique $f \in L^2(0, T)$ exists which minimizes the integral, and he exhibits the integral equation which this f satisfies. He turns then to the related problems of obtaining $\min_{\|f\|^2 \leq c} \|Af + g\|^2$ and

$\min_{\|Af + g\|^2} \|f\|^2$. The result may, in particular, be applied to the case where $Af + g =$

$x - c$, x satisfying (*) $dx/dt = Bx + f$, $x(0) = c$ (in matrix notation). Applications to difference and differential-difference equations are hinted at. The next theorem states that the necessary and sufficient condition for the solution of (*) to be non-negative for $t \geq 0$ whenever $f(t)$ and c are non-negative is that $b_{ij} \geq 0$ for $i \neq j$. A problem in economics is shown to be amenable to these techniques. The last two sections are entitled: Quadratic and Linear Functionals and The Functional Max $|1 - u|$. It would be too long to give details of them in this review. (The first section „Introduction“ does not quite fit the subsequent developments.)

S. Vajda.

● **Weinberg, Franz: Termin-Grobplanung. (Über die Anwendung mathematischer Methoden mit spezieller Würdigung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Termin-Grobplanung für differenzierte Fabrikationsprogramme bei vorwiegender Serienfertigung.)** Diss. der ETH Zürich. Zürich: Verlag Leemann 1954. 86 S. u. 23 S. Beilagen.

Eine wissenschaftlich untermauerte „Termin-Grobplanung“ dient zur Bestimmung der Lieferfristen, mit denen — neben Qualität und Preis — der Konkurrenzkampf bestritten wird. Die gesamte „Durchlaufzeit“ t_{zz} eines Auftrages mit der Stückzahl z ist $t_{zz} = t_{rz} + t_{Fz1} + \Delta t_{zz}$ mit den Ansätzen $t_{rz} = (a - b)/z$ (Vorbereitungszeit vor Aufnahme der Fabrikation), $t_{Fz1} = k \cdot L$ (Fertigungszeit des ersten Stückes), $\Delta t_{zz} = (z - 1)(b \ln [z/(z - 1)] + c + dL - b/z)$ (Gesamtstafelzeit = Zeit von Fertigstellung des ersten bis Fertigstellung des letzten Stückes); $a, b, c, d, k = \text{Konstante} > 0$, für die noch zwei Nebenbedingungen gelten: $L = \text{Stücklohn des Auftrages}$. Die Konstanten werden nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Die Streuungsanalyse ergibt stark gesicherte Regression. — Die Werkstattplanung kann nach der sogenannten Durchlaufkurve für jeden einzelnen Auftrag erfolgen. Bei einer größeren Zahl gleichzeitiger Aufträge kann die von der Durchlaufkurve eingeschlossene Fläche durch ein Rechteck mit der Seitenlänge t_{zz} ersetzt werden. Bei noch größerer Zahl braucht die Planung nur nach der Anzahl zu erfolgen. Ob Planung mit „Rechteckapproximation“ oder nach Auftragszahl möglich ist, dafür werden Wahrscheinlichkeitskriterien aufgestellt, ausgehend von der Verteilung der momentanen und der mittleren Lohnintensitäten.

H. Härten.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Kustaanheimo, P. und B. Qvist: Über endliche Geometrien und ihre Anwendung. Nordisk. mat. Tidskrift 2, 137—155 (1954) [Schwedisch].

Gestützt auf Arbeiten von F. W. Levi, Järnefelt und eigene Untersuchungen berichten Verff. über endliche Geometrien über einem Galois-Feld GF_p und insbesondere ihre Anwendung auf eine (z. B. durch die Quantentheorie nahegelegte) endliche Physik. Dazu werden die Begriffe der Ordnung, der Metrik und der Zeit besprochen. — Nennt man in einem GF die quadratischen Reste positiv, so gilt nicht allgemein, daß -1 eine negative Zahl ist und daß die Summe positiver Zahlen stets positiv ist (da 1 positiv ist, müßten $1 + 1$ usw., somit alle Zahlen positiv sein). Es läßt sich aber auf Grund zahlentheoretischer Sätze p so groß wählen, daß bis zu einem beliebigen q die Zahlen $1, \dots, q$ positiv sind, aber -1 negativ ist. Für die Physik wäre etwa $q = 10^{40}$ ausreichend. Beschränkt man sich auf „hinreichend kleine“ Zahlen, so erhält man immer noch ebenso gute Annäherungen wie mit Hilfe einer unendlichen Geometrie. — Da in einem GF jede quadratische Form sich auf $x^2 + y^2 + z^2$ transformieren läßt, braucht nur diese als metrische Grundform berücksichtigt zu werden. Läßt man große Zahlen zu, so kann diese Form Null oder negative Werte

liefern. — Um zum Zeitbegriff zu kommen, kann man entweder von einer vierdimensionalen (endlichen) Geometrie ausgehen oder die dreidimensionale durch eine eindimensionale endliche Geometrie erweitern, der dann nicht notwendig ein Körper, sondern nur ein Ring zugrunde zu legen ist.

H. Gericke.

Wright, Jesse: Quasi-projective geometry of two dimensions. Michigan math. J. 2, 115—122 (1954).

Verf. setzt sich das Ziel, eine der ebenen projektiven Geometrie verwandte Theorie aufzubauen, in der aber nur eine Sorte von Gegenständen vorausgesetzt, also auf die in der projektiven Geometrie übliche Unterscheidung von Punkten und Geraden verzichtet wird. Es wird axiomatisch eine Menge von Elementen a, b, c, \dots angenommen, für die eine Inzidenzrelation $x I y$ erklärt ist. (Die Symmetrie der Relation I wird nicht vorausgesetzt, aber später bewiesen.) Axiome: 1. Die Relation I ist irreflexiv. 2. Jedes Element inzidiert mit mindestens drei anderen Elementen. 3. Zu drei verschiedenen Elementen x, y, z gibt es ein u , so daß $x I u I y$ oder $y I u I z$ oder $x I u I z$ gilt. 4. Sind w, x, y, z verschieden, und gilt $w I x I y I z$, so gilt nicht $w I z$. 5. Sind u, v, x, y, z verschieden, und gilt $u I v I x I y I z$, so gilt nicht $u I z$. — Es wird gezeigt, daß jedes Axiom von den vier anderen unabhängig ist. Sodann wird eine Relation $x D y$ dadurch definiert, daß ein u existiert, so daß $x I u I y$ gilt, und gezeigt, daß sie eine Äquivalenzrelation ist, welche die gegebenen Elemente in zwei Klassen einteilt und mit der Relation I nicht verträglich ist. Zwischen den Elementen der beiden Klassen bestehen dann die projektiven Inzidenzaxiome. Ferner wird eine Relation $x C y$ erklärt durch „weder $x D y$ noch $x I y$ “ und ein Theorem über die Ersetzbarkeit von I durch C bewiesen: Es wird gezeigt, daß alle Sätze, die sich aus den Axiomen 1, 2, 3, 5 beweisen lassen, gültig bleiben, wenn in ihnen I durch C ersetzt wird.

P. Bergau.

Lombardo-Radice, Lucio: L'inversione come dualità nei piani su sistemi cartesiani. Ricerche Mat. 3, 31—34 (1954).

Zu jedem Cartesischen System F erhält man durch Linksrechtsvertauschung ein (duales) Cartesisches System \hat{F} . Ist H die zu F gehörige ebene Geometrie, so wird gezeigt, daß die zu \hat{F} gehörige Geometrie \hat{H} isomorph ist zu der Geometrie, die man aus H durch Punkt-Geraden-Vertauschung erhält. Dieser Satz wurde auch von Lenz (dies. Zbl. 55, 138) in derselben Weise bewiesen, was Verf. erst während der Drucklegung bekannt wurde. Hier wird der Satz dazu benutzt, um Sätze über Transitivitätseigenschaften von einer Geometrie auf die duale zu übertragen.

F. W. Levi.

Hadamard, J.: La géométrie non-euclidienne et les définitions axiomatiques. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5 Suppl. 95—104 und russ. Zusammenfassg. (1954).

Ausgehend von Pascals bekannten Regeln über das Definieren diskutiert der Verf. kritisch die Einführung der geometrischen Grundbegriffe in Legendres *Éléments de géométrie*. Verf. vertritt die Ansicht, daß der Begriff der Bewegung ursprünglicher sei als der Begriff der Geraden, und findet diese Auffassung auch bei Legendre („La ligne droite est celle qui demeure immobile du moment que deux de ces points restent fixes“) und bei Leibniz. Sodann wird geschildert, wie die Entdeckung der Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie das Problem des Definierens geometrischer Grundbegriffe verändert hat.

F. Bachmann.

Kalmár, L.: L'influence de la géométrie de Bolyai-Lobatschewsky sur le développement de la méthode axiomatique. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5 Suppl. 117—125 und russ. Zusammenfassg. 126 (1954).

Verf. schildert, wie sich aus der Entdeckung der Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie die neueren Untersuchungen über die Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit von Axiomensystemen entwickelt haben. Er bespricht die Beweise der Widerspruchsfreiheit

durch Modelle — darunter das Gödelsche Ergebnis über die Unwiderlegbarkeit der Kontinuums-Hypothese —, zeigt die Grenzen der Modell-Methode und berichtet über die Entwicklung von Verfahren — wie der Hilbertschen Beweistheorie —, um Widerspruchsfreiheit „im absoluten Sinne“ zu beweisen. Er diskutiert weiter die Untersuchungen über die Monomorphie und Kategorizität von Axiomensystemen, die nach positiven, aber relativen Resultaten zu im absoluten Sinne negativen Ergebnissen, wie dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz, geführt haben.

F. Bachmann.

Szász, Paul: Elementargeometrischer Beweis der Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie mit Hilfe des Poincaréschen Halbraumes. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 5, 255—260 und russische Zusammenfassg. 261 (1954).

Poincaré gave the following model of hyperbolic geometry in 3-space: Hyperbolic „points“ are points of an open halfspace determined by a fixed plane γ ; „lines“ are semi-circles (resp. rays) orthogonal to γ ; „planes“ are semi-spheres (resp. half-planes) orthogonal to γ . Angles are measured as in Euclidean geometry. If Ξ and H are the endpoints on γ of the semi-circle through P and Q , the hyperbolic length is measured by the double ratio (ΞHPQ) . To prove the consistency of hyperbolic geometry, one has only to check the validity of Hilberts' axiom III₅ (Grundlagen der Geometrie, 7th ed.) in this model, since the other axioms are obviously satisfied.

III₅. If $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, and $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$, then $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$. The author shows that by means of stereographic projections one can construct a triangle $A'B'C'$ (hyperbolic) congruent to ABC such that A' is the Euclidean pole of the semi-sphere through $A'B'C'$; similarly one constructs $A'_1B'_1C'_1$. Now the triangles $A'B'C'$ and $A'_1B'_1C'_1$ together with their semi-spheres are similar in Euclidean geometry; hence the triangles are congruent in the hyperbolic model.

A. Cronheim.

Mihăileanu, N.: Une interprétation de la géométrie de Lobatchewsky sur l'hyperboloïde à deux nappes. *Comun. Acad. Republ. popul. Romine* 4, 579—580 und russ. u. franz. Zusammenfassg. 580 (1954) [Rumänisch].

Die hyperbolische nichteuklidische Geometrie der Ebene wird interpretiert auf der einen Schale eines zweischaligen Hyperboloids. Den Geraden der nichteuklidischen Ebene entsprechen die Schnitte der Hyperboloidschale mit den Ebenen durch den Mittelpunkt des Hyperboloids. Ref. bemerkt, daß dieselbe Interpretation 1942 vom M. Riesz gegeben worden ist in *Lunds Univ. Årsskrift N. F. Afd. 2*, 38, Nr. 9, 74 S.

M. Zacharias.

Neumann, Maria: De l'interprétation de la géométrie de Lobatchewski sur un hyperboloïde. *Acad. Republ. popul. Romine, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz.* 6, 861—868, russ. Zusammenfassg. 868—869 und franz. Zusammenfassg. 869—871 (1954) [Rumänisch].

Verf. führt die Interpretation der ebenen hyperbolischen Geometrie auf einer Schale eines zweischaligen Hyperboloids, die N. Mihăileanu gegeben hat (s. vorstehendes Referat), weiter aus und zeigt insbesondere die Korrespondenz mit der Interpretation von F. Klein.

M. Zacharias.

Blanuša, Danilo: Immersion du cylindre et du plane eucliden dans des espaces sphériques. *Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron.* II, Ser. 9, 161—165 und kroatische Zusammenfassg. 165—166 (1954).

Es ist bekannt, daß man einen mit Riemannscher Metrik der Krümmung Null versehenen Torus (Cliffordsche Fläche) längentreu in einen dreidimensionalen sphärischen Raum S_3 einbetten kann. In vorliegender Arbeit wird gezeigt, daß man auch einen ebensolchen (unendlich langen) Zylinder mit euklidischer Metrik längentreu und singularitätenfrei in S_3 einbetten kann. Ebenso kann man auch die unbegrenzte euklidische Ebene längentreu und singularitätenfrei in den sphärischen Raum S_4 von vier Dimensionen einbetten. Ob man sie in gleicher Weise auch in S_3 einbetten kann, ist eine noch ungelöste Frage; Verf. hält eine solche Einbettung für unmöglich.

K. Strubecker.

Coxeter, H. S. M.: Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **5**, 263—274 (1954).

Wir betrachten die regulären Zerlegungen $\{5, 3, 3\}$, $\{6, 3, 3\}$ und $\{5, 3, 3, 3\}$ des 3-dimensionalen elliptischen und hyperbolischen, bzw. des 4-dimensionalen hyperbolischen Raumes. Die Zelleninkugeln dieser Zerlegungen bilden je eine Kugellagerung, die Zellenumkugeln eine Kugelüberdeckung der genannten Räume. Im Falle der Zerlegung $\{6, 3, 3\}$ handelt es sich um eine Horosphärenpackung bzw. Überdeckung. Es werden die Dichten dieser Kugelsysteme berechnet. Sie stellen vermutlich die dichtesten Kugellagerungen bzw. die dünnsten Kugelüberdeckungen der genannten Räume dar.

L. Fejes Tóth.

Elementargeometrie:

Ulár, Jože: Über eine Art von geometrischen Konstruktionen. *Bull. Soc. Math. Phys. Macédoine* **5**, 61—70 (1954) [Mazedonisch].

Eine für Unterrichtszwecke bestimmte erklärende Darlegung der bekannten, bei der Lösung von geometrischen Konstruktionen benutzten Methode der Verschiebungen und Drehungen in der Ebene.

T. P. Angelitch.

Labra, Manuel: Eigenschaften der Medianen des Sehnenvierecks. *Revista Soc. Cubana Ci. Fis. Mat.* **3**, 79—88 (1954) [Spanisch].

In dem Sehnenviereck $ABCD$ mit den Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ teile eine von A ausgehende Eckenlinie z die Seite BC in die Abschnitte $BA_1 = m$, $A_1C = n$ (A_1 zwischen B und C). Dann ist $b(a(b+c)d)z^2 = n a^2(ab+cd) - m(a b c^2 + a b d^2 + a^2 c d + b^2 c d) - m n b(a b + c d)$. Die Eckenlinie z nennt Verf. eine Mediane des Vierecks, wenn sie den Flächeninhalt halbiert. Die Länge der Mediane ist $z = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 - 2c^2 - 2d^2 - b^2 + (2a b c d + c^2 d)/a^2}$. Verf. berechnet Formeln für die von den vier Medianen auf den Seiten gebildeten Abschnitte und beweist einige Sätze für diese.

M. Zacharias.

● Mohan, P.: Advanced trigonometry. Rev. ed. Allahabad: Ram Narain Lal 1954. 206 p. Rs. 3/8.

Zeuli, Tino: Sulla dimostrazione di alcune formule di trigonometria piana e sferica. *Periodico Mat.*, IV. Ser. **32**, 305—307 (1954).

Sz.-Nagy, Gyula: Konvexes Polyeder als geometrischer Ort. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **5**, 165—167 (1954).

Es sei im euklidischen Raum eine endliche Anzahl von Ebenen vorgegeben, die nicht alle zu einer Geraden parallel sind. Es wird gezeigt, daß der Ort $G(k)$ der Punkte P , deren Abstandssumme $\sum d(P)$ von den Ebenen den konstanten Wert $k = k_0 = \text{Min } \sum d(P)$ annimmt, der Rand eines konvexen Polyeders ist. Der „Kern“ $G(k_0)$ der Orte $G(k)$ ist ein konvexes Polyeder, das auch in ein Polygon, in eine Strecke oder in einen Punkt entarten kann.

L. Fejes Tóth.

Biernacki, Mieczysław: Sur un problème de M. Leja relatif à une fonction des distances entre des points. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A* **7**, 113—119, poln. und russ. Zusammenfassg. 119—120 (1954).

Es seien P_1, \dots, P_m m voneinander verschiedene Punkte von E^n und Q ein willkürlicher Punkt von E^n . Ferner sei $H_m(Q)$ das Produkt der Entfernungen von Q von den Punkten P_i unter Auslassung von P_i . Es wird nach dem Minimum des Ausdrucks

$$H_m(Q) = \sum_{i=1}^m \frac{\Pi_k(Q)}{H_k(P_i)}$$

getragt. Für $n = 2$ hat Leja die Ungleichung $H_m(Q) \geq 1$ bewiesen. Hier wird gezeigt, daß für $n = 3$ $H_m(Q) \geq 1/2^{n-2}$ ist. Ferner wird gesagt, daß für große n die rechte Seite die Größenordnung der Abschätzung richtig gibt.

A. Dinghas.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Narain, Shanti and Ram Behari: A note on classification of quadrics by the matrix method. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 163—167 (1954).

Die vorliegende Note enthält nichts Neues; es wird angegeben, wie man die Quadriken in der euklidischen Geometrie auf Grund von Rangaussagen ihrer Matrix in Typen einteilen kann. *W. Burau.*

G. Rodeja F., E.: Area of the ellipse determined by five tangents. Collect. Math. **7**, 113—119 (1954).

Der Inhalt eines Kreises wird ausgedrückt als Funktion der Inhalte der durch 5 Tangenten bestimmten Dreiecke. Die Formel ist invariant in äquivalenten affinen Transformationen, gilt daher auch für die Ellipse. *M. Zacharias.*

Fempl, Stanimir: Über die Mantelflächen spezieller schiefer Kreiskegel. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. **9**, 191—196 und kroatische Zusammenfassg. 196 (1954).

Es ist bekannt, daß die Mantelfläche M eines schiefen Kreiskegels (mit dem Basishalbmesser r , der Achsenlänge s und dem Neigungswinkel α der Achse gegen die Ebene des Basiskreises sowie der größten bzw. kleinsten Mantellinie s_1 bzw. s_2) sich durch ein elliptisches Integral darstellt, das man in der Form

$$M = 2r\sqrt{s_1 s_2} [(n+1) \Pi_0(n) + E - F]$$

schreiben kann, wo $F, E, \Pi_0(n)$ vollständige elliptische Normalintegrale I., II., III. Gattung der Legendreschen Form sind und $n = (s_1 - s_2)^2 / 4s_1 s_2$ ist. Das vollständige Integral Π_0 kann man durch Kombinationen vollständiger und unvollständiger Normalintegrale I. und II. Gattung ausdrücken und erhält

$$(*) \quad M = 2r\sqrt{s_1 s_2} (E - F \sin^2 \delta/2) + 2r^2 [E_1 F - (F - E) F_1],$$

wobei δ der Winkel im Scheitel des Kegelhauptschnittes ist und

$$(**) \quad \theta = 4 [E_1 F - (F - E) F_1]$$

den ebenen Winkelsektor darstellt, in den der Kegelmantel abgewickelt wird. — In gewissen Fällen vereinfachen sich die Formeln (*) und (**), indem in ihnen nur vollständige elliptische Integrale I. und II. Gattung auftreten. Das geschieht, wie hier gezeigt wird, u. a. in den folgenden drei Fällen: 1. $r = \sqrt{s_1 s_2}$, 2. $r = s_2$, 3. $r^2 = (s_1 + s_2) \sqrt{s_1 s_2 - s_1 s_2}$. Die entsprechenden Vereinfachungen der Formeln (*) und (**) werden ausgerechnet. *K. Strubecker.*

Palman, Dominik: Über eine räumliche kubische Inversion und einige ihrer Erzeugnisse. Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Ser. **12** (Cl. Sci. math. phys. techn. **4**), 103—107 (1954).

Es werden die Eigenschaften einer räumlichen kubischen Inversion untersucht, bei der zwei Punkte einander zugeordnet sind, wenn sie auf Strahlen einer vorgegebenen linearen Strahlkongruenz (hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch) liegen und bezüglich einer vorgegebenen Fläche zweiter Ordnung konjugiert sind. *H. R. Müller.*

Stubban, John Olav: Sur la géométrie de direction. Norske Vid. Selsk. Skr. **54**, Nr. 1, 67 S. (1954).

L'A. se propose d'étendre la géométrie de direction de Laguerre à un espace à un nombre quelconque de dimensions et d'étudier les transformations birationnelles de cette géométrie. Pour définir l'orientation d'un espace R_n à n dimensions, il établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des groupes de $n+2$ points de cet espace et les matrices carrées à $n+1$ lignes, à termes réels, de déterminant égal soit à $+1$, soit à -1 (n est supposé impair). Il définit d'une manière analogue l'orientation des gerbes d'hyperplans et en déduit en particulier celle des droites et des points. L'A. passe ensuite à l'étude de la géométrie de direction dans un espace

cayleyen d'hyperquadrique absolue donnée et s'attache en particulier aux transformations birationnelles conservant la direction. Il termine par une étude analogue dans un espace euclidien.

L. Godeaux.

Niče, V.: Sur les propriétés focales des courbes bicirculaires et de certaines cycloïdes du 4^e ordre. Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Sér. 12 (Cl. Sci. math. phys. techn. 4), 99—102 (1954).

Die Fußpunktcurve f eines Kegelschnittes k (bizirkuläre Kurve 4. Ordnung vom Geschlecht Null) wird projektiv erklärt und verallgemeinert. Die Auffassung von f als Hüllkurve einer Schar von Kreisen, die durch den Doppelpunkt von f gehen und ihre Mittelpunkte auf einem zu k ähnlichen Kegelschnitt l besitzen, führt zu dem Satz, daß die Brennpunkte von f mit denen von l zusammenfallen. Die Brennpunkteigenschaften dieser bizirkulären Kurven 4. Ordnung werden zur Untersuchung von Fußpunktsflächen einer Quadrik (Flächen 4. Ordnung, die zweimal durch den absoluten Kegelschnitt gehen) benützt. Hierbei wird zuerst von Drehquadriken und der speziellen Lage des Pols der Fußpunktfläche auf der Drehachse ausgegangen. Die entstehende Drehzyklide wird von zwei isotropen Kegeln längs des absoluten Kegelschnittes berührt. Durch Führung von Meridianschnitten erkennt man die Zyklide als Einhüllende von Kugeln. Bei allgemeiner Lage des Pols erhält man allgemeine Zykliden, die nicht mehr Drehflächen sind. Die Untersuchung ebener Schnitte läßt erkennen, daß es ebenfalls zwei isotrope Kegel gibt, die längs des absoluten Kegelschnittes berühren. Schließlich werden noch weitere Eigenschaften ebener Schnitte der Zyklide festgestellt.

H. R. Müller.

Niče, Vilko: Die Brennpunktsfläche der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 9, 251—255 und kroatische Zusammenfassg. 255—257 (1954).

Aus dem Plückerschen Konoid werden von seinen Tangentenebenen Kegelschnitte (Ellipsen) ausgeschnitten, deren große Achsen das Netz N der Treffgeraden s der beiden windschiefen und orthogonalen Torsallinien t_1, t_2 der Fläche bilden. Ist $2d$ der Lotabstand dieser Torsallinien (Abstand der beiden Kuspidalpunkte K_1, K_2), so liegen die Brennpunkte F_1, F_2 auf den Strahlen s in der Entfernung d zu beiden Seiten des Schnittpunktes S von s mit der Mittenebene des Netzes N . Die so entstehende Brennpunktsfläche ist eine algebraische Fläche 4. Ordnung, deren Fernkurve in den absoluten Kegelschnitt und eine Doppelgerade zerfällt und welche die Torsallinien des Konoids als Doppelgeraden enthält. Die Brennpunktsfläche schneidet daher das Plückersche Konoid nach einer algebraischen Raumkurve 6. Ordnung.

K. Strubecker.

Algebraische Geometrie:

Masotti Biggiogero, Giuseppina: Sui rami ciclici di curve piane. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 87 (III. Ser. 18), 387—399 (1954).

Als zyklisch wird ein linearer oder superlinearer Zweig (bzw. Differentialelement) einer ebenen Kurve bezeichnet, wenn er eine projektive Transformation in sich zuläßt. Es wird die Gruppe dieser projektiven Automorphismen eines Zweiges oder Elementes bestimmt und es werden daraus geometrische Kennzeichen der Exponenten zweiter Klasse des Zweiges hergeleitet. Zum Schlusse werden die Ergebnisse auf die Erklärung einiger Ausnahmerscheinungen angewandt, die sich bei zyklischen Zweigen ebener Kurven für deren Hessekurven einstellen.

K. Strubecker.

Plattner, P. Anton: Die charakteristische Funktion von Hilbert für Potenzen von Hauptklassenidealen. Monatsh. Math. 58, 103—113 (1954).

In einem Vorwort von W. Gröbner wird auf den Zusammenhang dieser Arbeit mit seiner Untersuchung über das Verhalten der Hilbertfunktion bei rationalen Transformationen hingewiesen (W. Gröbner, dies. Zbl. 55, 148); hängen nämlich zwei H -Ideale

α_x und α_y durch eine rationale Transformation $y_v = \varphi_v(x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit $\text{Grad } \varphi_v = \mu$ für alle v zusammen und ist $u = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, so gilt $H(t; \alpha_y) = H(t; \alpha_x) - H(\mu t; \alpha_x + u^t)$. Die nähere Bestimmung des letzten Ausdrucks setzt die Kenntnis der Hilbertfunktion für Potenzen eines H -Ideals voraus. In dieser Arbeit wird nun die Hilbertfunktion für Potenzen von Hauptklassenidealen unter der Voraussetzung explizit angegeben, daß alle Basisformen des Hauptklassenideals α den gleichen Grad τ besitzen. Verf. geht dazu von der auf van der Waerden zurückgehenden Einführung der Hilbertfunktion aus [s. dazu etwa W. Gröbner, *Moderne algebraische Geometrie*, (dies. Zbl. **33**, 127), § 4] und beweist zunächst die Rekursionsformel

$H(t; (\alpha, \varphi)^e) = H(t; \alpha^e) - H(t - \tau; \alpha^e) + H(t - \tau; (\alpha, \varphi)^{e-1})$ für $\alpha : \varphi = \alpha$ und gewinnt hieraus durch vollständige Induktion die Formel

$$(*) \quad H(t; \alpha^e) = \binom{t+n}{n} - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{e+j-1}{j} \binom{e+r-1}{r-1-j} \binom{t-e\tau-j\tau+n}{n}$$

mit $\binom{m}{n} = \binom{m}{n}$ für $m \geq 0$, bzw. $= 0$ für $m < 0$, $r = \text{Rang } \alpha$. Weiterhin werden noch Formeln für die Koeffizienten h_i bzw. k_i in den Darstellungen $H(t; \alpha^e) = \sum_{i=0}^d h_i \binom{t}{d-i}$ bzw. $H(t; \alpha^e) = \sum_{i=0}^d k_i \binom{t+d-i}{d-i}$ angegeben. Ref. bemerkt, daß der Ausdruck (*) gliedweise mit der klassischen Darstellung der Hilbertfunktion durch Syzygienketten (vgl. etwa W. Gröbner, l. c., S. 197) für diesen Fall übereinstimmt; vermittels der Syzygienketten läßt sich nach der Gröbnerschen Definition (l. c. S. 197) auch leicht zeigen, daß Potenzen von Hauptklassenidealen nicht nur ungemischt, sondern sogar perfekt sind (s. F. S. Macaulay, *The algebraic theory of modular systems*, Cambridge 1916, S. 100, § 93). *B. Renschuch.*

Galbură, Gh.: Sur les variétés canoniques et cycliques caractéristiques d'une variété algébrique. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. **6**, 61—63, russ. u. französ. Zusammenfassg. 63, 63—64 (1954) [Rumänisch].

En utilisant un résultat de Garkrelidzé (ce Zbl. **52**, 405) sur les cycles de Chern [Ann. of Math., II. Ser. **47**, 85—121 (1946)] d'une variété algébrique, ainsi qu'un autre résultat de Todd (ce Zbl. **17**, 87) sur les variétés canoniques d'une variété algébrique, l'A. montre que les variétés canoniques d'une variété algébrique sont des cycles de Chern de cette variété. Ce même résultat a été établi pour deux cas particuliers, par Hodge, en 1951 (ce Zbl. **43**, 173).

Franz. Zusammenfassg.

Malesani, Paolo: Su un criterio per l'esistenza di varietà unisecanti. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. Sez. VII **3**, 55—66 (1954).

Ein System ∞^0 von Γ_r^n , die von einer festen Mannigfaltigkeit W_r^m jeweils in einer Untermannigfaltigkeit Λ_{r-1} geschnitten werden, welche s -fach für die Γ_r^n ist, besitzt sicher dann eine Unisekante, wenn $r + 2 + \{m + n - n/s\}e + (n - n/s)e - (m - n/s)e > 0$ ist. Die Bedingung ist auch notwendig, wenn Λ_{r-1} eine gewisse Allgemeinheitsbedingung erfüllt. Das ist eine Verallgemeinerung eines ähnlichen Satzes von Baldassarri (dies. Zbl. **46**, 385) für den Fall $e = 1$ und kann ebenso dazu benutzt werden, solche Systeme birational auf einfachere zu reduzieren.

W. Gröbner.

Gallarati, Dionisio: Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica. Atti Accad. Ligure Sci. Lett. **10**, 87—96 (1954).

Verf. betrachtet zunächst im dreidimensionalen Raume zwei Flächen F^m, Φ^μ der Ordnungen m, μ , und eine Gerade g , welche für F^m, Φ^μ die Multiplizitäten s, σ hat; es wird weiter vorausgesetzt, daß d (und δ) Punkte von g für F^m (oder Φ^μ) die Multiplizität $s + 1$ (oder $\sigma + 1$) aufweisen; es gibt dann $(\mu - \sigma - \delta)s + (m - s - d)\sigma$ Punkte auf g , wo F^m, Φ^μ sich berühren. Es wird dann der Fall betrachtet, daß F^m und Φ^μ sich längs g berühren in dem Sinne, daß jedes Paar (Punkt P von g — Tangentialebene π in P) von F^m auch der Fläche Φ^μ angehört. — Es folgt die Aus-

dehnung auf zwei Hyperflächen des Raumes S_r der Ordnungen m und μ , die einen S_k gemein haben, mit den Multiplizitäten s , σ ; es wird vorausgesetzt, daß V_{r-1}^m (und V_{r-1}^μ) auf S_k eine V_{k-1}^d (oder eine V_{k-1}^s) als Ort von $(s+1)$ -fachen (oder von $(\sigma+1)$ -fachen) Punkten besitzt. Es gibt dann auf S_k eine Berührungsmannigfaltigkeit von V_{r-1}^m und V_{r-1}^μ , die hier bestimmt wird. — Noch allgemeiner kann man $r-1$ Hyperflächen V_{r-1}^m wie V_{r-1}^μ betrachten: sie berühren sich in einer gewissen Anzahl von Punkten von S_k , die hier bestimmt wird. Als Beispiele: drei V_3 des Raumes S_4 , die eine gemeinsame mehrfache Gerade besitzen (insbesondere berühren sich drei V_3 des Raumes S_4 , die je ∞^2 Geraden enthalten, in 6 Punkten einer dieser Geraden); drei V_3 des Raumes S_4 mit einer gemeinsamen mehrfachen Ebene; usw. .

E. Togliatti.

Burniat, Pol: Superficie algebriche ottuple canoniche di genere geometrico qualunque. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* **16**, 326—331 (1954).

L'A. étudie les surfaces contenant une involution abélienne d'ordre 8, rationnelle et les détermine en construisant la courbe de diramation du plan 8-uple équivalent. Il obtient une surface régulière, puis des surfaces d'irrégularités 1 et 3, contenant des faisceaux irrationnels de courbes. Dans chaque cas, le système canonique pur appartient à l'involution d'ordre 8.

L. Godeaux.

Godeaux, Lucien: Sulla struttura di un punto di diramazione di una superficie algebrica multipla di ordine 31. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. mat. natur.* **87** (III. Ser. 18), 619—626 (1954).

Par l'étude des solutions des équations classiques $l + am = 0 \pmod{31}$, $m + bl = 0 \pmod{31}$, dans le cas $a = 18$, $b = 19$, l'A. détermine la structure d'un point uni d'une involution d'ordre 31 appartenant à une surface algébrique. Le point de diramation correspondant sur la surface image de l'involution est d'ordre 5, son cône tangent est formé successivement d'un plan, d'un cône quadrique, puis de deux plans, chacun ne rencontrant que le précédent et le suivant selon une droite; les sections de ces cônes sont des genres virtuels -2 , -4 , -3 , -2 . *B. d'Orgeval.*

Manara, Carlo Felice: I gruppi ciclici di trasformazioni piane di Jonquières. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.* **87** (III. Ser. 18), 115—129 (1954).

L'A. donne une classification des groupes cycliques finis de transformations de Jonquières (laissant invariant un faisceau de droites) du plan. Il détermine dans chaque cas les équations réduites, complète et corrige les travaux de ses devanciers (Kantor, Wiman, Turri).

L. Godeaux.

Balsimelli, Pio: Breve studio di una trasformazione birazionale dell' S_5 complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale. *Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser.* **19** (91), 171—174 (1953).

L'A. part d'une transformation quadratique donnée dans un plan dont les coordonnées sont des nombres à deux unités. Il lui correspond dans un S_5 une transformation birationnelle du cinquième ordre qui est étudiée.

L. Godeaux.

Balsimelli, Pio: Studio di una trasformazione birazionale dell' S_5 complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale. *Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser.* **20** (92), 273—278 (1954).

L'A. poursuit la note rapportée ci-dessus dans le cas où la transformation quadratique est définie par les coniques passant par deux points et touchant une droite en un de ces points.

L. Godeaux.

Balsimelli, Pio: Una trasformazione quadratica biduale e la relativa trasformazione cremoniana nell' S_5 ambiente della congruenza I' . *Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser.* **21** (93), 25—30 (1954).

L'A. poursuit les notes rapportées ci-dessus en partant d'une transformation quadratique définie par les coniques s'osculant en un point.

L. Godeaux.

Fadini, Angelo: Studio di una trasformazione cremoniana dell' S_8 dedotta da una trasformazione quadratica dell' S_2 triduale avente i tre punti eccezionali coincidenti. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. **20** (92), 324—334 (1954).

Spampinato, Nicolò: Un modello proiettivo dell'ente algebrico ∞^{r-1} dell' S_r complesso ottenuto con l'algebra dei numeri $(r+1)$ -duali. Giorn. Mat. Battaglini **82** (V. Ser. 2), 359—377 (1954).

L'A. considère une hypersurface algébrique dans un espace S_r complexe et remplace les coordonnées par des nombres à $r+1$ unités dont il donne la table de multiplication. Le prolongement de l'hypersurface dans l'espace ainsi déterminé [espace $(r+1)$ -dual d'après la terminologie de l'A.] donne une variété de dimension $r^2 + 2r - 2$, dans l'espace à $R = 2r^2 + 2r - 1$ dimensions, lieu de ∞^{r-1} espaces à $r^2 + r - 1$ dimensions. D'une transformation birationnelle de S_r , il déduit une transformation unirrationnelle de S_R .
L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: Varietà determinata da una coppia ordinata di ipersuperficie dell' S_r complesso. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. **20** (92), 58—65 (1954).

Die hier beschriebene Mannigfaltigkeit $V_{2r-1}^{n^2}$ eines Raumes S_{2r+1} mit $2r+1$ Dimensionen, wo die Punktkoordinaten $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{r+1}, y_{r+1}$ genannt werden, ist der Schnitt folgender zwei Hyperflächen der Ordnung n : $f(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0$; $(\partial f / \partial x_1) y_1 + \dots + (\partial f / \partial x_{r+1}) y_{r+1} + g(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0$. Die erste ist ein S_r -Kegel, die zweite hat die Kegelspitze der ersten als $(n-1)$ -fachen Raum; die Schnitt- V_{2r-1} ist Ort von ∞^1 Räumen S_r , die die Spitze des Kegels $f=0$ in Räumen S_{r-1} durchschneiden. Es gibt zwei besondere Fälle zu betrachten: in dem einen ist $g=0$ mit $f=0$ gleichbedeutend; im anderen ist g identisch Null. Man findet ein solches Paar von Hyperflächen in der komplexen Darstellung einer algebraischen Hyperfläche des projektiven bidualen Raumes, d. h. desjenigen Raumes, wo die Punktkoordinaten biduale Zahlen $a + b\varepsilon$ sind (a, b gewöhnliche komplexe Zahlen, und $\varepsilon^2 = 0$).
E. Togliatti.

Spampinato, Nicolò: Le falde t -dimensionali analitiche, algebriche ed* unirazionali di un S_r supercomplesso. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. **20** (92), 147—152 (1954).

Die ersten Begriffe und Definitionen über die analytischen Kurvenzweige eines projektiven komplexen r -dimensionalen Raumes, und über ihre Ausdehnung auf analytische Mannigfaltigkeiten mit t Dimensionen, werden hier für projektive hyperkomplexe Räume kurz zusammengefaßt. Man hat so Kurvenzweige $\mu_j = \mu'_j + c_{j1}\sigma + c_{j2}\sigma^2 + \dots$ ($j = 1, \dots, r-1$) oder allgemeiner t -dimensionale Reihenentwicklungen (1) $\mu_j \in \mathbb{Z}_j(\sigma_1, \dots, \sigma_j)$, wo alle Veränderlichen und Koeffizienten einer beliebigen kommutativen und irreduziblen komplexen Algebra der Ordnung n angehören. Es werden Ursprung und Tangente eines Zweiges definiert. Zweige, die auf (1) liegen, betrachtet, usw.
E. Togliatti.

Spampinato, Nicolò: Su alcune varietà dell' S_{11} determinate dall'algebra triduale come sotto-algebra dell'algebra dei numeri doppio-biduali. Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser. **21** (93), 10—24 (1954).

Partant d'un plan projectif dont les coordonnées sont des nombres à trois unités dont il donne la table de multiplication, l'A. fait correspondre à une courbe algébrique plane d'ordre n et de classe m une variété à six dimensions, d'ordre $2(m+1)n$, lieu de $\infty^1 S_3$, dans un espace S_{11} . Il étudie les propriétés de cette variété.
L. Godeaux.

Spampinato, Nicolò: Su alcune varietà dell' S_{23} complesso determinate dall'algebra dei numeri quadriduali come sottoalgebra dei numeri triplo-biduali. Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser. **21** (93), 57—78 (1954).

L'A. considère un S_3 projectif dont les coordonnées sont des nombres à 4 unités dont la table de multiplication est donnée. Il fait correspondre à une surface algé-

brique de cet S_3 une variété V à 13 dimensions, lieu de $\infty^2 S_{11}$, dans un espace S_{21} . Il étudie cette variété et la variété à 16 dimensions obtenue lorsque la surface donnée dans S_3 varie.

L. Godeaux.

Spampinato, N.: La varietà V_{22} dell' S_{39} complesso determinata da una V_3 dell' S_4 prolungata nell' S_4 cinqueduale. Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser. **21** (93), 181—196 (1954).

L'A. part d'un espace S_4 dont les coordonnées sont des nombres à 5 unités de table de multiplication donnée. A une hypersurface algébrique de S_4 correspond dans un espace S_{39} une variété à 22 dimensions, lieu de $\infty^3 S_{19}$. Etude de cette variété.

L. Godeaux.

Kinematik:

• **Geronimus, J(a). L.:** P. L. Tschebyschew. Lösung kinematischer Probleme durch Näherungsmethoden. Übersetzt aus: Skizzen über die Arbeiten russischer Koryphäen der Mechanik. Berlin: VEB Verlag Technik 1954. 64 S., 38 Bilder, kart. DM 4.—.

Die vorliegende Schrift gibt eine kurze Lebensbeschreibung von Tschebyschew und berichtet über verschiedene Arbeiten von ihm: Über verschiedene Methoden zur Approximation von Kurven, über den „zentrifugalen Ausgleich“ (Zentrifugalregulatorproblem), über genäherte und genaue Geradführungen und weitere Probleme der Mechanik. Eine Gesamtverzeichnis der Tschebyschewschen Arbeiten bildet den Abschluß.

W. Meyer zur Capellen.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Strubecker, Karl: Alcune applicazioni della geometria differenziale dello spazio isotropo. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 322—331 (1954).

Verf. gibt einen Überblick über die in zahlreichen Arbeiten von ihm entwickelte Differentialgeometrie des isotropen Raumes in zusammenhängender Darstellung. Die vielen Anwendungen, z. B. auf Paare parallel zugeordneter ebener Kurven und verschiedene Vierecksatzes, auf flächentreue Abbildungen in der Ebene, auf Potentialflächen als Minimalflächen des isotropen Raumes lassen die Bedeutung dieser Geometrie erkennen, für die zahlreiche Analoga zur gewöhnlichen und relativen Differentialgeometrie (z. B. Minimalflächen) aufgeführt werden.

W. Süss.

Nevanlinna, Rolf: Die konformen Selbstabbildungen des euklidischen Raumes. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **19**, 133—139 (1954).

Der übliche Beweis der Tatsache, daß der R^n ($n \geq 3$) als einzige konforme Selbstabbildungen die Ähnlichkeitstransformationen und die Transformationen durch reziproke Radien zuläßt, stützt sich auf die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie. Verf. gibt einen direkten Beweis, der diese Gleichungen nicht benutzt. Dabei wird von vektoriellen Differentialen Gebrauch gemacht, welche die Formelsprache der Differentialgeometrie wesentlich vereinfachen. Verf. hat in den letzten Jahren auf dieser Grundlage die Differentialgeometrie und die Theorie der Tensorfelder auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten in Vorlesungen entwickelt. Wegen der Grundbegriffe s. Nevanlinna, dies. Zbl. **51**, 343; **55**, 97.

G. Doetsch.

Semin, F.: Note sur les dérivées invariantes. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **19**, 175—179 (1954).

Analog wie bei W. Blaschke (Differentialgeometrie I, 4. Aufl., Berlin 1945, 5. Kapitel) im Netz der Krümmungslinien werden hier in einem beliebigen Kurvennetz einer Fläche des euklidischen dreidimensionalen Raumes invariante Parameter eingeführt. Hierfür werden die Vertauschungsregel und einige Formeln abgeleitet. Als Beispiel folgt eine Aussage über Tschebyscheff-Netze.

M. Burner.

Semin, F.: Sur une propriété caractéristique des surfaces à courbure moyenne constante. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **19**, 140—147 (1954).

Eine Kurve einer Fläche des euklidischen dreidimensionalen Raumes wird G -Linie genannt, falls die Normalebene durch die Kurventangente die Fläche in einer Kurve schneidet, die im zugehörigen Kurvenpunkt einen in dritter Ordnung (vierpunktig) berührenden Kreis besitzt. Auf der Kugel, der Ebene und den Rotationszylindern sind alle Kurven G -Linien. Abgesehen hiervon gibt es durch einen Punkt einer Fläche drei G -Linien. Zwei G -Linien einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bilden nie einen rechten Winkel miteinander, sondern vielmehr einen Winkel von 120° . Gilt dies umgekehrt für je zwei G -Linien, so hat die Fläche konstante mittlere Krümmung. [Die Ergebnisse folgen z. B. unmittelbar aus W. Blaschke, *Differentialgeometrie I*, 4. Aufl., Berlin 1945, § 60, (145) mit (146).]

M. Barner.

Marussi, Antonio: Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superficie. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **16**, 478—483 (1954).

Mittels des Tensorkalküls, also auf leicht verallgemeinerungsfähige Weise, wird die Änderung berechnet, die die geodätische Krümmung einer auf einer Fläche verlaufenden Kurve bei allgemeiner Abbildung auf eine andere Fläche erleidet. Hierbei tritt ein Tensor der Relativkrümmung bezüglich der Flächenabbildung in Erscheinung. Das Ergebnis wird speziell auf die Fälle geodätischer, flächentreuer und winkeltreuer Abbildung angewandt; es stellt eine Verallgemeinerung des Theorems von Schols dar, das die Änderung der geodätischen Krümmung bei konformer Kartenprojektion zu bestimmen erlaubt.

F. Löbell.

Rembs, Édouard: Déformabilités des calottes convexes à bande sphérique de bord. *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 852—854 (1954).

Ein konvexes Flächenstück werde von einem sphärischen Flächenstreifen berandet. Ein solches Flächenstück ist starr gegenüber einer infinitesimalen Verbiegung, die seinen Randstreifen wieder in einen sphärischen Streifen überführt. Der Beweis hierfür benutzt Hilfsmittel des Blaschkeschen Beweises für die Starrheit einer Eifläche und erfolgt hier unter der Bedingung, daß der Mittelpunkt der Kugel des Randstreifens entweder auf keiner Tangentenebene liegt oder höchstens auf einer in dem Falle, daß er auf der Fläche selbst liegt. Verf. weist darauf hin, daß sich diese Zusatzbedingung ausschalten läßt.

W. Süss.

Saban, G.: Fonctions duales implicites et résultats géométriques qui en découlent. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **19**, 148—153 (1954).

Die Note enthält einige Präzisierungen von Ergebnissen einer Arbeit von M. Kula (dies. Zbl. **48**, 390), die von jenen synektischen Linienkongruenzen handelt, deren Strahlen auf der dualen Einheitskugel $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$ durch monogene (oder nach Study) synektische Gleichungen $F(X_1, X_2, X_3) = 0$ dargestellt werden können. In dualen geographischen Koordinaten U, V nimmt $F = 0$ die Gestalt der dualen Gleichung $H(U, V) = 0$ an. Verf. zeigt, daß eine synektische Kongruenz nur dann entsteht, wenn der Realteil von F nicht verschwindet; im Gegenfall erhält man zylindrische Kongruenzen. — Nach M. Kula besitzt eine Schar synektischer Kongruenzen, die von einem dualen Parameter abhängt, eine synektische Kongruenz als Hülle. Auch dieser Satz kann präzisiert werden.

K. Strubecker.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Čech, E.: Remarques au sujet de la géométrie différentielle projective. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **5** Suppl., 137—143 und russ. Zusammenfassg. 144 (1954).

In una serie di Memorie (v. questo Zbl. **41**, 90; **52**, 385; recensione susseguente) l'A. ha creato e studiato la teoria differenziale generale delle trasformazioni,

con particolare riguardo alla teoria differenziale proiettiva delle trasformazioni tra spazi lineari. A questa teoria appartiene la teoria della deformazione proiettiva delle congruenze di rette. Nel presente lavoro, che riproduce una conferenza tenuta dall'A., questo, dopo aver ricordato in modo chiaro, benchè necessariamente breve, la teoria della deformazione proiettiva della superficie iniziata da G. Fubini e studiata successivamente da E. Cartan, pone in evidenza come le sue ultime ricerche diano un contenuto veramente geometrico ed intuitivo alla precedente teoria.

E. Bompiani.

Čech, Eduard: *Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces*. IV—VIII. Czechosl. math. J. **2** (77), 149—165, 167—187, 297—330 (1952). **3** (78), 123—136 (1953). **4** (79), 143—172 (1954) und französ. Zusammenfassg. **2**, 165—166, 188, 230—331, **3**, 136—137, **4**, 172—174 [Russisch].

IV. Ce Mémoire se décompose en deux parties bien différentes l'une de l'autre. Aux nos. 1—3 on démontre que les correspondances entre deux espaces projectifs S_3 et S'_3 considérées au Mémoire III (I—III v. ce Zbl. **41**, 90; **52**, 385) de cette série coïncident avec les correspondances jouissantes de la propriété suivante: Il existe une congruence de droites L dans S_3 et une congruence de droites L' dans S'_3 telles que, R étant une surface réglée arbitraire contenue dans L , son image R' dans S'_3 soit une surface réglée contenue dans L' telle que l'image d'une courbe asymptotique quelconque de R soit une courbe asymptotique de R' . Aux nos. 4—9, on considère une autre espèce de correspondances entre S_3 et S'_3 qui jouissent de la propriété qu'une certaine congruence de droites L contenue dans S_3 soit transformée dans une congruence de droites L' contenue dans S'_3 . La particularité envisagée s'énonce comme il suit. Pour chaque point A de S_3 , il existe une homographie tangente K de la correspondance donnée telle que, pour chaque droite q issue de A , la droite K -linéarisante de q ne dépende que du plan pq , où p est la droite de la congruence L qui contient le point donné A . On prouve que la correspondance envisagée transforme chaque droite p de la congruence L dans la droite correspondante de L' par une projectivité π (dépendante de p) qui porte chaque foyer de L contenu dans p dans le foyer correspondant de L' . On démontre que la propriété énoncée suffit à caractériser les correspondances envisagées si les deux familles de développables de L sont distinctes l'une de l'autre. Le cas où la congruence L ne possède qu'une seule famille de développables est bien plus compliqué, la propriété énoncée plus haut n'étant ici plus suffisante, néanmoins, l'A. réussit ici encore de donner une caractérisation géométrique complète de toutes les correspondances considérées. Malheureusement, ce qui a été dit jusqu'à présent n'est pas vrai que si aucune surface focale de L ne dégénère pas dans une courbe, dans ce cas exceptionnel, le Mémoire ne contient pas des résultats définitifs. — V. Ce Mémoire commence l'étude de telles correspondances entre deux espaces projectifs S_n et S'_n qui sont des enveloppes d'une famille ∞^s ($s \leq n$) d'homographies. On prouve d'abord que le cas $s = 1$ ne donne que les correspondances déjà considérées au Mémoire I de cette série, § 24. Ensuite, on passe à considérer le cas $n = 3$, $s = 2$. On prouve d'abord qu'il existe dans S_3 une congruence de droites L portée par la correspondance dans une congruence de droites L' . Pour chaque droite p de L , il existe une homographie $K(p)$ qui est une homographie tangente. La correspondance transforme les foyers et les plans focaux de L dans les foyers et les plans focaux de L' . Trois cas sont à distinguer: (1) cas où L possède deux familles distinctes de développables, (2) cas où les deux familles coïncident, (3) cas où toutes les droites de L passent par un point fixe. Dans les trois cas on détermine la généralité des correspondances envisagées et l'on donne une description des propriétés géométriques caractéristiques de la correspondance ce qui, cependant, n'est pas fait d'une manière complète dans le cas où les deux familles de développables de L étant distinctes, une nappe focale dégénère dans une courbe. — VI. Appelons couche d'hypersurfaces une famille d'hypersurfaces d'un espace linéaire S_n à n

dimensions remplissant simplement une région de S_n . Si une correspondance entre S_n et S'_n porte la couche σ dans la couche σ' , on l'appelle une déformation projective de la couche σ lorsque pour chaque couple A, B de points correspondants de S_n, S'_n , il existe une correspondance homographique K entre S_n et S'_n jouissant de la propriété suivante: Soit C une courbe quelconque de S_n passant par A , H l'hyper-surface de σ passant par A , C' l'image de C par la correspondance donnée, KC l'image de C par l'homographie K , alors il doit toujours avoir lieu, en B , un contact analytique entre C' et KC qui est du premier ordre, en général, mais qui devient du second ordre dans le cas où C est située sur H . On dit aussi que l'homographie K réalise la déformation projective de la couche σ . Au Mémoire présent l'A. traite et résout complètement le problème de la détermination de toutes les correspondances qui soient des déformations projectives de deux couches différentes σ_1, σ_2 simultanément (le cas de plus que deux couches est impossible pour une correspondance non homographique). Il se montre qu'on peut toujours supposer que ce soit la même homographie K qui réalise la déformation de σ_1 et de σ_2 , d'où il résulte sans peine que les correspondances cherchées sont contenues parmi celles déterminées aux Mémoires II et III de cette série. Plus précisément, le problème actuel est résolu, d'une part, par celles de correspondances déterminées au § 19 du Mémoire II, pour lesquelles la transformée dualistique de l'hypersurface désignée par (C) à l'endroit cité soit une surface à deux dimensions contenant une famille ∞^1 de lignes asymptotiques, et d'autre part, par toutes les correspondances déterminées aux §§ 27, 31, 32 et 33 du Mémoire III. On en déduit, en particulier, que toutes les correspondances trouvées au Mémoire III contiennent une famille (ou même deux) ∞^1 de déformations projectives de surfaces réglées, ce qui est particulièrement remarquable pour les correspondances de III, § 27, liées à une déformation projective d'une surface non réglée. Comme résultat très particulier mais digne d'être mentionné, indiquons encore la détermination de toutes les correspondances entre S_n et S'_n pouvant être décomposées, en deux manières distinctes (le cas de plus que deux étant encore impossible), en une famille ∞^1 de correspondances homographiques entre hyperplans. — VII. Au Mémoire VI de cette série l'A. a déjà défini la notion de déformation projective d'une couche σ d'hypersurfaces de l'espace S_n . Nous savons que cette notion comprend les cas trivial d'une correspondance entre S_n et S'_n qui se laisse décomposer en ∞^1 homographies d'hyperplans: ce cas trivial est exclu dans ce qui suit. Pour chaque point A de S_n , soit K l'homographie réalisante la déformation; K n'est pas déterminée sans ambiguïté, mais, pour chaque choix de K , toutes les droites passant par A et contenues dans l'hyperplan τ tangent en A à l'hypersurface correspondante de la couche σ , sont des droites K linéarisantes au sens de Mémoire I. Si l'on peut, pour chaque position de A , arranger le choix de K de telle façon que, pour chaque droite p passant par A (qui ne soit pas K -principale), la droite K linéarisante de p soit toujours contenue dans l'hyperplan τ , nous dirons que la déformation projective de la couche σ est spéciale. La couche σ s'appelle parabolique si, en premier lieu, chaque hypersurface appartenante à la couche σ est enveloppe de ∞^1 hyperplans et que, deuxièmement, la transformée dualistique de la famille de toutes les ∞^2 hyperplans tangents aux hypersurfaces de la couche est une surface sur laquelle les transformées dualistiques des hypersurfaces de la couche forment une famille de lignes asymptotiques (courbes ou droites). L'A. prouve: Seulement les couches paraboliques sont susceptibles d'une déformation projective non singulière. Chaque couche parabolique de l'espace S_n admet des déformations projectives non spéciales et telles déformations d'une couche parabolique donnée dépendent de $2n + 2$ fonctions arbitraires d'un argument. — VIII. Au Mémoire VII de cette série l'A. a donné les théorèmes d'existence pour les déformations projectives des couches d'hypersurfaces de l'espace S_n (définies au Mémoire VI), en excluant les déformations que l'on a nommé spéciales,

où on peut choisir l'homographie tangente K de telle manière que, pour chaque point A de l'espace S_n , l'homographie K -linéarisante A transforme chaque droite de l'étoile A (qui ne soit pas K -principale) dans une droite située dans l'hyperplan K -principal. Ce sont précisément les théorèmes d'existence relatifs aux déformations spéciales qui font l'objet du Mémoire présent. L'A. a exclu d'ailleurs le cas où les hypersurfaces principales soient des hyperplans ainsi que le cas où, en chaque point A de S_n , il y ait deux hyperplans K -principaux différents, car ces deux cas ont été déjà traités au Mémoire VI. L'A. donne aussi une classification de tous les cas possibles basée sur la manière dont se comporte l'homographie K -linéarisante A (le choix de K étant supposé fait de façon expliquée plus haut). Commençons par le cas où la couche dont la déformation projective (spéciale) forme le sujet d'investigation (c'est-à-dire la couche d'hypersurfaces K -principales) soit composée d'hypersurfaces enveloppes de ∞^1 hyperplans: pour $n \geq 4$, c'est l'unique cas possible. Il se trouve que, comme dans le cas de déformations non spéciales, la couche déformée est nécessairement parabolique. Pour $n = 3$ on doit encore étudier les déformations projectives des couches de surfaces non développables. On trouve que de telles déformations existent et que l'on doit distinguer deux cas, car les déformations projectives des surfaces dont se compose la couche peuvent être du type R_0 ou du type R en suivant la notion classique de Fubini et Čech. On trouve que dans le cas R_0 les déformations dépendent de neuf fonctions arbitraires d'un argument, et dans le cas R de dix. Des derniers résultats seront approfondis plus tard. W. Wrona.

Muracchini, Luigi: *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 360—366 (1954).

Data una trasformazione puntuale T fra due piani sovrapposti, l'A. considera la corrispondenza dualistica D in cui ad ogni punto A corrisponde la relativa retta principale (ossia la retta che congiunge A col suo corrispondente \bar{A} in T), la proiettività (detta principale) fra la punteggiata $A\bar{A}$ ed il fascio di centro A subordinata da D (nell'intorno del 1° ordine), le ∞^1 curve cui sono tangenti le rette principali nei punti A (curve principali). Considera poi la curva L luogo dei punti A per cui la proiettività principale è degenere. Ma L è pure luogo dei flessi delle curve principali ed è pure la jacobiana (nel piano punteggiato) di D . E ancora: L è il luogo dei punti A per cui la proiettività subordinata fra i fasci A, \bar{A} da T è una prospettività. — La curva L è indeterminata se (e solo se) le curve principali sono rette (che risultano unite per T). Le trasformazioni T per cui la relativa curva L è indeterminata sono di uno dei due tipi: $\bar{x} = x, \bar{y} = f(x, y); \bar{x} = F(x, \lambda), \bar{y} = \lambda \bar{x} + f(\lambda), y = \lambda x + f(\lambda), \lambda$ parametro. Per le trasformazioni del 1° tipo, v. questo Zbl. 39, 383. — Un punto unito di T è doppio almeno per L ed è punto singolare per l'equazione differenziale delle curve principali (e di ciò ci si potrebbe valere per classificare i punti uniti di T). — Vengono determinati riferimenti proiettivi intrinseci nella coppia (A, \bar{A}) considerando la conica C luogo dei punti intersezione di rette corrispondenti nella proiettività \mathcal{D} fra i fasci A, \bar{A} subordinata da T e i punti uniti delle omografie tangenti in (A, \bar{A}) a T (punti che appartengono a C). Se \mathcal{D} è una prospettività, fra le omografie tangenti, vi è un'omologia la cui caratteristica è un invariante proiettivo del 1° ordine di T (nel caso generale non esistono invece invarianti proiettivi del 1° ordine). — L'A. ottiene, col metodo del riferimento mobile, il sistema dei sei invarianti proiettivi fondamentali di T e dimostra che due trasformazioni che abbiano coppia per coppia gli stessi intorno del 2° ordine sono omograficamente identiche. Si considerano infine le trasformazioni T per cui le curve principali sono caratteristiche. M. Villa.

Villa, Mario: *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali.* Compositio math. 12, 137—146 (1954).

Si consideri una trasformazione puntuale T_1 fra piani, rappresentata nell'intorno dei punti corrispondenti O, \bar{O} con gli sviluppi:

$$\bar{x} = x + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots, \quad \bar{y} = y + \psi_2 + \psi_3 + \dots$$

(φ_i, ψ_i polinomi omogenei di grado i in x, y) e sia T_2 una seconda trasformazione la quale osculi T_1 nell'intorno di ordine s della coppia (O, \bar{O}) : nella rappresentazione analitica di T_2 i termini fino all'ordine s coincidono coi corrispondenti di T_1 , mentre i successivi hanno espressioni diverse $\bar{\varphi}_{s+1}, \bar{\psi}_{s+1}$ ecc. L'A. chiama corrispondenza linearizzante di (T_1, T_2) quella corrispondenza (algebraica di indici $1, s+1$) che nel fascio di centro O , alla direzione (x, β) associa la (x', β') così definita:

$$\alpha' = \varphi_{s+1}(\alpha, \beta) - \bar{\varphi}_{s+1}(\alpha, \beta), \quad \beta' = \psi_{s+1}(\alpha, \beta) - \bar{\psi}_{s+1}(\alpha, \beta).$$

Le sue rette unite sono le $s+2$ direzioni di operosculazione di (T_1, T_2) in (O, \bar{O}) (v. questo Zbl. **31**, 272). Se T_2 coincide con una delle omografie tangenti a T_1 in (O, \bar{O}) oppure con una delle trasformazioni quadratiche osculatrici, si ottengono rispettivamente le già note corrispondenze linearizzanti del 2° e 3° ordine per la T_1 in (O, \bar{O}) ; facendo uso del riferimento mobile, l'A. costruisce le coppie di forme quadratiche e cubiche che definiscono dette corrispondenze.

P. Buzano.

Nicolescu, Alexandru: Un invariant projectif. Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat. **5**, 225—234, russ. u. français. Zusammenfassg. 233. 234 (1954) [Rumänisch].

On considère dans le plan, l'invariant projectif $I_a = (M T_1^{3/\gamma_1}) : (M T_2^{3/\gamma_2})$ où γ_1, γ_2 sont les rayons de courbures dans les points T_1, T_2 de deux courbes C_1, C_2 et M est le point d'intersection des tangentes en T_1 et T_2 à C_1 et C_2 . On montre en premier lieu que l'invariant $I_a + (I_a)^{-1}$ est un invariant du groupe projectif général (homographies et corrélations) et puis comment la transformation de Legendre $X = y', Y = x y' - y$ joue un rôle important dans la formation de certains invariants projectifs. On donne ensuite une interprétation géométrique du théorème de Sophus Lie qui dit que chaque équation (1) $y'' = f(x, y, y')$ peut être réduite à l'équation (2) $y'' = 0$ par une transformation de contact en montrant qu'à chaque équation (1) on peut associer un groupe de transformations de contact. Pour l'équation (2) ce groupe est donné par les formules $X Y' = Y = q(x y' - y, y'), Y' = p(x y' - y, y')$

G. Vranceanu.

Bell, P. O.: Projective Frenet formulas for an analytic curve in n -dimensional space. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A **10**, 83—93 (1954).

L'A. considera una curva di S_n descritta dal punto $x_0(t)$ e assume un riferimento locale in cui valgano gli sviluppi: $z^r = a_p^r + \sum a_i^r (z^1 - h)^i$ ($r = 2, \dots, n$) con le condizioni: $h = 0, a_p^r = \delta_p^r$ ($p = 0, 1, \dots, n-2$), $a_{n+3}^{n-1} = 0, a_{n+3}^n = 1$. Valendosi di formule di derivazione già ottenute in altro lavoro (questo Zbl. **30**, 71) e detti x_1, \dots, x_n gli n punti che con x_0 concorrono a formare il semplice di riferimento, calcola in funzione delle a_i^r i coefficienti del sistema di equazioni differenziali $dx_i/dt = \gamma_i^h x_h$ che costituiscono le formule proiettive di Frenet per la data curva.

P. Buzano.

Vaona, Guido: Proprietà proiettivo-differenziali di sistemi di curve, superficie o varietà. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **9**, 373—380 (1954).

L'A. si trattiene su alcune nozioni che applicherà in altre ricerche. Dato uno strato di superficie nello spazio proiettivo S_3 (cioè famiglia ∞^1 di superficie tale che per ogni punto, di una certa regione, passa una sola superficie della famiglia) considera in un punto P la proiettività tangenziale, cioè la proiettività tangente in P alla trasformazione dualistica che si ottiene facendo corrispondere ad ogni punto di S_3 il piano ivi tangente alla superficie dello strato passante per esso. Si determina la condizione affinché la proiettività tangenziale nel punto generico sia degenerare e

si osserva che la proiettività tangenziale di uno strato di superficie (non sviluppabili) in P subordina l'involuzione delle tangenti coniugate in P relativa alla superficie dello strato per P . Dimostra inoltre che: Le due omografie prodotto della proiettività tangenziale in P e della proiettività di Darboux in P (relativa alla superficie S dello strato per P) che si hanno nella stella di centro P e nel piano π tangente in P ad S , sono omologie armoniche aventi rispettivamente π per piano d'omologia e P per centro d'omologia. L'asse dell'omologia armonica che si ha nella stella di centro P è intrinsecamente determinato dallo strato. — Anche per una congruenza di curve dell' S_3 si considera, in un punto P , la proiettività osculatrice, cioè la proiettività tangente in P alla trasformazione dualistica che si ottiene facendo corrispondere ad ogni punto di S_3 il piano ivi osculatore alla curva della congruenza passante per esso. Si determina la condizione affinché la proiettività osculatrice nel punto generico sia degenerare. Si considerano brevemente altri enti relativi alla congruenza e si accenna ad estensioni agli strati di ipersuperficie di S_r , ai sistemi ∞^h di V_h di S_r .
M. Villa.

Marcus, F.: Sur les surfaces isothermes-asymptotiques. Acad. Republ. popul. Romine, Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz. 6, 819—820, russ. u. französ. Zusammenfassg. 820-821 (1954) [Rumänisch].

L'A. démontre la proposition: Les surfaces dont les congruences décrites par l'une des droites du premier faisceau canonique sont stratifiables dans un sens, la congruence stratifiante étant celle décrite par la droite correspondante du deuxième faisceau, sont les surfaces isothermes-asymptotiques. A ce sujet voire aussi T. Mihăilescu, Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 1, 374—392 (1950).

Gh. Th. Gheorghiu.

Finikov, S. P.: Zum Problem der Stratifizierung eines Paares von Komplexen. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 1 (59), 125—130 (1954) [Russisch].

Der Begriff des stratifizierten Paares von Strahlenkongruenzen, der sich auf eine Flächenschar bezieht, wird mittels einer Kurvenschar auf Strahlenkomplexe erweitert. Ein Paar von Komplexen wird ein stratifiziertes Paar genannt, wenn für eine gegebene Kurvenschar die Schmiegenebenen der Kurven in ihren Schnittpunkten mit einem Strahl des einen Komplexes durch den entsprechenden Strahl des anderen Komplexes hindurchgehen, und umgekehrt. Diese Verallgemeinerung ist ganz natürlich: denn ein stratifiziertes Kongruenzenpaar hat, wie man leicht sieht, die entsprechende Eigenschaft, wenn man als Kurvenschar die Asymptotenlinien der gegebenen Flächenschar nimmt. Um dieses Komplexpaar in der projektiven Geometrie analytisch zu behandeln, benutzt Verf. ein Tetraeder als Bezugssystem, von dem zwei Scheitelpunkte A_1 und A_2 auf einem Strahl des einen Komplexes liegen, während die anderen beiden Scheitelpunkte A_3 und A_4 auf dem entsprechenden Strahl des anderen Komplexes liegen. Dann kann die infinitesimale Übertragung $dA_i = \omega_i^k A_k$ des Bezugssystems wegen $\omega_2^3 = \omega_1^4$ normiert werden, und die vorgegebenen Kurvenscharen können durch die Differentialgleichungen $\omega_1^4 = \mu \omega_1^3$, $\omega_2^4 = \nu \omega_1^3$, bzw. $\omega_1^4 = \mu' \omega_1^3$, $\omega_2^4 = r' \omega_1^3$ dargestellt werden. So bekommt man auf Grund der ersten Eigenschaft des stratifizierten Komplexenpaares die drei Gleichungen:

$$\omega_2^3 + \mu \omega_1^2 = 0, \quad \mu \omega_3^1 + \nu \omega_4^1 = 0, \quad \omega_2^2 - \omega_1^1 = 0 \pmod{\omega_1^4 = \mu \omega_1^3, \omega_2^4 = \nu \omega_1^3}$$

mit Ausnahme von abwickelbaren Flächen des ersten Komplexes (wobei $\mu^2 - \nu = 0$), und auf Grund der zweiten (umgekehrten) Eigenschaft noch drei Gleichungen, welche in denselben Formen mit den Koeffizienten μ' und r' an Stelle von μ und ν geschrieben werden können. Wenn die Funktionen μ und ν gegeben sind, dann ist der erste Komplex beliebig wählbar, der zweite aber durch drei Funktionen zweier Argumente bestimmt. Speziell ergibt sich ein gemeinsamer tangentialer linearer Komplex für die einander entsprechenden Strahlen $[A_1 A_2]$ und $[A_3 A_4]$ des Komplexpaares. Die letzte Eigenschaft entspricht einer bekannten Eigenschaft des stratifizierten Paares von Strahlenkongruenzen.
A. Kawaguchi.

Izmajlov, W. D.: Über ein System von Pseudotensoren auf zweidimensionalen Flächen affiner Räume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 9–12 (1954) [Russisch].

Verf. hat früher (dies. Zbl. **48**, 155) angegeben, wie man eine invariante Geometrie auf der Fläche X_2 in einem affinen Räume E_n , wo $n = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$, $k = 2, 4, 6, \dots$, aufbauen kann. Jetzt verallgemeinert er diese Methode, um auf X_2 in E_n , bei beliebiger Dimension n , die Objektfelder zu erlangen, die man für die Einführung der hinsichtlich der allgemeinen affinen Gruppe invarianten, affinen Übertragung auf X_2 anwenden kann. W. Wrona.

Sun, Peng-Wang: Introduction to differential geometry of curves and surfaces in a four dimensional symplectic space. Acta math. Sinica **4**, 395–444 und engl. Zusammenfassg. 444 (1954) [Chinesisch].

In this paper, the differential geometry of curves and hypersurfaces in a four dimensional symplectic space is studied by means of moving frames of E. Cartan. It is shown that in general a curve has a quadratic invariant differential form, called the symplectic arc element, and three fundamental differential invariants $\lambda, \mu = 0, \varrho$, in terms of which Frenet's formulas together with existence and uniqueness theorems are expressed. Curves with constant invariant λ are also discussed. In the theory of hypersurfaces, the author first introduces two fundamental forms and then obtains existence and uniqueness theorems. C. C. Hsiung.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Janenko, N. N.: Zur Theorie der Einbettung von Flächen in den mehrdimensionalen Euklidischen Raum. Trudy Moskovsk. mat. Obsč. **3**, 89–180 (1954) [Russisch].

Diese Arbeit, eigentlich eine ziemlich umfangreiche Abhandlung, behandelt ausführlich die Theorie der Einbettung von Flächen (Räumen) V_m in den höherdimensionalen Euklidischen Raum E_{m+q} . Der Verf. geht dabei von den Resultaten aus, die er in seiner Diss. (1948) erhalten hat (vgl. dies. Zbl. **40**, 239). Im ersten Teil (4 Kapitel) wird eine ausführliche algebraische Einführung gegeben, die sich auf gewisse Fragen aus der Tensorrechnung und aus der Theorie der Cartanschen Formen, welche weiter benutzt werden, bezieht. Der zweite Teil (6 Kapitel) dient zur Darstellung von neuen Resultaten, wobei allerdings auch die früher erhaltenen Resultate wiederholt werden. Es ist daher schwer zu entscheiden, was hier an neuen Resultaten mitgeteilt wird. — Zuerst wird die Frage der Verbiegbarkeit von V_m in Verbindung mit drei numerischen Invarianten: Rang, Typ und Klasse dieser Räume untersucht. Dabei wird der Typ anders als bei Allendörfer (dies. Zbl. **21**, 158) definiert. Man unterscheidet zwei Verbiegungsarten: die Mitverbiegung, wenn die isometrische Abbildung $V_m \sim \tilde{V}_m$ (beide aus E_{m+q}) durch die Verbiegung von zwei, diese Räume umgebende Räume ($V_{m+\sigma} \sim V_{m+\tau}$), induziert wird; und die Eigenverbiegung, wenn sie nicht als Folge der Verbiegung umgebender Räume betrachtet werden kann. Die Untersuchungen des Verf. beziehen sich gerade auf die Klasse solcher eigenverbiegbaren Flächen. Er führt eine Reihe von Kriterien an, welche diese Eigenschaft festlegen, z. B. daß die Klasse der eigenverbiegbaren Flächen die Struktur der abwickelbaren Flächen besitzt. Als besonders charakteristische Eigenschaft der abgeleiteten Kriterien betont der Verf. ihre projektive Invarianz. Er leitet dabei eine Beziehung zwischen den metrischen und projektiven Eigenschaften der Flächen eines mehrdimensionalen Euklidischen Raumes ab und zeigt, daß Rang und Typ der Fläche, welche den Charakter der Einbettung bestimmen, als projektive Invarianten erscheinen. T. P. Angelitch.

Bott, Raoul: On manifolds all of whose geodesics are closed. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 375–382 (1954).

M_n sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ und der Klasse 3. Es gebe in M_n einen Punkt p , so daß alle Geodätischen, die durch p hindurchgehen, einfach geschlossene Kurven derselben Länge w sind. Ist $g(s)$, $-\infty < s < \infty$, die auf die Bogenlänge s bezogene Parameterdarstellung einer durch $p = g(0)$ gehenden Geodätischen, so bezeichne λ die Anzahl der gemäß ihrer Vielfachheit gezählten konjugierten Punkte von $g(s)$ im Intervall $0 < s < w$. Es wird nun weiter vorausgesetzt, daß λ für alle durch p gehenden Geodätischen denselben Wert habe. Mit Hilfe der Morseschen Theorie und der Lerayschen Spektralfolgen gelangt Verf. zu folgendem Ergebnis: 1. Ist $\lambda = 0$, so ist die Ordnung der Fundamentalgruppe von M_n gleich 2, und der universelle Überlagerungsraum von M_n ist eine Homologiesphäre. 2. Ist $\lambda > 0$, so ist M_n einfach zusammenhängend. Der ganzzahlige Kohomologiering der M_n läßt sich in verhältnismäßig einfacher Weise beschreiben. Hieraus folgt unter anderem, daß $\lambda + 1$ ein Teiler von n ist und daß $\lambda + 1 = n$ wird, wenn $\lambda + 1$ ungerade ist.

W. Rinow.

Willmore, Thomas J.: Quelques propriétés locales et globales des espaces riemanniens harmoniques. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. **52**, 89–95 (1953).

Nach E. T. Copson und H. S. Ruse [Proc. Roy. Soc. Edinburgh **60**, 117–133 (1940)] heißt eine Riemannsche Mannigfaltigkeit V_n harmonisch, wenn die Laplacesche Gleichung $\Delta_2 U = 0$ für jeden Punkt P_0 eine Lösung besitzt, die nur von dem geodätischen Abstand s eines variablen Punktes P von P_0 abhängt. Verf. macht darauf aufmerksam, daß die Theorie der Lieschen Gruppen geeignet ist, Aufklärung über die Struktur der harmonischen Räume zu gewinnen und berichtet über Ergebnisse, die er selbst und A. J. Ledger gewonnen haben. Der Ausgangspunkt für ihre Untersuchungen sind die Ergebnisse von H. C. Wang (dies. Zbl. **35**, 297; **48**, 405) über kompakte zusammenhängende metrische Räume mit folgender Homogenitätseigenschaft: Sind a, b, c, d vier Punkte, für deren Abstand $\varrho(a, b) = \varrho(c, d)$ gilt, so existiert eine Isometrie, die a in c und b in d überführt. Es wird gezeigt, daß alle diese von H. C. Wang bestimmten Räume harmonisch sind. Ferner wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß symmetrische Riemannsche Räume harmonisch sind. Schließlich können auf diese Weise noch Aussagen über die erste Bettische Zahl gewonnen werden. Die Beweise sind skizziert.

W. Rinow.

Ledger, A. J.: Harmonic homogeneous spaces of Lie groups. J. London math. Soc. **29**, 345–347 (1954).

Über den Inhalt dieser Mitteilung gibt bereits das vorstehende Referat Auskunft.

W. Rinow.

Hua, Loo-Keng: On the Riemann curvature of the non-Euclidean space of several complex variables. Acta math. Sinica **4**, 143–168 und engl. Zusammenfassg. 169–170 (1954) [Chinesisch].

Let $(z) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z_k = x_k + i y_k$, x_k, y_k real, \mathfrak{D} a domain in the $2n$ real dimensional space. Given a finite or infinite sequence of functions q_0, q_1, \dots , each q_i analytic in \mathfrak{D} . It is assumed that first, no two q_i have a common zero, and secondly, the series $K(z, \bar{z}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q_{\alpha}(z) \overline{q_{\alpha}(z)}$ is uniformly convergent in every compact subset of \mathfrak{D} (the bar indicates complex conjugate values). Introduce the Hermitian form $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_i \partial_j \log K(z, \bar{z}) dz_i d\bar{z}_j$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$, as the fundamental metric form of a geometry. The main purpose of this paper is to prove that this space has Riemannian curvature $R \leq 2$, and moreover, 2 is the best possible upper bound. The extreme cases are discussed. The above result contains as a special case, Fuks' theorem [Analytic functions of several complex variables (this Zbl. **40**, 190), p. 424]. It should be mentioned that in this paper: i) no restriction is imposed on the domain \mathfrak{D} , such as being bounded or simply connected, ii) the sequence q_i does not have to be orthogonal or

complete, iii) only elementary theorems of several complex variables are used, and iv) $2 - R$ is expressed as a sum of squares. (This is a brief translation of the author's introduction.)

Y. W. Chen.

Dalla Volta, Vittorio: Sulla geometria differenziale dello spazio delle matrici simmetriche. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **37**, 291—332 (1954).

Diese Arbeit gibt einen Beitrag zur Differentialgeometrie (im Kleinen) einer hermiteschen Metrik, die eine Verallgemeinerung der hyperbolischen Metrik von Poincaré $ds^2 = y^{-2} dz d\bar{z}$ auf der Halbebene $y > 0$ der komplexen Veränderlichen ist und in der Theorie der modularen Abelschen Funktionen von p (≥ 1) komplexer Veränderlichen auftritt. Diese hermitesche Metrik ist definiert mit Hilfe der positiv-definiten hermiteschen Form $ds^2 = \text{tr}(Y^{-1} dZ Y^{-1} d\bar{Z})$, wo $Z = X + iY$ eine komplexe symmetrische quadratische Matrix der Ordnung $p \geq 1$ darstellt, und es werden diejenigen Punkte Z in Betracht gezogen, für die die Matrix Y stets eine positiv-definite quadratische Form ist. Der Verf. nennt den Raum der symmetrischen Matrizen mit der oben genannten Metrik einen Raum von Siegel-Hua [C. L. Siegel, Amer. J. Math. **65**, 1—86 (1943); L. K. Hua, dies. Zbl. **34**, 157] (Siegel und Hua benutzen hier das Wort „symplectic“ in einem anderen Sinne, als heute üblich). Im ersten Teil bestimmt der Verf. die durch die Metrik von Siegel-Hua induzierte kontinuierliche Gruppe G von Bewegungen mit der maximalen Zahl r ($\leq p(2p+1)$) von Parametern. Die Elemente z_{ij}, \bar{z}_{ij} der Matrizen Z, \bar{Z} sind dabei als die (lokalen) Koordinaten des Raumpunktes angenommen; dann ist die Metrik von Siegel-Hua von hermitescher Art: $ds^2 = 2 g_{AB} d\bar{z}^A dz^B$, und besitzt die Kählersche Eigenschaft, d. h. es gibt eine solche Funktion Φ mit reellen Werten, daß $g_{AB} = \overline{g_{AB}} = \partial^2 \Phi / (\partial \bar{z}^A \partial z^B)$. Hierbei ist $\bar{z}^A = \overline{z^A}$ (= konjugiert-komplexer Wert von z^A), und A, B, \dots bzw. A, B, \dots durchlaufen die Werte $1, 2, \dots, p(p-1)/2$ bzw. $1, \bar{2}, \dots, p(p-1)/\bar{2}$, welche den symmetrischen Wertepaaren $(1, 1), (1, 2), \dots, (p, p)$ bzw. $(1, 1), (1, 2), \dots, (p, p)$ entsprechen. g_{AB} ist ein homogener quadratischer Ausdruck in den y_{ij} . Deshalb kann man den Tensorkalkül anwenden, und so findet der Verf. das oben erwähnte Ergebnis durch die übliche Benutzung der Killingschen Gleichungen im Kählerschen Raume. Im zweiten Teil werden die zweidimensionalen Flächenelemente der Krümmung Null untersucht. Diese Untersuchung, die ihren Ursprung in dem Buch von F. Conforto (Funzioni abeliane modulari, Vol. I, dies. Zbl. **45**, 109) hat und dann von B. Segre im Fall $p = 2$ zu Ende geführt worden ist (siehe Kap. II, S. 242 des Buches von F. Conforto), wird vervollkommen, indem man die Flächenelemente in bezug auf die Gruppe G charakterisiert und eine geometrische Konstruktion für sie angibt. A. Kawaguchi.

Wakakuwa, Hidekiyo: On n -dimensional Riemannian spaces admitting some groups of motions of order less than $n(n-1)/2$. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 121—134 (1954).

Verf. knüpft an Untersuchungen von K. Yano an (vgl. dies. Zbl. **51**, 393). Zunächst wird gezeigt, daß ein n -dimensionaler Riemannscher Raum V_n ($n \neq 5$) keine intransitive Bewegungsgruppe der Ordnung r gestattet, wenn $\frac{1}{2}n(n-1) < r \leq \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) - 3$ ist, und daß bis auf endlich viele Dimensionszahlen n auch keine solche transitive Bewegungsgruppe existiert. Für große n kann V_n ebenfalls keine transitive Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-1)$ gestatten. Dagegen besitzt V_n ($n \neq 3$) dann und nur dann eine intransitive Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}n(n-1)$, wenn entweder V_n lokal das Produkt einer Geraden und eines Raumes konstanter Krümmung ist oder in V_n eine Schar von ∞^1 totalen Nabelhyperflächen konstanter Krümmung existiert, deren Orthogonaltrajektorien Geodätische sind. Schließlich werden noch gewisse Aussagen über die Struktur jener V_n gemacht, die intransitive Bewegungsgruppen der speziellen Ordnungen $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2) + 1$ und $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ gestatten.

W. Barthel.

Ishihara, Shigeru: Groups of isometries of pseudo-hermitian spaces. I. Proc. Japan Acad. **30**, 940—945 (1954).

Verf. überträgt die von K. Yano gewonnenen Ergebnisse über Bewegungsgruppen Riemannscher Räume (vgl. dies. Zbl. **51**, 393) auf pseudo-hermitesche Mannigfaltigkeiten: Eine Gruppe G von hermiteschen Isometrien eines $2n$ -dimensionalen pseudo-hermiteschen Raumes M hat maximal die Dimension $n^2 + 2n$. Weiterhin ist G transitiv auf M ($n \geq 2$), wenn ihre Dimension $\geq n^2 + 2$ ist. Im Fall $n \geq 3$, $n \neq 4$ existiert keine Gruppe von hermiteschen Isometrien der Dimension r mit $n^2 + 2n - 1 > r > n^2 + 2$. Schließlich wird ausführlich die Struktur jener pseudo-hermiteschen Räume untersucht, die eine transitive Isometriegruppe der Dimension $n^2 + 2n$, $n^2 + 2n - 1$ bzw. $n^2 + 2$ gestatten. W. Barthel.

Hiramatu, Hitosi: Groups of homothetic transformations in a Finsler space. Tensor, n. Ser. **3**, 131—143 (1954).

Damit eine infinitesimale Transformation $\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x) dt$, $\bar{x}'^i = x'^a + \bar{x}^i / \partial x^a$ eines N -dimensionalen Finsler-Raumes (im Cartanschen Sinn) eine (infinitesimale) Ähnlichkeitstransformation ist, ist notwendig und hinreichend: (*) $g_{ja} \xi^a_{;k} + g_{ak} \xi^a_{;j} - 2 C_{jka} \xi^a_{;b} x'^b - g_{jk} \cdot \text{const.}$ Hieraus werden Eigenschaften r -parametrischer Gruppen von Ähnlichkeitstransformationen hergeleitet. Weiter folgt, daß eine Ähnlichkeitstransformation eine Affinität ist, d. h. jede Geodätische wieder in eine geodätische Linie transformiert. Schließlich werden die Integrabilitätsbedingungen von (*) aufgestellt. Daraus folgt u. a., daß nur die euklidischen Räume eine Gruppe von Ähnlichkeitstransformationen der Maximalordnung $\frac{1}{2}N(N+1) + 1$ gestatten. W. Barthel.

Hiramatu, Hitosi: On some properties of groups of homothetic transformations in Riemannian and Finslerian spaces. Tensor, n. Ser. **4**, 28—39 (1954).

Für jede r -parametrische Gruppe G_r von (infinitesimalen) Ähnlichkeitstransformationen eines N -dimensionalen Riemannschen Raumes R_N ist die maximale Untergruppe M_{r-1} von Bewegungen ein Normalteiler der Ordnung $r-1$ und G_r/M_{r-1} ist isomorph der multiplikativen Gruppe der positiven Zahlen. Hieraus werden einige Eigenschaften von Ähnlichkeitsgruppen hergeleitet. Weiterhin erlaubt der genannte Satz, bekannte Eigenschaften über Ordnungen von Bewegungsgruppen (vgl. etwa Yano, dies. Zbl. **51**, 393) auf Gruppen von Ähnlichkeitstransformationen zu übertragen: In einem R_N ($N = 4$) existiert keine Ähnlichkeitsgruppe der Ordnung r mit $\frac{1}{2}N(N+1) + 1 > r > \frac{1}{2}N(N-1) + 2$, und eine Ähnlichkeitsgruppe der Ordnung $\frac{1}{2}N(N-1) + 2$ ist transitiv. Dabei gestattet ein R_N ($N > 4$, $N \neq 8$) dann und nur dann eine Ähnlichkeitsgruppe der Ordnung $\frac{1}{2}N(N-1) + 2$, wenn er euklidisch ist. Schließlich gibt Verf. an, welche der behandelten Sätze auf Finslersche Räume übertragen werden können. W. Barthel.

Sasaki, Shigeo: On the influence of the topological structure of Riemannian manifolds upon their holonomy groups. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 135—148 (1954).

Etant donnée une variété différentiable V_n , le but de l'A. est de déduire d'hypothèses topologiques sur V_n des restrictions concernant les groupes d'holonomie de toutes les métriques riemanniennes portées par V_n . L'A. réenonce, dans cette optique, un certain nombre de résultats classiques dus à G. de Rham, Iwamoto, Lichnerowicz et lui-même. Puis il s'intéresse à la décomposition du groupe homogène restreint σ en produits kroneckeriens et parvient au résultat suivant qui est le principal résultat de ce travail: si V_n est une variété compacte, simplement connexe, qui n'est pas un produit topologique et si n est impair ou si, n étant pair, les conditions topologiques classiques d'une variété pseudokählerienne ne sont pas satisfaites, le groupe d'holonomie σ de toute métrique riemannienne sur V_n (groupe qui est irréductible dans le réel et dans le complexe, donc semi-simple) est simple pour n premier ou pour $n > 4$ et $b_4(V_n) = 0$ ou pour $n > 8$ et $b_8(V_n) = 0$. En particulier le groupe σ d'une sphère homologique S^n est simple pour $n \geq 2$ et $\neq 4$ (ces

résultats peuvent être déduits des résultats plus précis de Marcel Berger sur la structure des groupes d'holonomie des variétés riemanniennes simplement connexes irréductibles).

A. Lichnerowicz.

Kobayashi, Shôshichi: Des groupes linéaires irréductibles et la géométrie différentielle. Proc. Japan Acad. **30**, 934—936 (1954).

Dans une première partie, l'A. envisage les espaces homogènes G/H (G effectif) dont le groupe linéaire d'isotropie \tilde{H} est irréductible. Soit G et \underline{H} les algèbres de Lie de G et H , H_0 la composante connexe de e de H . Si \tilde{H} est irréductible et si \underline{H} est réductive dans G (au sens de Koszul) le normalisateur connexe $N(H_0)$ de H_0 dans G coïncide avec H_0 . Il en résulte que pour G et \underline{H} réductives dans G et \tilde{H} irréductible, G est semi-simple. Il en est en particulier ainsi pour un espace homogène G/H à G compact et \tilde{H} irréductible. Une seconde partie rappelle des résultats dus au rapporteur sur les liaisons entre groupe linéaire d'isotropie et groupe d'holonomie d'une variété riemannienne V irréductible; l'A. note seulement que les résultats sont valables que V soit homogène ou non, ce qui est évident.

A. Lichnerowicz.

Borel, Armand: Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 1147—1151 (1954).

Verf. berichtet, mit kurzen Beweisandeutungen, über die Bestimmung aller Kleinscher Räume mit halbeinfacher Liegruppe, die eine (bei dieser Gruppe) invariante komplex-analytische Kählersche Struktur besitzen. Daneben werden auch Kleinsche Räume mit invarianter symplektischer Struktur betrachtet. Die Resultate lauten: Hat G/U eine invariante Kählersche Metrik oder ist G kompakt und besitzt G/U eine invariante symplektische Metrik, so ist U kompakt, zusammenhängend und Zentralisator eines Torus in G , ferner G/U einfach zusammenhängend und das Zentrum von G gleich $\{1\}$. Ist, umgekehrt, G halbeinfach kompakt und $U \subseteq G$ Zentralisator eines Torus in G , so ist G/U algebraisch, besitzt eine invariante Kählersche Metrik und gestattet eine komplex-analytische Zerlegung in offene Zellen, die birational-biregulär äquivalent sind mit komplexen affinen Räumen. Insbesondere sind dann die ganzzahligen Homologiegruppen von G/U torsionslos. Alle Kleinschen Räume G/U mit halbeinfacher Gruppe G und invarianter Kählerscher Metrik sind Produkte von solchen Räumen G_i/U_i mit einfachen G_i und Zentralisatoren U_i von Toren, wobei G_i entweder kompakt ist oder eine maximale kompakte Untergruppe mit nichtdiskrettem Zentrum hat. Jeder Raum dieser Art besitzt eine komplex-analytische Faserung mit Faser K/U (K maximal-kompakte Untergruppe in G) über einem Hermiteschen symmetrischen Raum. Als Anwendung hiervon wird gezeigt: Jedes beschränkte Gebiet des komplexen n -dimensionalen Raumes mit einer halbeinfachen transitiven Gruppe von komplex-analytischen Homöomorphismen auf sich ist symmetrisch im Sinne von É. Cartan.

B. Banaschewski.

Hermann, Robert: Sur les automorphismes infinitésimaux d'une G -structure. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1760—1761 (1954).

L'A. généralise les résultats d'une Note antérieure (ce Zbl. **56**, 411) et en rectifie une erreur. Soient V une variété différentiable, G un sous-groupe fermé du groupe linéaire général $GL(n, R)$. On appelle G -structure sur V une restriction différentiable à G du groupe structural de l'espace fibré des vecteurs tangents à V et G -connexion une connexion dans l'espace des repères de la G -structure. L'A. établit un lemme relatif à un automorphisme infinitésimal η d'une G -connexion en supposant G réductif dans $GL(n, R)$ et en déduit des conditions suffisantes sous lesquelles η est aussi un automorphisme infinitésimal de la G -structure. Enfin, il démontre le théorème suivant: supposons V compacte, à deuxième nombre de Betti nul, munie d'une G -connexion, G étant contenu dans le groupe orthogonal unimodulaire. Alors tout groupe connexe d'isométries de la métrique riemannienne associée est un groupe d'automorphismes de la G -structure.

A. Borel.

Tandai, Kwoichi: On areal spaces. VII. The theory of the canonical connection and m -dimensional subspaces. Tensor, n. Ser. 4, 78–90 (1954).

(Teil VI, dies. Zbl. 51, 396.) Verf. beabsichtigt, die Geometrie des arealen Raumes auf ähnliche Weise wie die der Finsler- und Cartan-Räume zu begründen. Unter einem arealen Raum versteht man einen Raum, in dem der m -dimensionale Flächeninhalt durch das m -fache Integral $\int \dots \int_{(m)} F \left(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^i} \right) du^1 \dots du^m$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$) einer vorgegebenen Funktion F definiert wird (s. z. B. A. Kawaguchi, dies. Zbl. 44, 371, 372; Terminologie und Bezeichnungen wie in den dort besprochenen Arbeiten des Ref.). Dazu führt Verf. den metrischen Tensor g_{ij} als Lösung eines algebraischen Gleichungssystems ein, das in den bekannten Spezialfällen (Riemann, Finsler, Cartan) durch g_{ij} immer erfüllt wird. Im allgemeinen Fall ist jedoch die Eindeutigkeit der Lösung nicht gesichert, es kann viele (im allgemeinen komplexe) Lösungen geben. Wenn g_{ij} eine Lösung ist, dann sind seine Konjugierten g_{ij} , sowie $\varepsilon^k g_{ij}$ und $\varepsilon^k g_{ij}$ (ε m -te Einheitswurzel) auch Lösungen. Die Gesamtheit dieser Lösungen heißt eine Klasse metrischer Tensoren $\{g_{ij}\}$, und die Lösungen des algebraischen Gleichungssystems werden in Klassen eingeteilt. Dann zeigt Verf. mittels der Methode des Ref. und des Verf. (dies. Zbl. 49, 263), daß der Zusammenhang durch das System $\{g_{ij}\}$ eindeutig bestimmt ist. Die Krümmungs- und Torsionstensoren werden ausgerechnet und einige interessante Sätze angegeben. Am Ende behandelt Verf. die Theorie der m -dimensionalen Flächen, in der die beiden Arten des Zusammenhangs (der induzierte und der intrinsische) im allgemeinen nicht übereinstimmen.

A. Kawaguchi.

Yano, K. and E. T. Davies: On the connection in Finsler space as an induced connection. Rend., Circ. mat. Palermo, II. Ser. 3, 409–417 (1954).

Galvani (this Zbl. 44, 373) and Deicke (this Zbl. 51, 130; 64, 164) have proved that the connexion in an n -dimensional Finsler space can always be regarded as the connexion that in a U_{2n-1} [(2 n – 1)-dimensional metric and asymmetric space] is induced in an X_{2n-1}^n . The authors, using the results of their paper this Zbl. 56, 399 prove the same for an X_{2n}^n in a U_{2n} and moreover that the torsion tensor in the U_{2n} can be chosen more freely than in the case of a U_{2n-1} .

J. A. Schouten.

Kuiper, Nicolaas H.: Locally projective spaces of dimension one. Michigan math. J. 2, 95–97 (1954).

Es wird eine vollständige Klassifikation aller lokal projektiven Mannigfaltigkeiten der Dimension 1 mitgeteilt. Bemerkenswerterweise gibt es abzählbar viele verschiedene Typen, die durch eine ganzzahlige Invariante charakterisiert werden können.

W. Rinow.

Graiff, Franca: Formule di commutazione e trasporto ciclico nei recenti spazi di Einstein. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 87 (III. Ser. 18), 105–110 (1954).

Given a space with an affine connection $\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i$, the author observes (among other of the same type) the formula

$$A_{i;kj} - A_{i;jk} = -A_i R_{ikj}^s,$$

where the notation of Einstein is used, and shows that it follows naturally from certain parallel displacement along a convenient infinitesimal closed circuit. L. A. Santaló.

Rinow, W.: Über eine axiomatische Begründung der inneren Geometrie der Flächen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 5 Suppl., 145–151 und russ. Zusammenfassg. 152 (1954).

A surface $x = x(u^1, u^2)$ is called a projective surface if the solution curves of a system of differential equations

$$(1) \quad \ddot{u}^i + F^i(u^1, u^2; \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

are introduced as geodesics (F^i is assumed to have continuous first partial derivatives and to be homogeneous of degree 2 in \dot{u}^1, \dot{u}^2). A projective (or geodesic) map is a one-one map of one projective surface onto another which preserves the geodesics. The intrinsic projective geometry (geometry of paths) deals with those properties of a projective surface which are invariant under projective transformations. The author proposes an axiomatic characterization of such an intrinsic projective geometry. The main idea is to supplement the incidence, betweenness and continuity axioms for points and lines (geodics) as used in ordinary projective (two-dimensional) geometry by an infinitesimal version of the quadrangle theorem: Let A_n, B_n, C_n, D_n be four sequences of points converging to a point O in such a way that the lines $A_n B_n, B_n C_n, C_n D_n, D_n A_n, A_n C_n$ converge to the lines a, b, c, d, e where no three lines coincide and where neither $a = b$ holds together with $c = d$ nor $a = d$ together with $c = b$; then $B_n D_n$ converges to a line f (convergence is defined by introducing the interior of any convex polygon as neighbourhood of all its points). — If a, b, c, d are fixed, f is uniquely determined by e and the map $e \leftrightarrow f$ is involutory. The involutions can be used to define cross-ratio in the pencil of lines through O and hence to provide the geometry with coordinates u^1, u^2 . Further axioms will be needed to enforce that the lines satisfy a system (1) in these coordinates, but these investigations are not yet completed. F. A. Behrend.

Mizoguti, Yukitoyo: Theory of path structure. I. Proc. Japan Acad. 30, 1—8 (1954).

Unter Benutzung des algebraischen Gedankens, durch welchen Prenowitz „descriptive geometries“ als Multigruppen formulierte [Trans. Amer. math. Soc. 59, 333—380 (1946)], wird gezeigt, daß der von Veblen gefundene Weg [Trans. Amer. math. Soc. 5, 343—384 (1904)] unmittelbar zu dem fruchtbaren Gebiet der Geometrien von Mannigfaltigkeiten führt. Die Geometrie der Mannigfaltigkeiten, die der Verf. aufzubauen beabsichtigt, kann als eine Abstraktion der von Eisenhart und Veblen [Proc. nat. Acad. Sci. USA. 8, 19—23 (1922)] begonnenen „Geometry of paths“ betrachtet werden, obwohl sich ein großer Teil der vorliegenden Arbeit nur mit den sogenannten ebenen Mannigfaltigkeiten beschäftigt. Dem Begriff der path-Struktur liegt die Operation „—“ (Differenz) und ihre inverse „+“ (Summe) zugrunde. Fünf Axiome werden für diese Operationen angegeben; daraus gewinnt der Verf. den Begriff „offene“ oder „abgeschlossene Segmente“. Dann werden „lineare und assoziative Strukturen“, „Konvexität“ usw. definiert. A. Kawaguchi.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Haupt, Otto: Über Bogen mit lauter gleichartigen Schmiegegebilden. Portugaliae Math. 13, 1—23 (1954).

In einer früheren Note (dies. Zbl. 44, 377) gab Verf. folgenden Satz ohne Beweis: Vor. Es sei c das System aller Kreise der euklidischen Ebene E_2 , die Geraden einbegriffen. Ferner sei B ein einfacher, offener, kreisbogenfreier, zu den Kreisen normal gelegener Bogen in E_2 . Keine c -Paratingente von B soll ein Nullkreis sein. Beh. Folgende Aussagen sind gleichwertig: (1) Es hat B bezüglich c den Ordnungswert 3. (2) Alle c -Paratingenten von B liegen gleichartig zu B . (3) Alle Kreisbogen, die mit B genau drei Punkte gemeinsam haben, liegen gleichartig zu B . Es wurde darauf hingewiesen, erstens daß der vorstehende Satz Spezialfall eines allgemeinen Satzes über den Ordnungswert eines Bogens in E_2 bezüglich gewisser Kurven, der sogenannten Ordnungscharakteristiken (dies. Zbl. 7, 29) ist; zweitens daß der letztere Satz seinerseits enthalten ist in einem Satz über Korrespondenzen in E_1 . Die Kerngedanken der Theorie der Korrespondenzen findet man in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 42, 162). In dem vorliegenden Artikel wird die Theorie durch Einführung von Schmiegsystemen weiter ausgebaut, und der eingangs aufgeführte Satz übertragen

und bewiesen. Überdies ergibt sich eine Ergänzung, die für den speziellen Fall der Kreise als Erzeuger der Korrespondenzen lautet: Vor. Wie oben. Beh. Liegen alle c-Scheitelparatingenten von B gleichartig (mindestens eine solche c-Scheitelparatingente soll existieren), so besitzt B bezüglich c den Ordnungswert $4(-k+1)$ für $k=3$) und genau einen c-Scheitel. Chr. Pauc.

Fejes Tóth, L.: Annäherung von Kurven durch Kurvenbogenzüge. Publ. math. Debrecen **3**, 273—280 (1954).

Let us consider analytic plane curves K with curvature $k(s)$, where s is the arc length ($0 \leq s \leq L$). Let Γ_p be the class of curves such that $k(s)$ is a polynomial of degree $\leq p$ of s , i. e. $k^{(p+1)}(s) = 0$; $\Gamma_1(\Gamma_0)$ denotes the set of straight lines (circles).

Set $\Omega_p(K) = \int_0^L k^{p+1} ds$. A piece-wise analytic curve P will be called a Γ_p -polygon

if it is the union of a finite number of arcs of curves of Γ_p ; if the endpoints of these arcs are on the curve K , P is said to be inscribed in K . The écart $\eta(K, L)$ of two curves K, L is defined in the usual way using parallel domains. The following theorem generalizes previous results by the author (this Zbl. **31**, 278): Let P_n^p be an n -sided Γ_p -polygon inscribed in K with least écart $\eta(P_n^p, K)$. Then

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p+3} \eta(P_n^p, K) = C_p \left(\int_0^L k^{p+1} ds \right)^{p+3}$, where C_p is a known function of p .

Corollary: Any curve has a better approximation by Γ_p -polygons than the curves in Γ_{p-1} , i. e. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p+3} \eta(P_n^p, K) \leq C_p L^{p+2} \Omega_{p+1}$ where equality implies $K \in \Gamma_{p+1}$.

The proof of the theorem is sketchy.

I. Fáry.

Zaidman, S.: Sur une classe de congruences. Commun. Acad. Republ. popul. Roum. **4**, 463—468, russ. u. franz. Zusammenfassg. 468—469 (1954) [Rumänisch].

Soit, dans le plan Oxy une congruence de courbes parallèles $y = F(x, t)$, où le paramètre t est égal à $F(0, t)$. Soit E un ensemble plan mesurable et borné. Désignons par $E(t)$ l'ensemble linéaire situé sur l'axe Ox , qui est la projection verticale de l'intersection de E avec la courbe $y = F(x, t)$. On démontre que: α) Pour presque tout t , l'ensemble $E(t)$ est mesurable; β) Si A est l'ensemble des t pour lesquels $E(t)$ est mesurable, la fonction $q(t) = \text{mesure } E(t)$ est mesurable sur A et $\text{mesure } E = \int_A q(t) dt$, l'intégrale étant prise au sens de Lebesgue. S. Marcus.

Bakel'man, I. Ja.: Glatte Flächen mit verallgemeinerten zweiten Ableitungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 605—608 (1954) [Russisch].

Ein glattes Flächenstück, gegeben durch den Ortsvektor $\mathbf{r}(u, v)$ ($(u, v) \in D$), mit stetig differenzierbaren Komponenten und $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ wird Fläche mit beschränkter äußerer Krümmung genannt, falls die Komponenten von \mathbf{r} verallgemeinerte 2. Ableitungen im Sinne von Sobolev besitzen, die in jedem Teilgebiet D' von D quadratisch integrierbar sind. Verf. überträgt eine Reihe von Sätzen der klassischen Differentialgeometrie für diese Flächenklasse. Jochim Nitsche.

Nasu, Yasuo: Remarks on spaces with non-positive curvature. Kumamoto J. Sci., Ser. A **2**, Nr. 1, 1—10 (1954).

Verf. verfolgt das gleiche Ziel wie F. P. Pedersen (dies. Zbl. **48**, 405) und schlägt folgende Definition der Räume nicht positiver Krümmung vor. $x(t), x_1 \leq t \leq x_2$ ($x_1 < x_2$) und $y(s), \beta_1 \leq s \leq \beta_2$ ($\beta_1 < \beta_2$) seien auf die Bogenlänge bezogene Parameterdarstellungen zweier geodätischer Kurven. Durch $s = ct + d$ ($\beta_1 = c x_1 + d, \beta_2 = c x_2 + d$) sei β_1, β_2 auf β_1, β_2 abgebildet. Wenn dann für jedes t aus (x_1, x_2) $x(t)$ mit $y(s)$ durch genau eine Kürzeste verbunden werden kann und die Abstandsfunktion $f(t) = x(t) y(ct + d)$ auf (x_1, x_2) semikonvex ist, so sagt Verf., der

Raum habe nicht positive Krümmung. Diese Definition weicht von der Pedersen-schen ab, ist aber ebenfalls umfassender als die Busemannsche (dies. Zbl. **38**, 100) und für die Beweistechnik bequemer zu handhaben. *W. Rinow.*

Santaló, L. A.: Eine Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes. Math. Notae **12/13**, 69—78 (1954) [Spanisch].

Der bekannte Beweis von Herglotz für den Vierscheitelsatz bei Eilini $x_i(s)$ gelingt durch die Tatsache, daß nach den Frenetschen Gleichungen k x'_i Ableitungen anderer Funktionen sind [k Krümmung]. Kann man k durch eine andere Funktion $F(s)$ ersetzen, die die Länge S der Eilinie zur Periode hat, so daß F x'_i Ableitungen sind, so führt die Herglotzsche Methode zur Existenz von vier stationären Stellen für $F(s)$. Allgemeine Gestalt einer passenden Funktion ist $F(s) = \beta(s)k + (k^{-1}\beta')'$, worin als Sonderfälle die der Relativkrümmung k/k_1 zweier durch parallele Tangenten einander zugeordneten Eilini oder die Affinkrümmung stecken, für die freilich hier nur 4 Scheitel statt der bekannten 6 sich ergeben. Für die affinen und projektiven Bogen als Parameter werden nach dem gleichen Prinzip bei ebenen und Raumkurven verallgemeinerte Vierscheitelsätze abgeleitet, die bekannte Ergebnisse als Sonderfälle umfassen. *W. Süss.*

Hemmi, Denzaburo: The minimum area of convex curves for given diameter and perimeter. Proc. Japan Acad. **30**, 791—796 (1954).

In vielen Arbeiten über Extremalprobleme bei ebenen Eibereichen ist auf das sog. (L, D) -Problem von T. Kubota hingewiesen worden, dessen bisher ungelöste Formulierung lautet: Gesucht ist der Eibereich kleinsten Flächeninhalts F , wenn sein Umfang L und sein Durchmesser D so gegeben sind, daß $3D < L < \pi D$ ist. Verf. skizziert hier eine Lösung dieses Problems. Sie führt für eine passende Unterteilung des betrachteten L -Intervalls für jedes der Teilintervalle zur Angabe der exakten Ungleichung für F durch L und D . *W. Süss.*

Dulmage, Lloyd: Tangents to ovals with two equichordal points. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. **48**, 7—10 (1954).

Ein Punkt eines Eibereichs heiße S -Punkt, wenn alle durch ihn gehenden Sehnen des Bereiches dieselbe Länge, etwa 1, besitzen. Bis heute ist nicht bekannt, ob es Eibereiche mit zwei S -Punkten gibt. Für solche Bereiche mit stetig variierender Tangente zeigt Verf. gewisse Grenzen ihrer Existenzmöglichkeit: der Abstand der beiden S -Punkte, zu denen der Bereich doppelsymmetrisch sein muß [Ref., Tôhoku math. J. **25**, 86—98 (1925)], muß kleiner als $2\sqrt{2/3}$ sein. Wichtig für eine weitere Untersuchung dürfte der hier bewiesene Hilfssatz sein, daß zwei Eilini mit denselben S -Punkten R und S in einem gemeinsamen Punkt auch dieselbe Tangente besitzen. *W. Süss.*

Santaló, L. A.: Verallgemeinerung einer geometrischen Ungleichung von Feller. Revista Un. mat. Argentina **16**, 78—81 (1954) [Spanisch].

In einem n -dimensionalen Riemannschen Raum S_n sei ein meßbares Gebiet D gegeben, welches innerhalb einer konvexen Hyperfläche vom $(n-1)$ -dimensionalen Flächenmaß F enthalten ist. Wenn dann der Durchschnitt einer jeden geodätischen Linie mit D ein Maß $\leq \delta$ besitzt, so gilt für das Maß M von D die Ungleichung $(1) \quad M \leq \delta(n-1)^{-1} (O_{n-2}/O_{n-1}) F$, wobei $O_i = \Gamma(\frac{1}{2}(i+1)) \frac{1}{2} \pi^{-(i+1)/2}$. Diese Formel läßt sich, wenn der Raum S_n von konstanter Krümmung und F eine nicht-euklidische Sphäre ist, verallgemeinern, und zwar kann man die geodätischen Linien durch r -dimensionale Räume ersetzen. Für den Fall des euklidischen Raumes stammt (1) von Feller [Duke math. J. **9**, 885—892 (1942)]. Zum Beweis benutzt Verf. die Methoden der Integralgeometrie. *W. Maak.*

Federer, Herbert: Some integralgeometric theorems. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 238—261 (1954).

Bezeichnungen. E_n sei der n -dimensionale euklidische Raum, L_n das n -dimensionale Lebesguesche Maß in E_n , ferner G_n die Gruppe der orthogonalen Trans-

formationen des E_n und Φ_n das Haarsche Maß über G_n , normiert zu $\Phi_n(G_n) = 1$. Sind $\mu|m$ bzw. $r|n$ Maße in X bzw. Y und ist $P \in X \times Y$, so sei $\mu \otimes r(P) = \inf \left[\sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i) \cdot r(N_i) : \text{über alle } S = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \times N_i \text{ mit } P \in S \text{ und } M_i \subset m, N_i \in n \right]$. Es heißt $A \subset E_n$ k -rektifizierbar, wenn A dehnungsbeschränktes Bild einer beschränkten Menge des E_k ist ($1 \leq k \leq n$). Weiter heißt $B \subset E_n$ Hausdorff- k -rektifizierbar, wenn das (bezüglich der Metrik des E_n gebildete) k -dimensionale Hausdorffsche Maß $H_n^k(B)$ von B endlich ist und wenn eine Folge k -rektifizierbarer $B_i \subset E_n$ existiert mit $H_n^k\left(B - \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = 0$. — Jede Isometrie I des E_n auf sich ist eindeutig darstellbar als Produkt einer Translation $T_z = T_z(x) = z + x$, wobei $x, z \in E_n$, und einer Transformation $R \subset G_n$, in Zeichen $I = T_z \circ R$; daraus resultiert die Definition des Maßes $L_n \otimes \Phi_n$ über $E_n \times G_n$. — Sätze. Es sei $B \subset E_n$ Hausdorff- k -rektifizierbar und $A \subset E_n$ t -rektifizierbar. Dann gilt: (1) Ist $k + t > n$, so ist $B \subset (T_z \circ R)(A)$ Hausdorff- $(k + t - 1)$ -rektifizierbar für $L_n \otimes \Phi_n$ -fast alle $(z, R) \in E_n \times G_n$. — (2) Ist $k + t \geq n$ und sind A sowohl als B überdies analytische Mengen in E_n , so gilt

$$\int_{E \times G_n} H_n^{k+t-n}(B - (T_z \circ R)(A)) d(L_n \otimes \Phi_n)(z, R) = \gamma H_n^k(B) H_n^t(A),$$

wobei $\gamma = \gamma(n; k, t) = \Gamma(\frac{1}{2}(k-1)) \Gamma(\frac{1}{2}(t-1)) \Gamma(\frac{1}{2}(k+t-n+1)) \Gamma(\frac{1}{2}(n+1))$. Wegen weiterer Ergebnisse muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Otto Haupt.

Topologie:

● MacLane, Saunders: *Lehrgang der allgemeinen Topologie*. Notas Mat. Nr. 11, 102 p. (1954) (hektograph.) [Portugiesisch].

Aus dem Englischen übersetzte vorzügliche kurze Einführung in die abstrakte mengentheoretische Topologie.

D. Tamari.

Bagley, Robert and David Ellis: *On the topolattice and permutation group of an infinite set*. Math. Japonicae **3**, 63—70 (1954).

Let S be an infinite set, and let \mathcal{A} be the set of all T_1 -topologies on S . For $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, the authors write $\alpha \leq \beta$ if every set open with respect to β is also open with respect to α . It is known and obvious that \mathcal{A} is a complete lattice with a greatest and a least element. Let $\tilde{\mathcal{A}}$ be the dual lattice to \mathcal{A} ($\alpha \leq \beta$ in $\tilde{\mathcal{A}}$ if and only if $\beta \leq \alpha$ in \mathcal{A}). The authors construct a certain class of isotone mappings of $\mathcal{A} \otimes \tilde{\mathcal{A}}$ onto the 2-element lattice $\{0, 1\}$ and show that these mappings are in one-to-one correspondence with the class of all permutations of S .

E. Hewitt.

Ellis, D.: *On the topolattice and permutation group of an infinite set*. II. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 485—487 (1954).

Bezeichnungen und Terminologie wie im vorangehenden Referat. Satz: Die Permutationsgruppe von S ist mit der Automorphismengruppe von \mathcal{A} isomorph.

E. Hewitt.

Ellis, D.: *IPIC representation of lattice automorphisms*. Publ. math., Debrecen **3**, 217—220 (1954).

Verallgemeinerung der Resultate einer früheren Note (s. die beiden vorangehenden Referate) auf alle Verbände mit erstem und letztem Element. E. Hewitt.

Bagley, R. W.: *On the characterization of the lattice of topologies*. J. London math. Soc. **30**, 247—249 (1955).

Bezeichnungen und Terminologie wie im dritten vorangehenden Referat. Sei $s \in S$, τ_s die T_1 -Topologie auf S , für welche die offenen Mengen nur $\{s\}$, \emptyset , und Mengen mit endlichen Komplementärmengen sind. Sei \mathcal{A}_0 der kleinste vollständige Unterverband von \mathcal{A} , der alle τ_s und die schwächste T_1 -Topologie enthält. Dann ist \mathcal{A}_0

mit dem Verband aller Untermengen von S isomorph. Ferner ist A_0 maximal bezüglich der Eigenschaft, eine Boolesche Algebra aller Untermengen einer gewissen Menge zu sein. *E. Hewitt.*

Pierce, R. S.: Coverings of a topological space. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 281—298 (1954).

Verf. untersucht die folgendermaßen definierten P -Räume S (insbesondere deren Überdeckungen); Sei $P = \{0, a, b, \dots\}$ ein Halbverband (teilweise geordnete Menge, in welcher für je zwei Elemente der Durchschnitt existiert) mit Nullelement 0, sei $S = \{X, Y, \dots\}$ eine Menge von dualen Idealen (Filtern) in P (nicht leer, $\neq P$); als Umgebungsbasis in S wird gewählt das System aller Mengen der Form $S(a) = \{X \in S | a \in X\}$. *G. Nöbeling.*

Kunugi, Kinjirō: Sur les espaces complets et régulièrement complets. II. III. Proc. Japan Acad. **30**, 912—916 (1954); **31**, 49—53 (1955).

Im ersten Teil (dies. Zbl. **57**, 147) der Arbeit hat der Verf. eine Klasse topologischer Räume („espaces rangés“) untersucht und einen Begriff der Vollständigkeit für diese Räume eingeführt. Im zweiten und dritten Teil untersucht er das Problem der Vervollständigung dieser Räume. *R. Sikorski.*

Iséki, Kiyoshi: Some properties of hypernormal spaces. Proc. Japan Acad. **30**, 937—939 (1954).

Ein Hausdorffscher Raum X mit der Eigenschaft, daß G offen für jede offene Untermenge $G \subset X$ ist, heißt bekanntlich hypernormal [E. Hewitt, Duke math. J. **10**, 309—333 (1943)]. Verf. beweist, daß der Hannersche Raum (dies. Zbl. **42**, 411) zweier hypernormaler Räume mittels einer Abbildung f wieder hypernormal ist. Einige andere Sätze werden auch angekündigt. *E. Hewitt.*

Iséki, Kiyoshi: A note on the general metrization problem. Proc. Japan Acad. **30**, 855—856 (1954).

L'A. donne une nouvelle démonstration du théorème de Nagata-Smirnov sur la condition de métrisabilité des espaces réguliers. L'idée consiste à prouver d'abord que si cette condition est remplie, l'espace est paracompact et parfaitement normal, puis, à l'aide de partitions de l'unité convenablement choisies, de définir un homéomorphisme de l'espace donné sur un sous-espace d'un espace de Hilbert. *J. Dieudonné.*

Cohen, Haskell: A cohomological definition of dimension for locally compact Hausdorff spaces. Duke math. J. **21**, 209—224 (1954).

Es sei G eine additive Abelsche Gruppe und $n \geq 0$ ganz. Ist Y ein bikompakter Hausdorff-Raum und $Y_0 \subseteq Y$ abgeschlossen, so bedeute $(Y, Y_0) \in D^n(G)$, daß bei beliebigem abgeschlossenem $C \subseteq Y$ jedes $c \in H^n(C, C \cap Y_0)$ eine Fortsetzung in $H^n(Y, Y_0)$ hat; dabei bedeutet H^n die n -te Alexander-Kolmogoroff-(Spanier)-sche Cohomologiegruppe mit G als Koeffizientengruppe. Ist nun X ein lokal-bikompakter Hausdorff-Raum und $X_0 \subseteq X$ abgeschlossen, so definiert Verf. eine „Codimension“ $\text{cd}(X, X_0)$ folgendermaßen: $\text{cd}(X, X_0) = -1$ genau dann, wenn X leer; sonst $\text{cd}(X, X_0) = \sup_k \inf_n \{n : (K, K \cap X_0) \in D^n(G), K \subseteq X \text{ bikompakt}\}$. Statt $\text{cd}(X, O)$ wird $\text{cd } X$ geschrieben. Ist X bikompakt, so ist $\text{cd}(X, X_0) \leq n$ äquivalent mit $H^{n+1}(X, A) = 0$ für alle abgeschlossenen $A \supseteq X_0$ und auch damit, daß für alle solchen A der natürliche Homomorphismus von $H^n(X)$ in $H^n(A)$ ein Homomorphismus auf ist. Für cd gilt der Monotoniesatz und der Summensatz. (Ob der Produktsatz gilt, ist noch unbekannt; bewiesen werden nur schwächere Behauptungen.) Über die Beziehungen von cd zur Menger-Urysohn'schen Dimension \dim und zur Lebesgueschen Dimension cov gilt: $\text{cd } X \leq \dim X$ und $\text{cd } X \leq \text{cov } X$. Schließlich ist cd maximal, wenn G die Gruppe der ganzen Zahlen ist. *G. Nöbeling.*

Eisenstadt, B. J.: The space of point homotopic maps into the circle. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 62—85 (1954).

In this paper the author considers the space $C(X)$ of real, bounded, continuous functions on a topological space, assumed compact and connected. He makes a special study of the space of point-homotopic continuous maps of X into the space of the reals modulo $2q$, R_{2q} . The main result is about a characterization of the space $R_{2q}(X)$ of point homotopic functions from X to R_{2q} . First of all the interesting notion of pseudo-Banach space is introduced. This is a normed abelian group G for which there exists a scalar multiplication by the reals, subject to the following axioms: if $\alpha, \beta \in R$ and $a, b \in G$ and if $U_1 = \{f \in G \mid \|f\| \leq 1\}$ then the axioms are (1) $1 \cdot a = a$, (2) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, (3) $\|\alpha \cdot a\| \leq 1 \Rightarrow \beta(\alpha a) = (\beta \alpha)a$, (4) $\|a\| \leq 1 \Rightarrow \|a\| = \|\alpha a\| = \|\alpha \cdot a\|$, (5) $\|a\| + \|b\| \leq 1 \Rightarrow \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$. It is easy to show that $R_{2q}(X)$ is a pseudo-Banach space. Certain properties of a pseudo-Banach space are given, one of the most important being about its roots of unity. The roots of unity of a pseudo-Banach space G are the $h \in G$ such that there is an integer n for which $n \cdot h = 0$. The set H of the roots of unity of G has a closure \bar{H} in G . If $\bar{H} = 0$ and if $H \cap U_1$ are constants in G , G is said to be a „space of constants“. $R_{2q}(X)$ is characterized as a group G which is a space of constants and whose only constants are the elements of $\bar{H} \cap U_1$, provided certain of its characters, the „maximal characters“ satisfy a certain condition of complicated expression. The notion of character and of maximal character of a group G which is a pseudo-Banach space plays obviously a great part in the theory. But the analysis of this notion is a long one and cannot be summed up in a few words. Positive hyperplanes of a pseudo-Banach space are easily defined. This leads to a more complicated notion, that of „essentially positive functionals“ of G . These functionals form a compact space in the dual of G (or space of characters) and maximal elements may be defined in this space, which are called „maximal characters“ of G . The last theorem deduces from the equivalence of the spaces $R_{2p}(X)$ and $R_{2q}(Y)$, X and Y being connected, compact, topological spaces, that $p = q$ and X and Y are homeomorphic.

C. Racine.

Paechter, G. F.: A note on the invariant factors of $\Gamma(A)$. Ann. of. Math., II. Ser. **60**, 558—559 (1954).

Bei J. H. C. Whitehead (dies. Zbl. **37**, 261) findet sich der Satz, daß für die endlich erzeugte Gruppe A die Struktur von A durch die von $\Gamma(A)$ bestimmt ist. Verf. bemerkt einen Fehler im Beweis dieses Satzes und liefert einen neuen Beweis.

E. Burger.

Ebersold, Johannes M.: Über die Rolle des Whiteheadschen Homotopieproduktes für die Homologietheorie. Compositio math. **12**, 97—133 (1954).

Soient \mathfrak{K} un complexe simplicial fini connexe et \mathfrak{K}^{n-1} son squelette à $n-1$ dimensions. Les produits de Whitehead d'éléments appartenant respectivement à $\pi_k(\mathfrak{K}^{n-1})$ et à $\pi_{n-k}(\mathfrak{K}^{n-1})$ engendrent un sous-groupe $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ de $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$, où Γ désigne le noyau de l'homomorphisme naturel du groupe d'homotopie dans le groupe d'homologie. $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$ désignera l'image de $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$, par injection de $\pi_{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ dans $\pi_{n-1}(\mathfrak{K})$. L'A. construit un groupe (formel) \mathfrak{U}^{n-1} , qui correspond à peu près à la somme directe $(1 \leq k \leq n/2)$ des produits tensoriels $\pi_k(\mathfrak{K}^{n-1}) \otimes \pi_{n-k}(\mathfrak{K}^{n-1})$ (sauf pour les valeurs $k=1$ et $k=n/2$ (pour n pair), qui exigent un traitement différent). \mathfrak{U}^{n-1} est appliqué canoniquement sur $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ et sur $\mathfrak{W}^{n-1}(\mathfrak{K})$, avec des noyaux respectifs $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ et $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$; ces noyaux correspondent à l'existence dans \mathfrak{K}^{n-1} et \mathfrak{K} de relations (non triviales, c'est-à-dire ne découlant pas déjà des propriétés algébriques générales des produits de Whitehead, valables dans n'importe quel espace) entre les produits de Whitehead. L'A. appelle „variété-standard“ une variété à anses, somme topologique d'une sphère S^n et d'un

certain nombre de produits topologiques de sphères $S^k \times S^{n-k}$; une image dans \mathfrak{K} d'une variété-standard sera appelée cycle-standard; leur groupe sera désigné par \mathfrak{M}^n . Appliquant la notion de bord d'homotopie („Homotopierand“) de H. Hopf [ce Zbl. 27, 95 et Commentarii math. Helvet. 17, 307—326 (1945)] et utilisant le fait que le bord d'homotopie de $S^k \times S^{n-k}$ s'exprime par le produit de Whitehead $S^k \circ S^{n-k}$ (dans le $(n-1)$ -squelette du produit), l'A. montre que le bord d'homotopie de \mathfrak{M}^n est l'intersection de $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K}^{n-1})$ et du groupe des bords d'homotopie, et correspond (dans \mathfrak{U}^{n-1}) au noyau $\mathfrak{B}^{n-1}(\mathfrak{K})$. De \mathfrak{U}^{n-1} on passe (en négligeant les classes d'homotopie appartenant à $\Gamma(\mathfrak{K}^{n-1})$ au groupe-quotient $\overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$, engendré, de la même façon que \mathfrak{U}^{n-1} , au moyen des classes d'homologie sphériques; \mathfrak{B}^{n-1} définit $\overline{\mathfrak{B}}^{n-1} \subset \overline{\mathfrak{U}}^{n-1}$ par passage au quotient. Moyennant quelques précautions relatives aux éléments d'ordre fini, on pourra alors déterminer [à l'aide de la valeur du cycle-standard M^n sur les cup-produits de cocycles à k et $n-k$ dimensions (sauf pour le „cas exceptionnel“, cocycles de dimension $n/2$ lorsque $n/2$ est un entier impair) et sur le carré de Pontrjagin des cocycles à $n/2$ dimensions (si $n/2$ est un entier pair)] l'élément de $\overline{\mathfrak{B}}^{n-1}(\mathfrak{K})$ qui provient de M^n . Il en résultera notamment (sauf éventuellement dans le „cas exceptionnel“) que, si $\overline{\mathfrak{B}}^{n-1}(\mathfrak{K})$ n'est pas nul, alors le groupe d'homologie H_n de dimension n ne peut pas être nul. — Dans le cas particulier de π_3 , l'A. élargit le groupe $\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K}^3)$ en $*\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K}^3)$, en y ajoutant les éléments de π_3 qui sont appliqués sur les éléments α de $\pi_2(\mathfrak{K})$ avec l'invariant de Hopf égal à 1: \mathfrak{U}^3 est élargi en γ ajoutant les éléments $\frac{1}{2}(\alpha, \alpha)$; l'A. élargit aussi la notion de variété-standard en admettant aussi comme anse le plan projectif complexe, ce qui élargit \mathfrak{M}^4 en $*\mathfrak{M}^4$. $*\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K})$, image par injection de $*\mathfrak{B}^3(\mathfrak{K}^3)$, est alors le noyau $\Gamma^3(\mathfrak{K})$ de l'application de $\pi_3(\mathfrak{K})$ dans $H_3(\mathfrak{K})$, et correspond au bord d'homotopie de $*\mathfrak{M}^4$. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut pour $\overline{\mathfrak{B}}^{n-1}(\mathfrak{K})$ permet alors d'exprimer $\pi_3(\mathfrak{K})$ lorsqu'on connaît $H_2(\mathfrak{K})$, $H_3(\mathfrak{K})$ (en coefficients entiers), $H_4(\mathfrak{K}, Z_{n_i})$ où les n_i sont les coefficients de torsion de dimension 3 (Z_m désignant le groupe cyclique d'ordre m), les homomorphismes naturels de $H_4(\mathfrak{K}, Z_{n_i})$ en $H_4(\mathfrak{K}, Z_{n_{i+1}})$, plus la structure d'anneau (y compris le carré de Pontrjagin) en coefficients Z et Z_m , où m parcourt les valeurs des coefficients de torsion (et leurs diviseurs) pour les dimensions 2 et 3. L'A. retrouve ainsi des résultats déjà obtenus (par d'autres méthodes) par J. H. C. Whitehead (ce Zbl. 36, 127) et d'autres. — Enfin, l'A. établit que l'existence, dans un complexe \mathfrak{K} , d'un cycle sphérique non homologue à zéro (en coefficients rationnels) à n dimensions (n pair) entraîne que les groupes d'homologie de dimensions $2n, 3n, \dots, rn$ ne sont pas nuls si le complexe est asphérique dans les dimensions $2n-1, 3n-1, \dots, rn-1$. (L'A. établit aussi un théorème analogue pour le cas d'un cycle sphérique d'ordre fini.) Il en déduit un résultat qui est un cas particulier d'un résultat de H. Cartan (Il n'existe pas de complexe fini ayant exactement un seul groupe d'homotopie π_n non nul, si $n \neq 1$). Ce résultat de Cartan répond en même temps à la question posée par l'A. Voir par exemple W. S. Massey, Ann. of Math., II. Ser. 62, 355 (1955), Problem 30. G. Hirsch.

Whitehead, George W.: On mappings into group-like spaces. Commentarii math. Helvet. 28, 320—328 (1954).

Es sei G ein topologischer Raum, in dem ein „Einselement“ e ausgezeichnet ist, und für den eine stetige Abbildung $(x, y) \mapsto xy$ von $G \times G$ in G und eine stetige Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ von G in G so definiert sind, daß die Gruppenaxiome bis auf Homotopie relativ e erfüllt sind. Die Homotopieklassen (relativ e) der stetigen Abbildungen eines Raumes Y in G bilden in natürlicher Weise eine (nicht notwendigerweise abelsche) Gruppe $\pi(Y; G)$. Wenn $Y = S^n$, dann ist $\pi(Y; G) = \pi_n(G)$; das ist für alle n eine abelsche Gruppe. In Verallgemeinerung dieser Tatsache beweist Verf. den folgenden interessanten Satz: Y und G seien hinreichend vernünftig.

Die Lusternik-Schnirelmann-Kategorie c von Y sei endlich (vgl. Fox, dies. Zbl. 27, 431). Dann ist $\pi(Y; G)$ eine nilpotente Gruppe, deren Klasse $c = 1$ ist. Die Kategorie c ist bekanntlich $\leq s$, wenn man Y mit Teilmengen A_1, \dots, A_s so überdecken kann, daß A_i in einer in Y zusammenziehbaren offenen Menge U_i enthalten ist. — Es werde an einige Dinge der Gruppentheorie erinnert: Die absteigende Zentralreihe einer Gruppe Γ wird induktiv durch $Z_0 = \Gamma$, $Z_i = [\Gamma, Z_{i-1}]$ definiert. ($[a, b] = a b a^{-1} b^{-1}$.) Die Gruppe Γ ist dann und nur dann nilpotent, wenn es ein k mit $Z_k = \{1\}$ gibt; und das kleinste derartige k wird dann Klasse von Γ genannt. Eine Folge von Untergruppen $\Gamma = \Gamma_0 \supset \dots \supset \Gamma_r = \{1\}$ heißt Zentralkette der Länge r , wenn $[\Gamma_i, \Gamma_i] \subset \Gamma_{i+1}$. Die Gruppe Γ hat dann und nur dann eine Zentralkette der Länge $\leq r$, wenn Γ nilpotent und eine Klasse $\leq r$ hat. — Wenn Y das Sphärenprodukt $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_r}$ ist, dann ist die Kategorie von Y gleich $r + 1$, und man kann für die Gruppe $\Gamma = \pi(Y; G)$ leicht eine Zentralkette der Länge r konstruieren. Man fasse S^{n_i} als Kompaktifizierung der n_i -dimensionalen Zelle durch einen Punkt e_i im „Unendlichen“ auf. Wenn $r = 2$ ist, dann setzt man $A_0 = e_1 \times e_2$, $A_1 = e_1 \times S^{n_2} \cup S^{n_1} \times e_2$, $A_2 = S^{n_1} \times S^{n_2}$. Entsprechend werden A_0, A_1, \dots, A_r für beliebiges r definiert. Es sei Γ_i die Gruppe derjenigen Homotopieklassen von Y in G , die bei Beschränkung auf A_i unwesentlich sind. Dies ergibt eine Zentralkette der Länge r . Der Quotient Γ_{i-1}/Γ_i ist isomorph zu dem direkten Produkt $\prod_{\xi} \pi_{n(\xi)}(G)$ von Homotopiegruppen von G . Hierbei durchläuft ξ alle i -zähligen Teilmengen von n_1, \dots, n_r und $n(\xi)$ ist gleich $\sum_{j \in \xi} n_j$. Für den Fall $r = 2$ kann

man $\pi_{n_1+n_2}(G)$ in natürlicher Weise mit Γ_1 identifizieren und $\pi_{n_1}(G)$, $\pi_{n_2}(G)$ sind auf Grund der Projektionen von $S^{n_1} \times S^{n_2}$ auf die beiden Faktoren als Untergruppen von Γ aufzufassen. Wenn $\alpha \in \pi_{n_1}(G)$, $\beta \in \pi_{n_2}(G)$, dann ist der in Γ gebildete Kommutator von α und β ein Element von $\Gamma_1 = \pi_{n_1+n_2}(G)$. Man erhält so für $\alpha \in \pi_{n_1}(G)$, $\beta \in \pi_{n_2}(G)$ ein „Produkt“ $\langle \alpha, \beta \rangle$ in $\pi_{n_1+n_2}(G)$. Dieses Produkt ist bilinear in α und β . — Für $\alpha \in \pi_p(G)$, $\beta \in \pi_q(G)$ und $\gamma \in \pi_r(G)$ kann nun folgende Jacobi-Identität bewiesen werden:

$$(*) \quad \langle \alpha, \langle \beta, \gamma \rangle \rangle - (-1)^{p+q-r} \langle \beta, \langle \gamma, \alpha \rangle \rangle + (-1)^{r(p+q)} \langle \gamma, \langle \alpha, \beta \rangle \rangle = 0.$$

Sie ergibt sich daraus, daß die in $(*)$ auftretenden dreifachen Produkte als höhere Kommutatoren in der Gruppe $\Gamma = \pi(S^p \times S^q \times S^r; G)$ aufgefaßt werden können, daß diese Gruppe nilpotent von der Klasse 3 ist ($Z_3 = \{1\}$) und daß für Elemente a, b, c einer beliebigen Gruppe Γ das Element $[a, [b, c]] \cdot [b, [c, a]] \cdot [c, [a, b]]$ zu Z_3 gehört. — Die Vorzeichen in $(*)$ kommen durch gewisse Orientierungskonventionen bei der Definition des Produktes $\langle \alpha, \beta \rangle$ herein. [Wir erwähnen, daß für $\alpha \in \pi_p(G)$, $\beta \in \pi_q(G)$ gilt: $\langle \alpha, \beta \rangle = (-1)^{pq-1} \langle \beta, \alpha \rangle$.] Die von Samelson (dies. Zbl. 51, 139) für das Whitehead-Produkt der Homotopiegruppen eines Raumes X vermutete Jacobi-Identität ergibt sich durch Anwendung von $(*)$ auf den loop space G von X . Wenn T der natürliche Isomorphismus von $\pi_{p+1}(G)$ auf $\pi_p(X)$ ist, dann hat man nämlich für $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$ und $\beta \in \pi_{q+1}(X)$ die Gleichung $T([\alpha, \beta]) = (-1)^p \cdot T(\alpha) \cdot T(\beta)$. Hier bezeichnet $[\alpha, \beta]$ das Whitehead-Produkt. — Weitere Beweise der Jacobi-Identität des Whitehead-Produktes sind von Hilton, Massey-Uehara, Nakaoka, Toda und Suzuki (vgl. nachstehendes Referat) gegeben worden.

F. Hirzebruch.

Suzuki, Haruo: A product in homotopy theory. Tôhoku math. J., II. Ser. 6, 78—88 (1954).

Verf. beweist die Jacobi-Identität für das Whitehead-Produkt. Die vorliegende Arbeit ist unabhängig von der vorstehend referierten Arbeit von G. W. Whitehead. Es gibt jedoch manche Berührungspunkte. — G sei ein Hopfscher Raum. Das ist ein Raum mit stetiger Multiplikation und „Einselement“ e . Es soll gelten $e e = e$ und ferner $e x = x e = x$ bis auf Homotopie relativ e . Verf. definiert

für $\alpha \in \pi_p(G)$, $\beta \in \pi_q(G)$ ein Produkt $\langle \alpha, \beta \rangle \in \pi_{p+q}(G)$, das bis auf das Vorzeichen $(-1)^p$ mit dem von Whitehead (siehe vorstehendes Referat) betrachteten Produkt $\langle \alpha, \beta \rangle$ übereinstimmt. Im Gegensatz zu Whitehead setzt Verf. jedoch nicht voraus, daß G bis auf Homotopie eine Gruppe ist. Deshalb kann man die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von Y in G nicht zu einer Gruppe machen und deshalb gelingt es auch nicht für das Produkt $\langle \alpha, \beta \rangle$ und für einen Hopfschen Raum G die Jacobi-Identität zu beweisen. Verf. zeigt jedoch (Theorem 3), daß unter einer gewissen zusätzlichen Voraussetzung über Abbildungen von Sphären in G die Jacobi-Identität richtig ist. Diese zusätzliche Voraussetzung folgt, wenn G bis auf Homotopie eine Gruppe (z. B. ein loop space) ist, aus dem assoziativen Gesetz von G . Die Jacobi-Identität für das Whitehead-Produkt beweist Verf. mit Hilfe des Isomorphismus T (siehe vorstehendes Referat). Zusammenfassend kann man sagen, daß die Beweise von Whitehead und Suzuki verwandt sind, daß aber Suzuki mehr mit explizit konstruierten Abbildungen und Homotopien arbeitet. — Die vorliegende Arbeit enthält Untersuchungen über den Zusammenhang des Produktes $\langle \alpha, \beta \rangle$ (im Sinne des Verf.) mit dem Pontrjagin-Produkt $*$. Wenn h den natürlichen Homomorphismus von $\pi_n(G)$ in die ganzzahlige Homologiegruppe $H_n(G)$ bezeichnet, dann hat man für $\alpha \in \pi_p(G)$ und $\beta \in \pi_q(G)$ die Gleichung $h \langle \alpha, \beta \rangle = (-1)^p \{h \alpha * h \beta - (-1)^{pq} h \beta * h \alpha\}$ (vgl. Samelson, dies. Zbl. 51, 139).
F. Hirzebruch.

Nakaoka, Minoru: On a theorem of Eilenberg-MacLane. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A. 5, 31—39 (1954).

Verf. verallgemeinert mit Hilfe der Serreschen C -Theorie (dies. Zbl. 52, 193) einen Satz von Eilenberg und MacLane [Ann. of Math., II. Ser. 46, 480—509 (1945); siehe auch dies. Zbl. 36, 126]: Es sei C eine Klasse von abelschen Gruppen, die den im Referat der Serreschen Arbeit zitierten Bedingungen (a), (b), (c), (II_B) und (III) genügt. Es sei Y ein einfach-zusammenhängender Raum, derart, daß die Homotopiegruppen $\pi_i(Y)$ für $i < n$ und für $n < i < q$ zu C gehören. Dann hängt die C -Isomorphieklasse der Homologiegruppe $H_i(Y; G)$ für $i < q$ nur von der abstrakten Gruppe $\pi_n(Y)$ ab. $H_i(Y; G)$ ist also dann C -isomorph zu $H_i(\pi_n(Y), n; G)$, der i -ten Homologiegruppe (mit Koeffizienten in G) desjenigen Eilenberg-MacLaneschen Raumes, der in den von n verschiedenen Dimensionen verschwindende Homotopiegruppen hat und dessen Homotopiegruppe in der Dimension n zu $\pi_n(Y)$ isomorph ist. Wenn $\Sigma_q(Y; G)$ die sphärische Untergruppe von $H_q(Y; G)$ bezeichnet [Eilenberg, Ann. of Math., II. Ser. 45, 407—447 (1944)], dann ist $H_q(Y; G) \Sigma_q(Y; G)$ C -isomorph zu $H_q(\pi_n(Y), n; G)$. — Verf. wendet den vorstehenden Satz auf ein Problem über Homotopietypen an und erhält: Es sei Y ein einfach-zusammenhängender Raum, dessen Homotopiegruppen nur in den Dimensionen r_1, \dots, r_m von 0 verschieden seien. Es werde vorausgesetzt, daß alle Homotopiegruppen endlich sind und daß das Tensorprodukt $\pi_{r_i}(Y) \otimes \pi_{r_j}(Y)$ für $r_i \neq r_j$ verschwindet.

Dann ist $H_i(Y) = \sum_{j=1}^m H_i(\pi_{r_j}(Y), r_j)$. Wenn weiterhin Y ein CW-Komplex ist, dann ist Y vom gleichen Homotopietyp wie das cartesische Produkt der Räume $K(\pi_{r_j}(Y), r_j)$ ($j = 1, \dots, m$), wo $K(\pi_{r_j}(Y), r_j)$ ein fester Eilenberg-MacLanescher Raum ist, der als lokal-endlicher CW-Komplex vorausgesetzt werde. (Das ist möglich, da alle Gruppen endlich sind.) Verf. bemerkt, daß sein Satz über Homotopietypen unmittelbar aus Ergebnissen von M. M. Postnikov (dies. Zbl. 42, 172) entnommen werden kann. — Schließlich beweist Verf. einen Satz über Bettische Zahlen und Homotopiegruppen: Es sei Y ein einfach-zusammenhängender Raum, dessen ganzzahlige Homologiegruppen alle endlich erzeugt sind. b_i bezeichne die i -te Bettische Zahl. Es sei $b_i = 0$ für $0 < i < n$ und $b_n > 0$. Dann sind wenigstens zwei Homotopiegruppen von Y unendlich, vorausgesetzt, daß die folgende Aussage für

wenigstens ein i nicht erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \left(i = q \cdot n \text{ und } n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow b_i = \binom{q + b_n - 1}{q} \right) \text{ und} \\ \left(i = q \cdot n \text{ und } n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow b_i = \binom{b_n}{q} \right) \text{ und} \\ (i \not\equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow b_i = 0). \end{aligned} \quad F. Hirzebruch.$$

Nakaoka, Minoru: Transgression and the invariant k_n^{q+1} . Proc. Japan Acad. **30**, 363—368 (1954).

Es sei X ein topologischer Raum, dessen Homotopiegruppen π_i in den von n und q verschiedenen Dimensionen i verschwinden ($1 \leq n \leq q$). Dann gibt es nach Cartan-Serre und G. W. Whitehead (dies. Zbl. **48**, 413) einen gefaserten Raum E mit der Basis B und der Projektion p von E auf B , derart, daß E vom gleichen Homotopietyp wie X ist, daß B ein Eilenberg-MacLanescher Raum $K(\pi_n, n)$ ist und daß die Faser $F = p^{-1}(b_0)$ ein Eilenberg-MacLanescher Raum $K(\pi_q, q)$ ist. Die Transgression τ bildet $H^q(F; \pi_q)$ homomorph in $H^{q+1}(B; \pi_q)$ ab. In $H^q(F; \pi_q)$ gibt es ein kanonisches Element b^q , nämlich das Hindernis gegen Zusammenziehung von F in sich auf einen Punkt. In $H^{q+1}(B; \pi_q)$ gibt es ein kanonisches Element k^{q+1} , nämlich das Hindernis gegen einen Schnitt des gefaserten Raumes E . Verf. beweist, daß $\tau b^q = -k^{q+1}$. Im Verlauf des Beweises erhält Verf. mehrere Beziehungen zwischen den Invarianten von E, X, B und F . F. Hirzebruch.

Mizuno, Katuhiko: A proof for a theorem of M. Nakaoka. Proc. Japan Acad. **30**, 431—434 (1954).

Verf. beweist und verallgemeinert die im vorstehenden Referat besprochene Formel $\tau b^q = -k^{q+1}$: Verf. betrachtet einen gefaserten Raum E über B mit der Projektion p , der folgende Eigenschaften hat: $\pi_i(E)$ verschwindet für $i = 0, i = 1$ und für $i > q$. Die Homotopiegruppen $\pi_i(B)$ verschwinden für $i \geq q$. Die Projektion p induziert Isomorphismen von $\pi_i(E)$ auf $\pi_i(B)$ für $i < q$. Die Faser ist dann ein Eilenberg-MacLanescher Raum $K(\pi_q(E), q)$. — Der von Nakaoka (siehe vorstehendes Referat) betrachtete gefaserte Raum (E, p, B) hat alle diese Eigenschaften. Verf. beweist die oben gegebene Transgressions-Formel für die Postnikovsche Invariante k^{q+1} (Postnikov, dies. Zbl. **42**, 172), die als das Hindernis gegen einen Schnitt von E definiert werden kann. F. Hirzebruch.

Liao, S. D.: On the topology of cyclic products of spheres. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 520—551 (1954).

Soit X un espace localement compact paracompact, s un point fixe de X , $(X)^q$ le produit de q espaces homéomorphes à X , dans lequel opère un sous-groupe Γ du groupe des permutations sur les coordonnées. On désigne par $I: (X)^q \rightarrow X^r$ la relation d'identification définie par Γ , X^r l'espace quotient; soit g l'injection de X dans X^r définie par $g(y) = I(y, s, s, \dots, s)$. A tout cocycle u de $H^*(X)$, on associe le cocycle u' symétrisé de $u \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$ dans $H^*((X)^q)$; u' définit ainsi une classe de $H^*(X^r)$, et l'homomorphisme $\mu: H^*(X) \rightarrow H^*(X^r)$ ainsi défini admet g^* pour inverse à gauche; par suite μ est un isomorphisme de $H^*(X)$ dans $H^*(X^r)$. La démonstration use des cohomologies spéciales de Smith, dans le cadre de la cohomologie de Čech. L'A. étudie ensuite le produit cyclique ∂_n^p de la sphère S^n d'ordre p , p premier, (Γ groupe cyclique Z_p), dont il calcule la cohomologie. Si $g = \mu(S)$ désigne la „classe fondamentale“ de $H^n(\partial_n^p, Z_p)$, toutes les puissances de Steenrod $P_{(p)}^k(g)$ sont non nulles dans $H(\partial_n^p)$ pour $2k < n$; ceci nécessite l'introduction d'un voisinage tubulaire de la diagonale dans ∂_n^p , à fibre lenticulaire. L'A. aborde ensuite le problème de la destruction des groupes d'homotopie $\pi_q(S^n)$, $q > n$, par injection diagonale de S^n dans son produit symétrique: il montre que les groupes π_{n+1}, π_{n+2} sont tués dans le produit ∂_n^2 d'ordre 2, et la composante 3-pri-

maire de π_{n+3} est tuée par injection dans ϑ_n^3 , l'obstruction correspondante étant définie par $P_{(3)}^1$. Il utilise à cet effet une subdivision cellulaire de ϑ_n^2 indiquée par N. Steenrod.

R. Thom.

Blanchard, André: La cohomologie réelle d'un espace fibré à fibre kählérienne. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1342—1343 (1954).

In Fortsetzung seiner Untersuchungen über Faserbündel (dies. Zbl. **55**, 421) beweist Verf. die folgenden interessanten Sätze, die sich auf stetige Faserbündel beziehen. Ref. zitiert: Théorème 1. — Soit $E(B, F)$ un espace fibré compact connexe dont la fibre F connexe est pseudo-kählérienne. On suppose que le groupe de cohomologie réelle $H^1(F)$ et la classe de cohomologie réelle Q de degré deux de F définie par la structure pseudo-kählérienne sont invariants par le groupe de Poincaré de la base. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que Q soit induite par une classe de cohomologie de l'espace est que la transgression $H^1(F) \rightarrow H^2(B)$ soit nulle. — Théorème 2. — Soit $E(B, F)$ un espace fibré compact connexe à fibre pseudo-kählérienne connexe, si $H^*(F)$ est invariant par le groupe de Poincaré de B , la nullité de la transgression $H^1(F) \rightarrow H^2(B)$ entraîne la nullité de toutes les différentielles de Leray: les espaces vectoriels de cohomologie réelle de E sont alors isomorphes à ceux de $B \times F$. — Corollaire. — $E(B, F)$ étant une variété fibrée-algébrique complète (en géométrie algébrique classique) les espaces vectoriels de cohomologie réelle de E sont isomorphes à ceux de $B \times F$. F. Hirzebruch.

Nakano, Shigeo: On a certain type of analytic fiber bundles. Proc. Japan Acad. **30**, 542—547 (1954).

Es sei V eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit und \mathfrak{B} ein komplex-analytisches Faserbündel über V mit der komplexen Geraden C als Faser und der affinen Gruppe $(z' = az + b)$ als Strukturgruppe (abgekürzt A.C.L.B. = affine complex line bundle). Auf Grund des natürlichen Homomorphismus der affinen Gruppe in die multiplikative Gruppe C^* der komplexen Zahlen bestimmt \mathfrak{B} ein gewöhnliches komplexes Geradenbündel mit C als Faser und C^* als Strukturgruppe (abgekürzt C.L.B. = complex line bundle). Verf. ordnet dem Faserbündel \mathfrak{B} ein Element $c(\mathfrak{B})$ in dem komplexen Vektorraum $H^{0,1}(\mathfrak{A})$ zu. [Mit $H^{p,q}(\mathfrak{A})$ wird die $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppe der differenzierbaren Formen von V vom Typ (p, q) mit Koeffizienten in \mathfrak{A} bezeichnet. Vgl. z. B. Kodaira, dies. Zbl. **51**, 145.] Das Bündel \mathfrak{B} sei durch lokale Produktdarstellungen $U_i \times C$ gegeben mit den Koordinatentransformationen $z_i = a_{ij} z_j + b_{ij}$, wo a_{ij}, b_{ij} in $U_i \cap U_j$ holomorphe Funktionen sind. Es gibt immer einen differenzierbaren Schnitt in \mathfrak{B} , der in bezug auf die Produktdarstellungen durch differenzierbare Funktionen $\alpha_i: U_i \rightarrow C$ mit $\alpha_i = a_{ij} \alpha_j + b_{ij}$ gegeben sei. Dann ist $\bar{\partial} \alpha_i = a_{ij} \bar{\partial} \alpha_j$ und damit wird durch $(\bar{\partial} \alpha_i)$ ein Element von $H^{0,1}(\mathfrak{A})$ repräsentiert. Das ist $c(\mathfrak{B})$. Es sei nun \mathfrak{A} fest vorgegeben, V werde als kompakt vorausgesetzt. Zwei zu \mathfrak{A} gehörige A.C.L.B. \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' sind dann und nur dann isomorph, wenn $c(\mathfrak{B}) = a c(\mathfrak{B}')$, wo a eine von 0 verschiedene komplexe Zahl ist. Ferner tritt jedes Element von $H^{0,1}(\mathfrak{A})$ als $c(\mathfrak{B})$ für ein geeignetes zu \mathfrak{A} gehöriges A.C.L.B. \mathfrak{B} auf. Insbesondere gehört das Nullelement 0 von $H^{0,1}(\mathfrak{A})$ zu \mathfrak{A} aufgefaßt als A.C.L.B. Die Gesamtheit der Isomorphieklassen aller zu \mathfrak{A} gehörigen A.C.L.B. wird damit eineindeutig auf die Menge $\{0\} \cup P^{0,1}(\mathfrak{A})$ abgebildet, wo $P^{0,1}(\mathfrak{A})$ der komplexe projektive Raum der durch 0 gehenden Geraden des (endlich-dimensionalen) komplexen Vektorraumes $H^{0,1}(\mathfrak{A})$ ist. Wenn V eine (in einen komplexen projektiven Raum einbettbare) algebraische Mannigfaltigkeit ist, dann kann \mathfrak{A} durch einen Divisor D gegeben werden (Kodaira-Spencer). Wenn insbesondere V eine algebraische Kurve ist, dann ist $H^{0,1}(\mathfrak{A})$ mit dem dualen Raum von $H^{1,0}(\mathfrak{A}^{-1})$ in natürlicher Weise zu identifizieren (Kodaira-Serre). Also ist $c(\mathfrak{B})$ eine Linearform über $H^{0,1}(\mathfrak{A}^{-1})$. Nun ist $H^{0,1}(\mathfrak{A}^{-1})$ in natürlicher Weise isomorph zu $\mathfrak{B}(-D)$, dem komplexen Vektorraum der meromorphen Differential-

formen ω von V mit $(\omega) \leq D$. Hier bezeichnet (ω) den Divisor von ω . - A. Weil hat die Theorie der A.C.L.B. über einer algebraischen Kurve in rein algebraischer Weise für einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper beliebiger Charakteristik durchgeführt (Fibre spaces in algebraic geometry, Lecture notes, Chicago 1952). Auch Weil ordnet \mathfrak{B} eine Invariante $c(\mathfrak{B})$ zu. Diese Weilsche Invariante ist eine Linearform über $\mathfrak{B}(-D)$ und wird mit Hilfe von Residuen definiert. Verf. zeigt, daß seine Invariante im Fall der algebraischen Kurven mit der von Weil übereinstimmt. Anmerkung des Ref.: Die vom Verf. behandelte Frage kann als Spezialfall der folgenden allgemeineren Fragestellung aufgefaßt werden, die in letzter Zeit von mehreren Autoren behandelt wurde: Gegeben seien komplex-analytische Vektorraum-Bündel W', W'' über V . Man bestimme die Gesamtheit der Isomorphieklassen von komplex-analytischen Vektorraum-Bündeln W über V , die mit W', W'' in einer exakten Sequenz $0 \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow W'' \rightarrow 0$ stehen können.

F. Hirzebruch.

Kawada, Yukiyo: On analytic line bundles with the affine structural group.

Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 4, 85—91 (1954).

Verf. untersucht im Anschluß an Nakano (siehe vorstehendes Referat) ebenfalls die affinen komplexen Geradenbündel (A.C.L.B.) über einer komplexen Mannigfaltigkeit V . Wir verwenden hier die Bezeichnungen des vorstehenden Referats. Wenn \mathfrak{B} durch Koordinatentransformationen (a_{ij}, b_{ij}) gegeben ist, dann kann man \mathfrak{B} mit Hilfe der b_{ij} unmittelbar ein Element $c(\mathfrak{B})$ in der ersten Cohomologiegruppe von V mit Koeffizienten in der Garbe der Keime von lokalen holomorphen Schnitten von \mathfrak{A} zuordnen. Diese Cohomologiegruppe ist nach Dolbeault-Kodaira-Serre in natürlicher Weise isomorph zu $H^{0,1}(\mathfrak{A})$. Verf. zeigt, daß seine Invariante $c(\mathfrak{B})$ auf Grund dieses natürlichen Isomorphismus mit der von Nakano übereinstimmt. Nun sei V wieder eine (projektive) algebraische Mannigfaltigkeit. Verf. beweist mit Hilfe von Ergebnissen von Kodaira-Spencer, daß dann die a_{ij}, b_{ij} von \mathfrak{B} in folgender Form geschrieben werden können: $a_{ij} = \delta_i \delta_j$, $b_{ij} = \delta_i(\sigma_i - \sigma_j)$, wo die δ_i, σ_i in U_i meromorphe Funktionen sind. \mathfrak{B} und \mathfrak{A} sind dann und nur dann isomorph als A.C.L.B., wenn \mathfrak{B} einen holomorphen Schnitt besitzt. Ein solcher holomorpher Schnitt existiert dann und nur dann, wenn es eine globale meromorphe Funktion φ gibt, für die $\delta_i \varphi = \sigma_i$ in U_i holomorph ist. Die Existenz einer solchen meromorphen Funktion φ ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden von $c(\mathfrak{B})$. Wenn insbesondere \mathfrak{A} das triviale C.L.B. ist ($\delta_i = 1$), dann bestimmt eine additive meromorphe Cousinverteilung ein zu \mathfrak{A} gehöriges affines \mathfrak{B} und umgekehrt. Das Cousinproblem ist dann und nur dann lösbar, wenn \mathfrak{B} als A.C.L.B. trivial ist, d. h. wenn $c(\mathfrak{B}) = 0$. Dies führt zu bekannten Tatsachen; es werde hier nur daran erinnert, daß über V dann und nur dann jedes additive meromorphe Cousinproblem lösbar ist, wenn die erste Bettische Zahl b_1 von V verschwindet. ($b_1 = 2 \dim_{\mathbb{C}} H^{0,1}(\mathfrak{A})$, wenn \mathfrak{A} das triviale C.L.B. ist.) Verf. zeigt, daß man einem durch meromorphe Funktionen δ_i, σ_i gegebenen A.C.L.B. \mathfrak{B} über V einen singularitätenfreien „Poldivisor“ zuordnen kann und daß das Verschwinden von $c(\mathfrak{B})$ auch mit Hilfe von bezüglich des Poldivisors gebildeten Residuen formuliert werden kann. Dies führt für den Fall einer algebraischen Kurve dann wieder auf die Untersuchungen von A. Weil.

F. Hirzebruch.

Ford jr., Lester R.: Homeomorphism groups and coset spaces. Trans. Amer. math. Soc. 77, 490—497 (1954).

Es sei X ein Hausdorffscher Raum, G eine Gruppe topologischer Abbildungen von X auf sich, C_x die den Punkt x festlassende Untergruppe von G und $\eta: G/C_x \rightarrow X$ durch $\eta(g(C_x)) = g(x)$ definiert. Besitzt X eine uniforme Struktur, bezüglich welcher jedes Element von G gleichmäßig stetig ist, so wird G zu einer topologischen Gruppe, falls es mit der von der gleichmäßigen Konvergenz induzierten Topologie versehen ist. Ist G transitiv über X , so heißt eine Topologie von G „vernünftig“

über X , falls damit G eine topologische Gruppe und η eine topologische Abbildung von G/C_x auf X ist. X heißt S. L. H. (stark lokal homogen) falls jeder Punkt x beliebig kleine Umgebungen $U(x)$ besitzt derart, daß zu jedem $z \in U(x)$ eine topologische Abbildung g mit $g(x) = z$ gehört, die alle Punkte außerhalb $U(x)$ fest läßt. Ist die Gruppe G aller topologischen Abbildungen von X auf sich transitiv und X vollständig regulär sowie S. H. L., so ist jede von einer uniformen Struktur von X induzierte Topologie von G vernünftig über X . Jede Mannigfaltigkeit ist S. L. H. und besitzt eine vernünftige Gruppe topologischer Abbildungen. Die Arbeit schließt mit zwei Beispielen; das erste besteht aus einem homogenen vollständig regulären Raum, der eine vernünftige Gruppe topologischer Abbildungen besitzt ohne S. L. H. zu sein; das zweite besteht aus einem homogenen vollständig regulären Raum, für den keine transitive Gruppe topologischer Abbildungen vernünftig sein kann.

T. Ganea.

Franz, Wolfgang: Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten. Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin **3** (1953/54), 439—443 (1954).

Sind \mathfrak{M} und \mathfrak{N} zwei Räume und f und g Abbildungen von \mathfrak{M} in \mathfrak{N} , so heißt der Punkt p von \mathfrak{M} Koinzidenzpunkt von f und g , wenn $f(p) = g(p)$ in \mathfrak{N} ist. In Analogie zu der Frage nach der Mindestzahl von Fixpunkten in einer Klasse von Selbstabbildungen entsteht die Frage nach der Mindestzahl von Koinzidenzpunkten zweier Abbildungsklassen für Abbildungen von \mathfrak{M} in \mathfrak{N} . Für Dimensionen von \mathfrak{M} größer als 2 läßt sich diese Zahl mit ähnlichen Methoden wie bei dem Fixpunktproblem bestimmen. Sie ist gleich der Anzahl der wesentlichen Koinzidenzpunktklassen. Genauer kann man in jeder Koinzidenzpunktklasse endlich viele Koinzidenzpunkte mit vorgeschriebenen Indizes, deren Summe gleich dem Index der Klasse ist, erzielen.

K. Reidemeister.

Tamura, Shō: On the theorem of Jordan-Brouwer-Alexander. Japanese J. Math. **24**, 1—52 (1954).

Der genannte Satz besagt, daß der Euklidische E_n durch jedes topologische Bild der $(n-1)$ -Sphäre S_{n-1} zerlegt wird. Den E_n kann man definieren durch Axiome 1. der Inzidenz, 2. der Ordnung, 3. der Kongruenz, 4. der Parallelität und 5. der Stetigkeit. Verf. zeigt, daß man den obigen Satz auch formulieren und beweisen kann unter bloßer Verwendung der Axiomgruppen 1, 2 und 5 (oder teilweise sogar nur von 1 und 2). An die Stelle der S_{n-1} tritt dabei ein allgemeinerer Begriff, der auch den Begriff der $(n-1)$ -dimensionalen Pseudomannigfaltigkeit umfaßt.

G. Nöbeling.

Schubert, Horst: Über eine numerische Knoteninvariante. Math. Z. **61**, 245—288 (1954).

Die Brückendarstellung eines Knotens κ besteht aus Streckenzügen in 2 parallelen Ebenen und zu denselben senkrechten Strecken, deren Anzahl gerade ist. Die Hälfte dieser Anzahl heißt die Brückenzahl der Darstellung und das Minimum dieser Anzahlen die minimale Brückenzahl $b(\kappa)$ des Knotens. Der Kreis ist der einzige Knoten κ mit $b(\kappa) = 1$. Die neue numerische Invariante hat bemerkenswerte Eigenschaften, insbesondere für Knoten κ mit Begleitknoten λ . Ist λ ein Begleitknoten der Ordnung χ , so ist $\chi b(\lambda) \leq b(\kappa)$. Für $\chi = 1$ ist stets $b(\lambda) \leq b(\kappa)$. Ist κ ein Schlingknoten mit dem Diagonalknoten λ , so ist $2b(\lambda) = b(\kappa)$. Für Schlauchknoten κ der Fädenzahl χ mit Träger λ gilt $\chi b(\lambda) = b(\kappa)$. Schließlich verhält sich die Zahl $b(\kappa) - 1$ bei Bildung des Knotenproduktes additiv. Die Beweise werden mit stückweis linearen Deformationen von Polygonen und Polyedern, ähnlich wie in der Abhandlung des Verf. über „Knoten und Vollringe“ (dies. Zbl. **51**, 404) geführt und beruhen vor allem auf der Ermittlung der Brückenform des Torus, die ähnlich wie die Brückendarstellung eines Knotens erklärt wird.

K. Reidemeister.

Poenaru, Valentin: Sur quelques théorèmes de la topologie plane. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Secţ. Şti. mat. fiz. **6**, 579—592, russ. u. französ. Zusammenfassg. 592, 593 (1954) [Rumänisch].

Theorem 1: There does not exist in the plane 5 Jordan regions D_i , $i = 1, \dots, 5$, such that a) the regions are disjoint, b) the boundaries of D_i and D_j , $i \neq j$, have at least 3 common points. Theorem 2: Let D_i , $i = 1, 2, 3$, be plane Jordan regions such that: A) the regions are disjoint, B) any two of their boundary curves have at least two points in common, C) there is a point P which belongs to the three boundaries; then either a) P is separated from the point at infinity by $\bigcup_{i=1}^3 D_i$, or b) one of the domains is separated from the point at infinity by the union of the closures of the other two.

T. Ganea.

Ringel, Gerhard: Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlechte $p > 0$. *J. reine angew. Math.* **193**, 11—38 (1954).

Verf. beweist: Auf allen geschlossenen, orientierbaren Flächen vom Geschlecht $p \geq 1$ stimmt die chromatische Zahl χ_p mit der Maximalzahl der Nachbargebiete v_p überein. Die beiden Zahlen sind definiert wie üblich; mehrfach zusammenhängende Länder sind zugelassen, und deren Grenzen dürfen aus mehreren geschlossenen Kurven bestehen. Verf. gewinnt sein Resultat mittels Ausbau und Modifikation der Methode, welche ihm früher zum Beweis desselben Satzes für nichtorientierbare Flächen diente. Im Mittelpunkt der Erörterungen stehen zwei Konstruktionsvorschriften. „Grundschemas“ (voneinander unabhängig), welche spezielle Typen orientierbarer, geschlossener Flächen mit spezieller Zerlegung definieren. Durch Ausschneiden von Löchern und Aufsetzen von Henkeln, auch mehrfachen, oder durch geeignetes Verheften von Lochrändern werden diese in neue geschlossene, derart in Länder zerschnittene Flächen übergeführt, daß jedes Land mit jedem andern benachbart ist. Durch eine Kette von Ungleichungen, die wesentlich aus diesen Konstruktionen fließen, wird dann für v_p eine Abschätzung nach unten erzielt, die, mit der bekannten Ungleichung von Heawood verknüpft, zum erwähnten Ergebnis führt. Für $p \leq 100$ werden einige ältere, von L. Heffter stammende Resultate hinzugezogen.

F. Baebler.

Angewandte Geometrie:

Zambó, J.: L'erreur moyenne des coordonnées d'un cheminement polygonal intercalé et la répartition la plus favorable des poids. *Acta techn. Acad. Sci. Hungar.* **9**, 191—201 u. russ., engl. u. deutsche Zusammenfassg. 202 (1954).

Die im geodätischen Schrifttum vielfach behandelte Fehlertheorie polygonaler Züge wird hier in Anpassung an die Praxis des Markscheiders für den speziellen Fall des an den Enden lediglich koordinatenmäßig angeschlossenen Polygonzugs ausführlich dargelegt. Von allgemeinen Ansätzen ausgehend werden Formeln für die mittleren Koordinatenfehler und für die Elemente der Fehlerellipse eines beliebigen Zugpunktes unter Berücksichtigung von Gewichten abgeleitet. Die Entwicklungen werden auch auf freie Züge ausgedehnt, die von einem Zwischenpunkt des beiderseits angeschlossenen Hauptzuges ausgehen. Für die Praxis besonders wertvoll sind die Untersuchungen über die günstigste Gewichtsverteilung bei mehrfacher, aber im einzelnen nicht gleich häufiger Messung der Strecken und Winkel. Aus den fehlertheoretischen Zusammenhängen werden Formeln abgeleitet, aus denen sich die für den optimalen Fall gültigen Wiederholungszahlen der Einzelmessungen ergeben, wobei angenommen wird, daß eine vorgeschriebene Lagegenauigkeit mit einem möglichst geringen Arbeitsaufwand erreicht werden soll. Hierzu ein Zahlenbeispiel.

W. Hofmann.

Theoretische Physik.

● Duhem, Pierre: The aim and structure of physical theory. Transl. by Philip P. Wiener. Princeton: Princeton University Press 1954. XXII, 344 p. \$ 6, —.

Englische Übersetzung des im Jahre 1906 erschienenen französischen Originals. Der Verf. ist ein bedeutender theoretischer Physiker, der sich viel mit Philosophie und Wissenschaftsgeschichte beschäftigt hat. In einer einfachen und klaren Sprache stellt er seine erstaunlich modern anmutenden wissenschaftstheoretischen und naturphilosophischen Gedanken dar. Er zeigt u. a. überzeugend, daß es unlogisch ist, eine physikalische Hypothese oder Theorie durch ein einzelnes Experiment beweisen oder widerlegen zu wollen. Ein wesentliches Anliegen ist die Befreiung der Physik von metaphysischen Vorurteilen, insbesondere von dem damals noch sehr verbreiteten Bedürfnis nach mechanischen Modellen. Ziel der physikalischen Theorie ist nach Duhem eine (dem Machschen Prinzip der Denkökonomie genügende und ein ästhetisches Gefühl befriedigende) ordnende Beschreibung der Naturgesetzmäßigkeiten mit hohem Voraussagewert. Bestritten wird also jeder metaphysische oder apologetische Beweiswert einer physikalischen Theorie. Dabei hält Duhem, der überzeugter Anhänger des römisch-katholischen Glaubens ist, metaphysische Aussagen außerhalb der Physik durchaus für sinnvoll. (Zwei im Anhang wiedergegebene Artikel behandeln die damit zusammenhängenden Fragen.) Gegenüber Poincaré vertritt Duhem (in Übereinstimmung mit Le Roy) die Meinung, daß jede Beschreibung experimenteller Fakten bereits physikalische Theorien voraussetzt. Der (in diesem Sinne) symbolische, approximative und provisorische Charakter der physikalischen Gesetze wird unterstrichen. Das Kapitel über mechanische Modelle enthält anregende Ausführungen über die verschiedenen menschlichen Denktypen, insbesondere über einen systematischen Unterschied zwischen den englischen und den kontinentalen Theorien.

G. Süßmann.

Drobot, S.: On dimensional analysis. Zastosowania Mat. 1, 234—270, russische und engl. Zusammenfassgn. 270—271, 271—272 (1954) [Polnisch].

Verf. untersucht die Lehre von den physikalischen Dimensionen (bzw. den physikalischen Ähnlichkeitstransformationen). Es wird folgendes Axiomensystem aufgestellt: 1. Es existiert eine Multiplikation der „Dimensionen“ mit folgenden Eigenschaften: a) $AB = BA$, b) $(AB)C = A(BC)$, c) $AX = B$ besitzt stets eine Lösung X ; 2. Es existiert eine Potenzierung (mit reellen Exponenten) mit den Eigenschaften: a) $A^{a+b} = A^a B^b$, b) $(AB)^a = A^a B^a$, c) $(A^a)^b = A^{ab}$, d) $A^1 = A$. Daraus werden verschiedene Sätze abgeleitet. Ausführliche Darstellung mit vielen physikalischen Beispielen.

G. Süßmann.

● **Finzi, B.: Teoria dei campi. Lezioni di fisica matematica tenute all'Università di Milano nell'anno accademico 1953-54 raccolte da B. Todeschini.** Milano: Tamburini 1954. 294 p. L. 1800.

In queste Lezioni che l'A. ha svolte all'Università di Milano vengono chiaramente esposti e tradotti formalmente i concetti che stanno a fondamento delle varie branche della Fisica matematica classica e moderna.

G. Lampariello.

Infeld, L. gemeinsam mit R. Ingarden, M. Krzyżański, J. Rayski, W. Rubino-wicz und W. Wrona: Die Bedeutung der modernen Physik für die Entwicklung der Mathematik. Hauptreferate 8. Polnisch. Math.-Kongr. 6. — 12. Sept. 1953 Warschau, 95—109 (1954).

Der Vortrag ist das Ergebnis der Arbeit eines Kollektivs von vier Physikern und zwei Mathematikern. Es werden mathematische Probleme der klassischen sowie der quantisierten Feldtheorie genannt, bei denen eine Zusammenarbeit zwischen Mathematikern und Physikern wünschenswert ist. Und zwar handelt es sich um das Verhalten von Singularitäten in der Gravitationstheorie und um das Divergenzproblem der Elementarteilchentheorie. Ein Zusammenhang zwischen der Methode der Feldquantisierung und der Theorie des starren Körpers wird erwähnt.

G. Süßmann.

Hosemann, R. und S. N. Bagehi: Die Berechnung der Lorentz-invarianten Struktur der Greenschen Grundlösung der sog. allgemeinen Wellengleichung mittels

Faltungoperationen im Minkowski-Raum und seinem Fourier-Raum. Z. Phys. **139**, 1—29 (1954).

Unter Benutzung von Resultaten aus zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. **50**, 399 und **57**, 397) bestimmen Verff. eine Grundlösung $\gamma(x, ct) = \gamma(x)$ der vierdimensionalen Wellengleichung $(\Delta^2 - 4\pi^2 x^2) \cdot \gamma(x) = 0$, welche durch die Nebenbedingung $\gamma(x, ct) = 0$ für $t > 0$ eindeutig festgelegt ist. Die so gefundene und im einzelnen diskutierte Lösung stimmt mit der von J. Schwinger (dies. Zbl. **32**, 94) konstruierten Grundlösung, die bei Schwinger auch durch eine Lorentz-invariante Nebenbedingung festgelegt ist, überein.

H. G. Tillmann.

Gurevič, M. I.: Über gewisse Lösungen der Wellengleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 385—386 (1954) [Russisch].

L'A. ramène l'équation des ondes cylindriques (1) $\partial^2 q / \partial x^2 + \partial^2 q / \partial y^2 - \partial^2 q / \partial z^2 = 0$ à la forme (2) $\partial^2 q / \partial \sigma^2 + \partial^2 q / \partial \delta^2 = (1 \operatorname{sh}^2 \delta) (\partial / \partial r) (r^2 \partial q / \partial r)$ en posant $x = -r \cos \sigma \operatorname{sh} \delta$, $y = -r \sin \sigma \operatorname{sh} \delta$, $z = -r \operatorname{cth} \delta$, et cherche la solution de (2) sous la forme $q = r \varphi_1 + r^2 \varphi_2 + \dots + r^n \varphi_n + \dots$, les fonctions φ_n ($n = 1, 2, \dots$) satisfaisant aux équations (3) $\partial^2 q_n / \partial \sigma^2 + \partial^2 q_n / \partial \delta^2 - [n(n+1) \operatorname{sh}^2 \delta] \varphi_n = 0$. L'équation (3) admet des solutions de la forme $q_n = \operatorname{sh}^{n+1} \delta (\operatorname{sh} \delta \partial / \partial \delta)^n \operatorname{Re} F_n(\omega) / \operatorname{sh} \delta$, où $\omega = \delta + i\sigma$ et $F_n(\omega)$ est une fonction analytique arbitraire. Dans la seconde partie de la note l'A. fait l'analyse de la solution obtenue de l'équation (1).

M. Krzyżański.

Ionescu, Dan Gh.: Sur le vecteur de Galerkin dans la théorie de l'élasticité et dans l'hydrodynamique des fluides visqueux. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. **6**, 555—569, russ. u. français. Zusammenfassg. 569—570, 570—571 (1954) [Rumänisch].

D'après les résultats de Gr. C. Moisil (Sur les matrices associées à un système d'équations aux dérivées partielles, Ed. Acad. R. P. R. 1950 (en roumain)], les solutions du système $\sum_{j=1}^{1,n} P_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_j = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), aux variables x_1, \dots, x_n

et aux fonctions inconnues q_1, \dots, q_n , peuvent être représentées à l'aide des potentiels Ψ_j , moyennant les formules $q_i = \sum_{j=1}^{1,n} R_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi_j$. Ici $P_{ij}(X)$ et $R_{ij}(X)$ sont des matrices de polynômes. Si le déterminant $Q(X) = |P_{ij}(X)|$, qui est un polynôme en X_1, \dots, X_n , est décomposable en facteurs, à chaque diviseur $Q_j^*(X)$ correspond une condition $Q_j^*(\partial / \partial x) \Psi_j = 0$ que doit vérifier Ψ_j . Lorsque $Q_j^*(X) = S_1^1(X) \dots S_k^k(X)$, les polynômes S_1^1, \dots, S_k^k étant premiers entre eux, un théorème de T. Boggio permet de mettre Ψ_j sous la forme $\Psi_j = \sum_{p=1}^{1,k} \Psi_j^p(x)$, $\Psi_j^k(x)$

vérifiant la condition $S_j^k(\partial / \partial x) \Psi_j^k = 0$. L'A. applique successivement ces considérations algébriques aux systèmes d'équations aux dérivées partielles régissant les vibrations des corps élastiques avec ou sans amortissement, à celles de l'équilibre thermo-élastique et enfin à celles des écoulements lents des fluides visqueux incompressibles. La représentation des solutions au moyen de potentiels liés, analogue à celle de Galerkin, que l'A. obtient, entraîne certaines conséquences. Ainsi par exemple, pour les corps élastiques, toute onde intérieure est la superposition d'une onde de cisaillement et d'une onde irrotationnelle: l'état d'équilibre thermo-élastique est la superposition d'un état d'équilibre élastique et d'un état d'équilibre thermo-élastique irrotationnel. La représentation analogue à celle de Galerkin, pour les fluides visqueux en mouvement lent est obtenue également par la méthode des matrices associées de Gr. C. Moisil.

C. Iacob.

Mechanik:

● Geronimus, J(a). L.: S. W. Kowalewskaja, Mathematische Berechnung der Kreiselbewegung. I. W. Meschtscherski, Ein Vorläufer auf dem Gebiet der Raketen-

dynamik. Übersetzt aus: Skizzen über die Arbeiten russischer Koryphäen der Mechanik. Berlin: VEB Verlag Technik 1954. 76 S., 13 Bilder. kart. 4.— DM.

Nach einer kurzen Lebensbeschreibung von S. V. Kovalevskaja (1850—1891) (in der deutschen Literatur besser unter dem Namen Kowalewski bekannt) folgt eine Darstellung der Theorie der Kreiselbewegung, deren erster Abschnitt mit dem Kovalevskaja-Fall ($J_x = J_y = 2 J_z$, $z_0 = 0$) abschließt, und im zweiten Fall mit einer Übersicht über Arbeiten von Žukovsky, Bobylev-Steklov und Hess fortgesetzt wird. Andere Arbeiten, z. B. auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen wurden nur erwähnt. — I. V. Meščersky (1859—1939) hat sich vorwiegend mit der Bewegung von Körpern beschäftigt, deren Masse während der Bewegung zu- oder abnimmt, und bereits 1893 darüber vorgetragen. Die von ihm gefundenen Gleichungen pflegt man sonst nach Levi-Civita (1928) zu benennen. Bei den Anwendungen der Theorie wird aber hauptsächlich an astronomische Fälle gedacht, z. B. Zunahme der Erdmasse durch Meteoriten u. ä. — Ein Literaturverzeichnis, das vorwiegend die Arbeiten russischer Autoren zu den behandelten Teilgebieten der Mechanik auführt, beschließt jeweils die beiden Teile des Bändchens.

H. Molitz.

Agostinelli, Cataldo: Sistemi di equazioni differenziali normali del I ordine che ammettono speciali relazioni invarianti e che interessano il movimento di sistemi anolonomi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 136—141 (1954).

Objetto della Nota è di stabilire delle condizioni necessarie e sufficienti affinché un sistema differenziale normale in n funzioni incognite di una variabile ammetta delle soluzioni stazionarie comprendenti alcune incognite ridotte a costanti, tali inoltre che ad esse soluzioni resti associato un gruppo di relazioni invarianti.

G. Lampariello.

Salvadori, Luigi: Sulla stabilità dei moti merostatici di particolari sistemi anolonomi. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. 20 (92), 66—78 (1954).

Es handelt sich um die Stabilitätsbedingungen eines nicht holonomen Systems mit den Bindungsgleichungen $\sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_j = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$; b_{ij} = Funktionen der Lagrangeschen Koordinaten q_1, \dots, q_n) und mit der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2} A_1 \dot{q}_1^2 + \dots + \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$, ($A_1 = \text{konst.}$, a_{ij} = Funktionen von q_1, \dots, q_n). Verf. beweist folgenden Satz: Je nachdem \bar{W} in q_0 ein Maximum oder ein Minimum besitzt, ist die entsprechende statische Lösung eine stabile bzw. eine labile. Dabei soll $\bar{W} = U - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n A_i e_i^2$ heißen. (U = Kräftefunktion, e_i = Quasikoordinaten.) Der Satz wird am Ende auf den Fall der auf einer Kugelfläche rollenden, kreisförmigen Scheibe, die der Anziehung einer Zentralkraft unterworfen ist, angewandt.

V. Válcovici.

Kuchtenko, A. I.: Über einen Typus von dynamischen Systemen mit anholonomen Bindungen. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 148—151 und russ. Zusammenfassg. 151 (1954) [Ukrainisch].

Storlazzi, Rosetta: Sul moto di un punto in un piano con assegnate condizioni per la velocità. Matematiche 9, 106—112 (1954).

Integrazione del sistema differenziale $dx/dt = \lambda \sin(\mu t) x + \lambda \cos(\mu t) y$, $dy/dt = \lambda \cos(\mu t) x - \lambda \sin(\mu t) y$ essendo λ e μ costanti non nulle.

G. Lampariello.

Masotti, Arnaldo: Sui moti centrali di un punto vincolato. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 87 (III. Ser. 18), 515—529 (1954).

The author considers the movement of a point on a smooth curve for which the sum of the applied force and the reaction of the curve is a central force. Several particular cases are considered.

M. M. Peixoto.

Behrbohm, Hermann: Brachystochrone Flugbahnen im Raum bei zeitlich veränderlichem Fluggewicht. *Jahrbuch wiss. Ges. Luftfahrt* 1954, 76–94 (1954).

Ein Flugkörper bewege sich im Raume beim Schiebewinkel Null von einem Anfangs- zu einem Endpunkte. In bekannter Weise mögen abhängen: Das Gewicht von der Zeit, der Luftwiderstand von der Machzahl, der Flughöhe und (quadratisch) vom Antrieb, der Schub — der immer in Bahrichtung wirken möge — von der Machzahl und der Flughöhe. Gesucht sind die Bahnen kürzester Flugzeit bei vorgeschriebenen Randbedingungen. Die notwendigen Eulerschen Differentialgleichungen werden angegeben und samt den Randbedingungen diskutiert. Bezüglich Sonderfällen vergleiche man Verf., dies. Zbl. 56, 328; 65, 393. *K. Nickel.*

García, Godofredo: Über die gyroskopische Bewegung von Geschossen. *Actas Acad. nac. Ci. exact., fís. natur. Lima* 17, 51–65 (1954) [Spanisch].

Several considerations are made concerning a quadratic and a cubic law of resistance. *M. M. Peixoto.*

Agostinelli, Cataldo: Su una soluzione periodica del problema ristretto dei tre corpi più generale di quella di Hill. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* 13, 131–151 (1954).

Es handelt sich um die Auffindung einer periodischen Lösung (x, y) der beiden Differentialgleichungen

$$\ddot{x} - 2n \dot{y} + f m_0 x/r^3 - (n^2 + 2n_1^2) x - 3n_1^2 R^{-1} (x^2 - y^2/2) = 0$$

$$\ddot{y} + 2n \dot{x} + f m_0 y/r^3 + (n_1^2 - n^2) y + 2n_1^2 R^{-1} x y = 0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

m_0 Masse des Planeten, m_1 Masse der Sonne, $n^2 = f(m_0 + m_1) R^2$, $n_1^2 = f m_1 R^2$, R Entfernung Planet — Sonne, die die Bewegung eines Satelliten um einen Planeten bei Berücksichtigung der Glieder der ersten Ordnung in der Sonnenparallaxe charakterisieren. Es werden für x, y Reihenentwicklungen nach den \cos bzw. \sin der Vielfachen von $(n_0 - n)(t - t_0)$ (n_0 mittlere Bewegung des Satelliten) angesetzt und die Gleichungen für die unbestimmten Koeffizienten abgeleitet; die ersten Koeffizienten werden explicite dargestellt (vgl. die frühere Arbeit des Verf., dies. Zbl. 57, 398).

O. Volk.

Mjasnikov, P. V.: Eine neue Methode für die Aussonderung einer Klasse integrierbarer Fälle der Bewegung vom allgemeinen Problem der Rotation eines schweren festen Körpers um einen Fixpunkt. *Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski* 172, Mech. 5, 143–162 (1954) [Russisch].

Le problème du mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe et les idées exposées aux Mémoires de S. Kowalevski [Acta math. 12, 177–232 (1889), 14, 81–94 (1899)] sont aujourd'hui d'un grand intérêt en Russie. Bogojavlenski dans sa dissertation (Inst. meh. Akad. Nauk SSSR), changeant un peu la méthode proposée de S. Kowalevski, a démontré la possibilité de tirer du problème général tous les cas connus des mouvements généraux et spéciaux. En cet article l'A. donne une nouvelle méthode concernant au même problème. La méthode proposée est très simple par sa idée et surtout par sa représentation géométrique (voir ce Zbl. 52, 202). Elle permet d'établir la légalité d'existence d'une intégrale algébrique de l'intégrale première en beaucoup de cas du mouvement et donne aussi, par les paroles d'auteur, la possibilité de découvrir les nouveaux cas du mouvement. On introduit le plan caractéristique (K) en point fixe, passant par les vecteurs de la vitesse angulaire et du moment cinétique relatif à ce point, dont l'équation, par rapport aux axes principaux d'inertie, est $(B - C) q r x + (C - A) r p y + (A - B) p q z = 0$. En utilisant des équations dynamiques d'Euler et supposant que le centre de gravité $C_0(x_0, y_0, z_0)$ est en ce plan on obtient la condition $A p x_0 + B q y_0 + C r z_0 = m_0 = \text{const.}$, quelle représente la quatrième intégrale du mouvement. C'est sur cette existence qu'est fondé la méthode d'A.: „Les positions possibles

du centre de gravité sont les lieux des points d'intersections des plans caractéristiques avec l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe⁴. Par les diverses positions du centre C_0 on peut démontrer la possibilité des cas différents du mouvement et aussi les conditions nécessaires pour leur existence. Les mouvements sont divisés en deux classes: I. les cas classiques d'Euler-Poinsot, de Lagrange-Poisson et de Bobilev-Steklov (1896), II. les cas des mouvements permanents et pendulaires. le cas du mouvement avec la symétrie cinématique totale et enfin le cas de Hess-Appelrot [Math. Ann. 37, 153 - 181 (1890)]. - I. On suppose que C_0 est en plan K et en plans principaux d'inertie $x = 0$, $y = 0$ a) $A \neq B$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (le cas d'Euler-Poinsot), b) $A = B$, $p = 0$, $q = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 \neq 0$ (le cas de Lagrange-Poisson), c) $A \neq B \neq C$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 \neq 0$, pour (α) $p = 0$, $2B = C$ (le cas de Bobilev-Steklov), (β) $q = 0$, $2A = C$. II. On suppose que C_0 est en K et en plan principal d'inertie: $A \geq B \geq C$ et les semi-axes d'ellipsoïde $a(Ox) \leq b(Oy) \leq c(Oz)$. 1° C_0 est en K et en plan $x = 0$: a) $A \neq B \neq C$, $p \neq 0$, (la rotation permanente autour de l'axe vertical fixe Oz); b) $A = B = C$, $p = 0$, $q \neq 0$, $r = 0$, $\sin \theta = 0$ (le cas de la toupie dormante) · $\sin \varphi = 0$ (la rotation permanente); c) $p \neq 0$, $q_0 = r_0 = 0$, $m_0 = 0$ (le cas du mouvement pendulaire autour de l'axe Oy); d) $A = B = C$, $m_0 \neq 0$ (le gyroscope sphérique). 2° C_0 est en K et en plan $y = 0$: a) $m'_0 \neq 0$, $y_0 = 0$ (le cas de Hess-Appelrot); b) $m'_0 = 0$, $p = r = 0$ (le cas du mouvement pendulaire), c) $A \neq B \neq C$, $m'_0 = 0$ (le mouvement permanent autour Ox). 3° C_0 est en K et en plan $z = 0$: - ne donne pas des cas nouveaux. La méthode peut être généralisée en élarguant ainsi le domaine d'application. Par exemple, soient $y_0 = 0$, $(B - C)r x_0 + (A - B)p z_0 = \text{const}$, ils y existent deux modes de la résolution: général et particulier. Le premier est très complexe, le second est traité par Grioli (ce Zbl. 31, 38). D. Rašković.

● **Santen, G. W. van: Einführung in das Gebiet der mechanischen Schwingungen.** Hamburg: Philip's Technische Bibliothek 1954. XV, 314 S., 216 Abb. 21,50 DM.

Die meisten der in den verschiedenen Zweigen des Maschinenbaues auftretenden Schwingungen sind nachteiliger Natur, entweder unangenehm oder unter Umständen sogar gefahrbringend. Aus diesem Grunde jedoch ist ein eingehenderes Studium solcher Erscheinungen, ihrer Beseitigung sowie des gegenwärtigen Standes auf diesem Gebiet nicht nur von höchstem Interesse, sondern sogar notwendig. — Zahlreiche Veröffentlichungen der letzten Jahrzehnte sind der großen praktischen Bedeutung der Schwingungstechnik gerecht geworden. So wurde von mathematischer Seite eine wohl begründete theoretische Grundlage zur technischen Schwingungslehre geschaffen. Weiter befaßt sich eine große Zahl von Arbeiten auch mit der praktischen Seite der Schwingungslehre, deren Schrifttum doch noch eine Lücke aufwies. Es fehlte bisher an einer für den Ingenieur gut verständlichen, das ganze Gebiet umfassenden Darstellung. Diese Lücke kann mit dem Erscheinen dieses Buches als geschlossen gelten. Der Verf. hat es verstanden, nicht nur die sehr weit verzweigten praktischen Anwendungen, sondern auch die etwas schwierigen theoretischen Grundlagen der Schwingungstechnik in eine für den in der technischen Praxis stehenden Ingenieur verständliche Gestalt zu kleiden, wozu die geschickt ausgewählten Beispiele wesentlich beitragen. Der Arbeitsbereich des Verf., der zur Entwicklungsgruppe der Philips-Werke in Eindhoven gehört, fällt in das Gebiet der mechanischen Schwingungen. In einer Umgebung, in der hauptsächlich elektrische und elektronische Entwicklungen stattfinden, ist es nicht weiter verwunderlich, daß Betrachtungen über Gleichnisse zwischen mechanischen und elektrischen Schwingungen angeregt werden. Aber gerade durch Betrachtungen dieser Gleichnisse wird es bei schwierigeren mechanischen Schwingungsgebilden erst möglich, eine Lösung durch Umwandlung dieses mechanischen Systems in ein gleichwertiges elektrisches Schwingungssystem zu finden, wodurch dann die von der elektrischen Wechselstromtechnik

weitgehend entwickelten Rechenmethoden Anwendung finden können. — In einer so umfassenden Darstellung der mechanischen Schwingungstechnik wie der vorliegenden dürfte auch die Behandlung des Schalls, des Ultraschalls sowie der Seismologie nicht fehlen. Für viele Ingenieure dürfte das Kapitel über Gasschwingungen in Verbrennungsmotoren von besonderem Interesse sein. Die zahlreichen weiteren praktischen Anwendungen der Schwingungstechnik, wie z. B. das Auswuchten eines rotierenden Maschinenteils, das Gebiet der Schwingungsbeanspruchung und viele andere seien nur nebenher erwähnt. — [Einige Druckfehler sind zu berichtigen: In der Fußnote 1) auf S. 35 wird der Name Timoshenko in einer sonst nicht üblichen Weise geschrieben. In Gl. (120) S. 48 gehört der Index zum Buchstaben P und nicht zur Grundzahl e des natürlichen Logarithmus. Auf S. 60, Zeile 8 von unten muß es heißen: $\dot{Q} = dQ/dt = i$; auf S. 61 muß die Gleichung in der linken Spalte der Tabelle VI („alter“ Analogie) lauten: $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = e$.] R. Öran Olsson.

Chochlov, R. V.: Zur Theorie der Synchronisation auf Untertönen. Vestnik Moskovsk. Univ. 9, Nr. 12 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 8), 33—43 (1954) [Russisch].

In der Arbeit wird die Theorie der Synchronisation von Thomsonschen Eigenschwingungssystemen durch eine kleine harmonische äußere Kraft auf einem Unterton des Systems gegeben. — §1 enthält die Stellung des Problems und die Ableitung der verkürzten Gleichungen, die den Synchronisationsprozeß beschreiben. — Im §2 werden diese verkürzten Gleichungen für den Fall einer kleinen äußeren Kraft vereinfacht. Auf Grund der Lösung der vereinfachten Gleichungen erfolgt die Diskussion des Vorgangs für „großen“ Synchronisationsparameter. Ausdrücke für die Breite des Synchronisationsbandes, für die Phase zwischen der erzwungenen Kraft und der synchronisierten Eigenschwingung, für die Amplitude innerhalb und außerhalb des Synchronisationsbandes und für die Periode der Modulation außerhalb desselben werden erhalten. — Im §3 werden die verkürzten Gleichungen für den Fall einer kleinen äußeren Kraft und „kleinen“ Parameter der Synchronisation vereinfacht. Es wird festgestellt, daß in diesem Fall das Verhalten des Systems sowohl innerhalb als auch außerhalb des Synchronisationsbandes eine Reihe von Singularitäten aufweist. So sind innerhalb des Synchronisationsbandes für den kleinen Parameter β Sprünge der Phase und Amplitude der Eigenschwingungen bei einer Änderung der Verstimmung möglich. Für den kleinen Parameter α ist ein kompliziertes Verhalten der Amplitude innerhalb des Synchronisationsbandes möglich, das durch das Vorhandensein mehrerer Maxima und Minima bei einer Änderung der Verstimmung charakterisiert wird.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Malkin, I. G.: Über die fastperiodischen Schwingungen nicht-linearer, nicht-autonomer Systeme. Priklad. Mat. Mech. 18, 681—704 (1954) [Russisch].

Ausgehend von einer Arbeit von G. I. Birjuk [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 5—7 (1954)] stellt der Verf. einige allgemeine Sätze über die Existenz der fastperiodischen Lösungen eines nichtlinearen Systems von Differentialgleichungen auf, wenn es einen kleinen Parameter μ enthält und von folgender Form ist

$$(1) \quad dx_s/dt = X_s(t, x_1, \dots, x_n) + \mu X'_s(t, x_1, \dots, x_n, \mu), \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Dabei sind die X_s in bezug auf t stetige und periodische, die X'_s aber fastperiodische und in der Form der Fourierschen Reihen mit endlich vielen Gliedern darstellbare Funktionen. Es wird noch angenommen, daß sich bei $\mu = 0$ die fastperiodischen Lösungen des Systems (1) in die periodischen Lösungen des „erzeugenden“ Systems

$$(2) \quad dx_s^0/dt = X_s(t, x_1^0, \dots, x_n^0)$$

verwandeln. Zur Berechnung der erwähnten fastperiodischen Lösungen wird ein konvergentes Verfahren der schrittweisen Näherungen aufgestellt. Man unterscheidet zwei Fälle: das „erzeugende“ System (2) hat nur eine isolierte Lösung oder es hat eine k -parametrische Familie von periodischen Lösungen. Zum Schluß untersucht der Verf. noch die Stabilität der gefundenen Lösungen. T. P. Angeltich.

Nicolau, Edmond: L'étude d'un système différentiel non linéaire par une méthode électronique. Acad. Republ. popul. Roum. Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz. 6, 945—951, russ. u. französ. Zusammenfassg. 952, 952—953 (1954) [Rumänisch].

L'A. montre la manière dont on peut étudier le système différentiel non linéaire:

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -k^2 x + \mu f(x, y, \mu)$$

par une méthode électronique. La méthode électronique que l'A. décrit permet d'approfondir les propriétés du système; l'étude est purement expérimentale. Dans le cas de la non-linéarité „faible“, on retrouve les propriétés connues de la théorie classique de la „méthode du petit paramètre“. Pour la non-linéarité „forte“, on observe et étudie les point singuliers des trajectoires fermées du plan des phases. Französ. Zusammenfassg.

Kolesnikov, K. S.: Die Deutung der experimentellen Kurven von gedämpften Schwingungen nach der Methode von I. Newton. Inženernyj Sbornik 20, 164—167 (1954) [Russisch].

Newton gave a general solution of the problem of expressing the damping forces $\beta F(\dot{y})$ of the damped vibrations, governed by the equation $m \ddot{y} + \beta F(\dot{y}) + k y = 0$, in terms of polynomials in the velocities when the character of the motion is known. Newtons' theorem and respondent consequences establish: 1) when $F(\dot{y}) = \dot{y}^\alpha$ then $a - b = A_\alpha (a + b)^\alpha$ where $A_\alpha = \text{const}$, 2) when $F(\dot{y}) = \sum N_\nu \dot{y}^\nu$ then $a - b = \beta \sum A_\nu (a + b)^\nu$, where a, b are the adjacent amplitudes. In the case when the damping force is small the theorems and the consequences were proved by A. N. Krylov: for 1. it is $a - b = 2 \beta m^{-1} \omega^{\alpha-2} Q(\alpha) C^\alpha$, where are: m the mass, $\omega^2 = k/m$, $C = (a + b)/2$ and $Q = [\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \alpha (1 + \alpha)^{-1} \Gamma(\frac{1}{2}) \alpha / \Gamma(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2})]$; for 2. it is: $a - b = \sum A_\nu C^{\nu}$, $A_\nu = 2 \beta m^{-1} \omega^{\nu-2} Q(\nu)$, $\nu = q, \dots, r, \dots, s$. In this paper the author shows that the above results can be profited to determine the damping forces when the experimental curve is known. Dividing the curve in i groups with m_i amplitudes ($2C_{im}$) one determines the middle amplitudes (C_i) and the differences (Δ_i) and one obtains a system of the equations $\Delta_i = \sum A_\nu C_i^\nu$, $i = 1, 2, \dots$. By plotting $\Delta = f(C)$ the exponents $\nu_{\min} = q, \nu_{\max} = s$ can be determined: thus only the coefficients A_ν are left unknown. When the system is solved then the damping factors can be calculated by means of the formulas $\beta N_\nu = m \omega^{2-\nu} A_\nu 2 Q(\nu)$. A numerical example is given for the stabilizer of the automobile ZIS-110 [$m = 0,0459 \text{ kg cm}^{-1} \text{ sec}^2$; $\omega = 26,7 \text{ sec}^{-1}$ and $\beta F(\dot{y}) = 0,024 \dot{y} + 0,000118 \dot{y}^{1,5} + 0,00235 \dot{y}^2$].

D. Rašković.

Gerecke, Eduard: Drei Beispiele aus der Elektroservotechnik. — Zusammenfassender Bericht. Z. angew. Math. Phys. 5, 443—465 (1954).

Unter Benutzung graphischer Methoden behandelt Verf. die Regelung der Klemmenspannung eines fremderregten Gleichstromgenerators sowie zwei Beispiele für die Drehzahlregelung von Motoren. Insbesondere wird erklärt, auf welche Weise durch die Regelung eine Verkleinerung der Zeitkonstanten zustande kommt.

A. Stöhr.

Beharrell, Jack L. and Hans R. Friedrich: The transfer function of a rocket-type guided missile with consideration of its structural elasticity. J. aeronaut. Sci. 21, 454—458 (1954).

Im Zusammenhang mit den Stabilitätsuntersuchungen für ein gesteuertes fliegendes Gerät benötigt man den Übertragungsoperator $R(s)$, der die Taumelschwingungen (Drehschwingungen um eine Querachse) $\theta(t)$ des Gerätes in Abhängigkeit von den Ruderausschlägen $\delta(t)$ durch das Verhältnis der Laplace-Transformierten $\mathcal{L} \theta(t) = \theta(s)$ und $\mathcal{L} \delta(t) = \delta(s)$ kennzeichnet: $R(s) = \theta(s) / \delta(s)$. Während man bisher das Gerät als starren Körper behandelte, da die Grundfrequenz des Regelkreises mehrfach kleiner angenommen werden konnte als die der Biegeschwingungen des Gerätes, wird dieser Unterschied infolge des Strebens nach Leistungserhöhung durch Leichtbau stark vermindert, so daß die Biegeschwingungen nicht mehr unbedingt neben den Taumelschwingungen vernachlässigt werden können. Zum Beispiel kann es wichtig werden, an welcher Längsstelle $x = x_1$ des Gerätes der zur Regelung dienende Wert des Stellungswinkels $\theta(t)$ gemessen wird. Verf. behandelt darum das Gerät als einen Stab mit freien Enden und bekannter Verteilung der Masse $m(x)$ und der Biegesteifigkeit $EI(x)$, auf dessen Querausschlag $y(x, t)$ neben den Luftkräften (Rückstellkräfte und Dämpfungskräfte) noch die Ruderkraft ein-

wirkt. Bei kleinen y ist dann $\vartheta(t) = \partial y / \partial x$, zu bilden an der Stelle $x = x_1$, wo das Meßgerät sitzt. Die Längsverteilungen der aerodynamischen Beiwerte sollen gegeben sein, und es wird angenommen, daß die Luftkräfte nur von der Taumelbewegung des starren Körpers $\vartheta_0(t)$ abhängen, daß hierfür also die überlagerten Biegeschwingungen $\vartheta(t) - \vartheta_0(t)$ ohne Belang sind. Die Ruderkraft wird als Punktkraft angesetzt, die dem Ruderausschlag $\delta(t)$ genau proportional ist und am Ende des Gerätes angreift. Es bleibt für $y(x; s) = \mathcal{L} y(x, t)$ eine Gleichung $(d^2/dx^2) \cdot [E I(x) d^2 y/dx^2] + s^2 m(x) y = F(x; s) \delta(s)$, deren Lösung nach den Eigenfunktionen der homogenen Aufgabe entwickelt wird. Der Übertragungsoperator $R(s)$ erweist sich am Ende als Summe aus einem Hauptglied, das die Taumelschwingungen des starren Körpers angibt, und einer Reihe von Gliedern, die den Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen des Gerätes entsprechen. Damit können dann im Einzelfall der Einfluß der Meß-Stelle sowie die Bedeutung der Eigenfrequenzen untersucht werden.

U. T. Bödewadt.

Franciosi, Vincenzo: Contributo alla teoria generale delle linee d'influenza. Rend. Acad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser. 21 (93), 47—56 (1954).

Elastizität. Plastizität:

Ил'юшин, А. А.: Über den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den kleinen Deformationen in der Mechanik dichter Medien. Priklad. Mat. Mech. 18, 641—666 (1954) [Russisch].

The note discusses the general properties among the stresses and the small deformations of the continuous medium, quasiisotropic and homogeneous in neighbourhood of each point. Because of the better geometric explanation of the loading-process it is favourable to use the deformation vector instead of the deviator. Contrary to W. Prager's geometric interpretation in the space of the nine dimensions the author uses the Euklid's space of five dimensions (\mathbb{E}_5). The components of the straintensor and the strainvelocities are then the unit vectors coupled with the loading trajectories; but, the internal geometric parameters (arch, curvature, torsion) of these trajectories are the natural numerical characteristics of the compound loading. Since the ratio among the stress and strainvector in \mathbb{E}_5 space is invariant with respect to the transformations of rotation and glassing of the coordinate repère-point it follows the principle of isotropy. The general case of the plane stress problem can be illustrated by experimental means with thin tube simultaneously loaded by axial forces, constant internal pressure and torsionmoment.

D. Rašković.

Арžаных, И. С.: Eine Darstellung des Verschiebungsvektors durch retardierte Potentiale. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 393—396 (1954) [Russisch].

L'A. mentionne l'analogie qui existe entre les problèmes de Dynamique des corps élastiques où intervient l'opérateur de Lamé:

$$A_q^t = \alpha \operatorname{grad}_q \operatorname{div}_q - \beta \operatorname{rot}_q \operatorname{rot}_q - \partial^2 / \partial t^2$$

et ceux de propagation des ondes avec l'opérateurs correspondant $\chi \nabla_q^2 - \partial^2 / \partial t^2$ (cas spécial de l'opérateur de Lamé pour $\chi = \beta$). Une théorie est développée permettant d'établir une formule pour l'opérateur de Lamé analogue à celle de Kirchhoff mais plus générale car elle se rapporte à tous les opérateurs de deuxième ordre avec les coefficients constants. L'introduction des vecteurs-potentiels retardés, dépendants de temps, permet de réduire le problème à l'étude de ces potentiels qui généralisent les potentiels retardés de Newton. En considérant les problèmes soumis aux conditions classiques aux limites, l'A. obtient des équations intégrales linéaires permettant de passer, dans le cas spécial, aux équations qui correspondent à la statique des corps élastiques, à la théorie des ondes stationnaires et aux problèmes de Dirichlet et de Neumann.

C. Woronetz.

Pustynnikov, V. G.: Ein Apparat für die Lösung von Gleichungen der Deformationsellipse (Ellipsometer). Inženernyj Sbornik 19, 161—166 (1954) [Russisch].

Bondar, N. G.: Zur Frage der dynamischen Stabilität von Stabsystemen. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 351—354 u. russ. Zusammenfassg. 355 (1954) [Ukrainisch].

Im Artikel sind die Integro-Differentialgleichungen der dynamischen Stabilität von Stabsystemen gebildet. Es wird auf den Zusammenhang zwischen den Differential- und den Integro-Differentialgleichungen der dynamischen Stabilität hingewiesen. Ein neuer Beweis des Satzes von der Trennung der Variablen in Gleichungen der dynamischen Stabilität unter Berücksichtigung der Widerstandskräfte wird erbracht.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Bondar, N. G.: Darstellung der dynamischen Stabilität von Stabsystemen durch elektrische Analogievorgänge. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 356—360 u. russ. Zusammenfassg. 360 (1954) [Ukrainisch].

Die allgemeine Theorie der Darstellung von Aufgaben der dynamischen Stabilität von Stabsystemen durch elektrische Analogievorgänge wird untersucht. Es werden Regeln für den Aufbau von elektrischen Modellen angegeben und Ähnlichkeitskriterien aufgestellt.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Savin, G. N.: Über die dynamischen Kräfte im Aufzugseil in einem Schacht beim Heben einer Last. Ukrain. mat. Žurn. 6, 126—139 (1954) [Russisch].

The paper deals with the problem of examining the influence of the dynamic forces acting on an end loaded elastic twisted treads cable running over a pulley with the velocity $v_c = f(t)$ when the load (Q) in the initial moment resists on the immovable basis. Two periods are studied: the period of the load's departure and the lift period, supposing that the velocity-time diagram in the departure has trapeze form, neglecting the flexural rigidity of the cable but including his weight. In the first period, because the velocity of the motion is very small (from 1 to 1.5 m/sec), the differential equation of the motion reduces to the partial differential equation of the second order. The law of the motion is obtained and the corresponding graphics are drawn for distinct values ζ , which is dimensionless quantity ($0 \leq \zeta \leq 1$) since in the lower part of the cable is $T_0 = \zeta Q$. Numerical example is given illustrating application of theory. In the second period the problem reduces to the single integro-differential partial equation equivalent, for every n , to two differential equations with boundary conditions. For the first approximation there are two differential equations with variable coefficients, or one equation in the case when the lift height is small. This equation is more general then the Ishlinskij or Neronov equation.

D. Rašković.

Savin, G. N.: Die dynamischen Kräfte im Aufzugseil beim Abheben einer Last von einer unbeweglichen Grundlage. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 140—146 und russ. Zusammenfassg. 146—147 (1954) [Ukrainisch].

Savin, G. N. und V. N. Ševelo: Über die dynamischen Kräfte in Aufzugseilen für Schächte von geringer Teufe (Lasthub). Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 136—139 und russ. Zusammenfassg. 139 (1954) [Ukrainisch].

Savin, G. N. und V. V. Georgievskaja: Die dynamischen Kräfte im Förderseil beim Abheben der Last von einer unbeweglichen Grundlage. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 205—211 und russ. Zusammenfassg. 211 (1954) [Ukrainisch].

Mazzarella, Franco: Estensione della analogia di Mohr alle travi sottili caricate assialmente. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. 20 (92), 161—164 (1954).

Der bekannte Mohrsche Satz über die Ermittlung der elastischen Linie eines Balkens mittels der Krümmung eines fiktiven wird auf den Fall des axial belasteten Balkens ausgedehnt.

V. Válcovici.

Gruško, G. S.: Die reine Verbiegung einer Schiene (eines Balkens) mit einer Öffnung in Form eines Halbkreises. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1954, 45—49 und russ. Zusammenfassg. 49 (1954) [Ukrainisch].

Gruško, G. S.: Die Verbiegung eines Balkens mit einer Öffnung in Form eines Halbkreises unter der Wirkung einer konstanten Transversalkraft. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1954, 50—53 und russ. Zusammenfassg. 53 (1954) [Ukrainisch].

Babakova, O. L.: Über die Torsion von Stäben mit Z-förmigem Querschnitt. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1954, 319—323 u. russ. Zusammenfassg. 323 (1954) [Ukrainisch].

Im Artikel wird die Aufgabe über die Torsion eines Stabes mit Z-förmigem Querschnitt nach der Methode von E. Trefftz gelöst. Bei der Lösung sind einige Vereinfachungen hineingebracht. Die Lösung wird in allgemeiner Form erhalten. Für einen Spezialfall ist der Graph der Verteilung der Spannungen längs der Schnittkontur konstruiert.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Weiss, G. and L. E. Payne: Torsion of a shaft with a toroidal cavity. *J. appl. Phys.* 25, 1321—1328 (1954).

Die Arbeit befaßt sich mit der Torsion eines nahezu zylinderförmigen Stabes von kreisförmigem Querschnitt, der eine axialsymmetrisch verlaufende, ringförmige Höhlung kleiner Abmessung besitzt. Da man das Torsionsproblem als 5-dimensionales Strömungsproblem auffassen kann, wird erst eine Methode für die Behandlung des Strömungsvorgangs um einen entsprechenden n -dimensionalen Ringkörper beliebiger Querschnittsform entwickelt und dann auf kreisförmigen Ringquerschnitt angewandt.

H. Buefler.

Miricu, M.: Extension du problème de la torsion. *Comun. Acad. Republ. popul. Romine* 4, 509—511, russ. u. franz. Zusammenfassg. 512 (1954) [Rumänisch].

Dans cet article on presente l'extension du problème de la torsion des barres a section variable.

Aus der französ. Zusammenfassg.

Ivković, M.: A case of an axially symmetrical stress. (Abstracts.) *Conseil Acad. RPF Yougoslavie, Bull. sci.* 2, 18 (1954).

Sevljakov, Ju. A. und F. S. Zigel': Die Torsion eines Hohlzylinders mit einer Öffnung an der Seitenfläche. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1954, 41—44 und russ. Zusammenfassg. 44 (1954) [Ukrainisch].

Ogibalov, P. M.: Die Deformation eines Rohres unter der Wirkung des inneren Drucks bei veränderlicher Temperatur. *Inženernyj Sbornik* 20, 55—58 (1954) [Russisch].

Levi, Beppo: Essay über die Berechnung von Verbiegungen dünner Platten. *Math. Notae* 12/13, 79—193 (1954) [Spanisch].

Levi, Beppo: Essay über die Berechnung von Verbiegungen dünner Platten. II. Die Randbedingungen. *Math. Notae* 14, 1—31 (1954) [Spanisch].

In dieser Abhandlung, die in zwei getrennten Teilen veröffentlicht wurde, untersucht der Verf. die Gleichung

$$\Delta^2 w = \partial^4 w / \partial x^4 + 2 \partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4 = p(x, y),$$

wo $p(x, y)$ den Druck geteilt durch Biegefestigkeit bezeichnet und wo die anderen Bezeichnungen selbstverständlich sind. Im I. Kapitel wird eine kurze Übersicht über die mathematischen Grundlagen dieser Berechnungen gegeben, in Verbindung mit der Methode der Fourierschen Entwicklungen, die neben der Methode der endlichen Differenzen bei der Lösung der für die Anwendungen interessanten Probleme am häufigsten benutzt wird. Dabei hat der Verf. neben den geschichtlichen Bemerkungen sein Augenmerk hauptsächlich auf die Fragen der Stetigkeit und der Konvergenz der Lösungen gerichtet, weil gerade diese Fragen bei praktischen Ingenieurberechnungen so leicht außer acht bleiben. Besonders ausführlich ist das II. Kapitel (80 Seiten, mehr als die Hälfte der ganzen Abhandlung), welches der Verf. seinen Untersuchungen der Lösungen und Lösungsnaherungen der obigen

Gleichung durch Polynome gewidmet hat. Zum Schluß im III. Kapitel (der zweite Teil der Abhandlung) behandelt der Verf. das Problem der Randbedingungen, wieder im Falle der Lösungen der obigen Gleichung, die in der Polynomform gesucht werden. Eine jedenfalls interessante Abhandlung, die eine zusammenfassende Übersicht der Verbiegungsberechnungen bei dünnen Platten sowohl vom theoretisch-mathematischen Standpunkt als auch vom rein praktisch-technischen Standpunkt aus gibt. Die Darstellung ist stellenweise etwas gedehnt, wohl aus dem Wunsche des Verf., dem Praktiker nah zu bleiben. Die Abhandlung enthält keine Übersicht über die neuesten Ergebnisse in einzelnen Fällen auf diesem Gebiet. Trotzdem würde ein, wenn auch unvollständiges Verzeichnis wenigstens derjenigen Literatur, die sich auf die in der Abhandlung berührten Fragen bezieht, den Wert dieser Abhandlung noch erhöhen.

T. P. Angelitch.

Vorob'ev, L. N.: Über eine Lösung des ebenen Problems in Polynomen für eine rechteckige orthotrope Platte. *Dopovidi Akad. Ukraïn. RSR* 1954, 391—393 u. russ. Zusammenfassg. 394 (1954) [Ukrainisch].

In der Arbeit wird nach der Methode der sukzessiven Approximationen in Polynomen die Lösung des ebenen Problems der Elastizitätstheorie für eine orthotrope rechtwinklige Platte, an deren Längsrändern eine gemeinsam mit ihren Ableitungen stetige willkürliche Belastung angreift, erhalten. An den Querrändern ist die Belastung vorgegeben. Es wird gezeigt, daß in der $(i - 1)$ -ten Näherung die genaue Lösung dieses Problems erreicht wird für Transversalbelastungen, die durch Polynome höchstens $(2i - 1)$ -ten Grades, und für Longitudinalbelastungen, die durch Polynome höchstens $2i$ -ten Grades ausgedrückt sind. Aus der russ. Zusammenfassg.

Flejšman, N. P.: Über die Verstärkung des Randes von krummlinigen Öffnungen dünner Platten. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1954, 311—314 und russ. Zusammenfassg. 314 (1954) [Ukrainisch].

Reissner, Eric: On finite twisting and bending of circular ring sector plates and shallow helicoidal shells. *Quart. appl. Math.* 11, 473—483 (1954).

Es gibt erstaunlicherweise immer noch neue und hübsche Elastizitätsprobleme, die mathematisch-elementare Lösungen haben. Ein breiter offener Ring (Platte oder flache Schraubenschale) unter reiner Torsion oder reiner Biegung ist dieser Art, sogar wenn endliche Deformationen zugelassen werden. Für die maximalen Beanspruchungen und ebenso für die Verschiebungen erhält Verf. übersichtliche Formeln — die Hilfsfunktionen f_i sind am Ende der Arbeit als Funktionen von x , dem Verhältnis der Ringbreite zum mittleren Durchmesser, tabuliert.

K. Marguerre.

Stanisić, Milomir M.: Beitrag zur Bestimmung der Schwingungsrichtung bei ruhenden Dampfturbinenschaufeln mit Deckband. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 20, 108—112 (1954).

Die theoretische Bestimmung des Hauptschwingungsrichtungswinkels ruhender Dampfturbinenschaufeln mit Deckband nach dem Verfahren von Geiger [Schiff und Werft 44/24, 49—58, 217—224 (1943)] geht von der Annahme aus, daß die Schwingungsrichtung sich nicht wesentlich von der einer Einzelkraft in Deckbandmitte zugeordneten Biegerichtung der größten Ausbiegung unterscheidet und der Krafrichtungswinkel gleich dem Schwingungsrichtungswinkel ist. Verf. erhält nach Berücksichtigung des Einflusses der Schaufelmasse und der elastischen Verhältnisse im Deckband mittels der vom Geigerschen Verfahren abweichenden Bedingung, daß Krafrichtung und Schwingungsrichtung nicht zusammenfallen und sich aus der Minimumsbedingung für die gesamte (einschließlich der im Deckband aufgespeicherten) Formänderungsarbeit bestimmen lassen, eine transzendente Krafrichtungsgleichung. Nach Lösung durch Probieren ergibt sich damit der Winkel zwischen Schwingungsrichtung und den Hauptträgheitsachsen. Angeführte Versuchsergebnisse scheinen die Rechnung mit für die verwinkelten Verhältnisse

ausreichender Genauigkeit zu bestätigen, jedenfalls sind die nach dem vorliegenden Verfahren ermittelten Winkelwerte wesentlich genauer als die nach dem Verfahren von J. Geiger berechneten. Eine Verallgemeinerung des Verfahrens für rotierende Schaufeln wäre wünschenswert.

K. Karas.

Csonka, P.: Elastic theory of the lining of double-walled insulated circular cylindrical shells under fluid pressure. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 8, 295—316, russ., französ. und deutsche Zusammenfassg. 316—317 (1954).

Verf. setzt sich mit einem für den Bauingenieur besonders interessanten Problem aus dem Tunnelbau auseinander. Eine dünnwandige, waagerecht liegende, elastische, zylindrische und außen isolierte Röhre ist in einem ausgebauten, starr anzunehmenden Stollen von Kreisquerschnitt eingebettet und wird durch hydrostatischen Druck infolge Sickerwasser, daß in den Zwischenraum gelangt ist, gegen den Stollenseiteit gepreßt. Die Röhre legt sich auf einem gewissen Oberflächenbereich II, der sich symmetrisch zu beiden Seiten der obersten Erzeugenden des Mantels (Scheitellinie) ausbreitet, innig gegen die vorgegebene Kontur der Innenleibung der starren Außenschale. Mittels bekannter Beziehungen aus der Biegetheorie der Kreiszyinderschalen werden nach Formulierung geeigneter Übergangsbedingungen zwischen dem die Reaktionskräfte aufnehmenden und dem nur durch Eigengewicht und hydrostatischen Druck belasteten Oberflächenteil I die Schnittkräfte der inneren Schale berechnet. Der Gültigkeitsbereich der ermittelten Beziehungen wird diskutiert. Ein numerisches Beispiel schließt die Arbeit ab. Das für den Bauingenieur ebenso wichtige Problem des Anliegens der inneren Schale an die Außenschale zu beiden Seiten der untersten Erzeugenden wird in der vorliegenden Arbeit nicht untersucht und harrt noch seiner Lösung.

K. Karas.

Sigua, F. D.: Einige Randwertaufgaben der sphärischen Schale. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 20, 317—335, russ. Zusammenfassg. 335—336 (1954) [Grusinisch].

Es wird die Aufgabe behandelt, den deformierten Zustand einer Schale zu bestimmen, deren Mittelfläche ein Kugelsegment ist und deren Begrenzung auf einer konischen Stütze liegt oder frei ist. Diese beiden Randwertaufgaben werden mit Hilfe des allgemeinen Integrals des Differentialgleichungssystems für das Gleichgewicht einer sphärischen Schale (vgl. N. Vekua, Neue Methoden zur Lösung elliptischer Gleichungen, dies. Zbl. 41, 62 [Russisch]) auf Systeme von algebraischen Gleichungen zurückgeführt; es zeigt sich, daß die beiden Aufgaben bis auf starre Verschiebungen eindeutig bestimmte Lösungen haben.

Übersetztg. der russ. Zusammenfassg.

Filin, A. P.: Über eine Möglichkeit der Anwendung von Variationsmethoden in der Baumechanik. Inženernyj Sbornik 19, 125—140 (1954) [Russisch].

Many problems in structural mechanics reduce to the boundary problems of the different differential equations. The kinematical boundary conditions and the forms of the loadings complicate the exact solutions, that's why the approximative methods are habitually used (the method of the equations with finite differences — the methods of the nets — or the variational methods, mainly the generalized Galerkin's method). The purpose of this paper is to present a simplification of the variational methods, i.e. the integration of the canonical system of linear nonhomogeneous algebraic equations

$$a_1 \delta_{1k} + a_2 \delta_{2k} + \dots + a_t \delta_{tk} = 1_{pk}, \quad (k = 1, \dots, t)$$

by aid of the scales. The procedure is applied to the bending problem of a rectangular plate ($D\nabla^4 w + q = 0$, where $w = \sum a_r q_r$, $\delta_r = \delta_{sr} = \int \int V^4 q_r q_s dx dy$, $A_{qs} = \int \int q D^{-1} q_s dx dy$; $r, s = 1, 2, \dots, t$). Numerical examples and diagrams are given to illustrate the results, concerning the case of a rectangular clamped plate symmetrically loaded with $q_r = \cos^2(r-1)\pi\xi \cos^2(r-1)\pi\eta$, $\xi = x/2a$, $\eta = y/2b$.

Further it is shown the integration of the double integral $S = \int_0^a \int_0^b f(x, y) q(x, y) dx dy =$

$\int \int dV \cdot f(x, y) = fV$, reducing this problem to the static one regarding the deter-

mination of the centre of the system of parallel vectors where f is his applicate. The case when the domain of the integration is the circle and when the function $f(x)$ changes the sign are treated also. *D. Rašković.*

Sonntag, G.: Ein Integralsatz der ebenen Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. **34**, 469—471 (1954).

Der Verf. stellt einen Integralsatz für eine unendliche, beliebig in ihrer Ebene belastete Scheibe konstanter Wandstärke auf und beweist ihn. Ferner leitet er daraus einen Mittelwertsatz ab, der eine Verschärfung des Föppl'schen Mittelwertsatzes darstellt. *H. Buefler.*

Panasjuk, V. V.: Der Druck eines Stempels auf die Grenze einer kreisförmigen Öffnung. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 37—40, russ. Zusammenfassg. 40 (1954) [Ukrainisch].

Podstrigač, Ja. S.: Die Wirkung einer konzentrierten Kraft auf den Rand einer Halbebene mit kreisförmiger Öffnung. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 217—219, russ. Zusammenfassg. 219 (1954) [Ukrainisch].

Mossakovskij, V. I. und P. A. Zagubizěnko: Über die Kompression einer elastischen isotropen Ebene, die durch einen geradlinigen Schlitz geschwächt ist. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 385—390, russ. Zusammenfassg. 390 (1954) [Ukrainisch].

In der Arbeit wird die Aufgabe über die Kompression einer durch einen geradlinigen Schlitz geschwächten elastischen isotropen Ebene unter zwei Voraussetzungen untersucht: 1. für den Fall des sog. „mathematischen“ Schlitzes, dessen Breite vernachlässigt werden darf, und 2. für den Fall, wenn die Breite des Schlitzes mit den elastischen Deformationen vergleichbar ist. Aus der russ. Zusammenfassg.

Karunes, B.: A rigid curvilinear polygonal core in an infinite plate under tensions at infinity and shear. Indian J. Phys. **28**, 133—140 (1954).

Verf. verallgemeinert einige Resultate von Muschelišvili (dies. Zbl. **7**, 209) über die unendliche Platte mit eingelötetem starrem Korn spezieller Form unter verschiedenen Bedingungen für den Zug im Unendlichen. *M. J. De Schwarz.*

Mossakovskij, V. I.: Der Druck eines Stempels mit nahezu kreisförmiger Kontaktfläche auf einen elastischen Halbraum. Priklad. Mat. Mech. **18**, 675—680 (1954) [Russisch].

Auf den durch $z \geq 0$ definierten elastischen Halbraum drücke ein Stempel mit fast kreisförmiger Querschnittsfläche S , die als symmetrisch angenommen wird. Nach dem Drücken habe die Oberfläche des Halbraumes die Gestalt $z = f(x, y)$. Für diese Oberfläche sind nun innerhalb von S die Randbedingungen für die Verschiebungen u , außerhalb von S jedoch die Randbedingungen für die Dehnungen (u') gegeben. Gesucht wird die Druckverteilung im Bereich S . Nach einem Vorschlag von Leonov werden zur Lösung des Problems die erstgenannten Randbedingungen nun nicht innerhalb der ganzen Fläche S befriedigt, sondern nur in dem größten einbeschriebenen Kreis von S . Für u wird ein in der Winkelkoordinate φ periodischer Ansatz gewählt, dessen einzelne Glieder durch einen in einer früheren Arbeit abgeleiteten Ausdruck dargestellt werden. Mit diesem Ansatz bekommt man die gesuchte Druckverteilung in Form einer Potenzreihe, deren Koeffizienten im Falle des kreisförmigen Stempels aus den Randbedingungen eindeutig bestimmt werden können. Bei nicht kreisförmigem Stempel wird die Aufgabe näherungsweise dadurch gelöst, daß eine bei der Bestimmung der Verschiebungen erhaltene, im Inkreis von S definierte Funktion stetig über den Rest des Bereiches S fortgesetzt wird. Die Lösung reduziert sich dann auf die Berechnung gemischter Randwertaufgaben für eine hilfsweise eingeführte Halbebene. Am Beispiel eines Stempels mit elliptischem Querschnitt wird das Verfahren angewendet. Dabei zeigt sich, daß in gewissen Fällen [wenn $f(x, y)$ ein Polynom ist] sogar strenge Lösungen erhalten werden.

K. Magnus.

Federhofer, Karl: Der senkrecht zu seiner Ebene belastete, elastisch gebettete Kreisträger. *Studies Math. Mech.*, presented to Richard von Mises, 242–250 (1954).

Die dieses statische Problem beherrschende Differentialgleichung erweist sich als ein Sonderfall jener Differentialgleichung 8. Ordnung für die (dimensionslose) Durchsenkung y , die Verf. in einer früheren Arbeit [dies. Zbl. **41**, 105, Gl. (8)] für die Kippsicherheit des kreisförmig gekrümmten Trägers bei gleichmäßiger Radialbelastung erhalten hat. Da aber als Fundamentträger bei der Konstruktion von Hochbehältern, für die die vorliegende Untersuchung vornehmlich gedacht ist, gewöhnlich rechteckige Querschnitte gewählt werden, deren Schubmittelpunkt mit ihrem Schwerpunkt zusammenfällt und die eine sehr kleine Kennzahl für den Einfluß der Querschnittsverwölbung besitzen, so vereinfacht sich obige Differentialgleichung zu einer solchen nur 6. Ordnung für y , die bei Vernachlässigung der Wirkung einer elastischen Drehbettung auch aus der vom Verf. vor 43 Jahren [Z. Math. Phys. **62**, 44 (1913), Gl. (12)] abgeleiteten Grundgleichung für die Berechnung des senkrecht zu seiner Ebene belasteten Bogenträgers gewonnen werden kann, womit eine willkommene Kontrolle der Ergebnisse erhalten worden ist. Für den Fall des nur durch gleich große und aquidistante Einzeliasten senkrecht zu seiner Ebene belasteten Kreisringträgers wird sowohl die strenge Lösung angegeben als auch eine Näherungslösung nach der Ritzschen Methode entwickelt, deren einfache Ergebnisse für 6 und mehr Lasten befriedigend mit denen der strengen Lösung übereinstimmen. Die Methode von C. B. Biezeno und J. J. Koch [Z. angew. Math. Mech. **16**, 321 (1936)] und C. B. Biezeno und R. Grammel, *Technische Dynamik*, S. 338 (dies. Zbl. **22**, 29), die bekanntlich auf der Einführung von „Eigenbelastungen“ und den zugehörigen „Eigendurchbiegungen“ mit tabulierten Funktionen beruht, kann hier, wie Verf. abschließend feststellt, nicht herangezogen werden, da durch die Bettungsziffern die Benutzung der erwähnten tabulierten Funktionen verhindert wird.

K. Karas.

Mossakovskij, V. I.: Die gemischte Grundaufgabe der Elastizitätstheorie für einen Halbraum mit einem Kreis als Trennungslinie der Randbedingungen. *Priklad. Mat. Mech.* **18**, 187–196 (1954) [Russisch].

Es wird die sogenannte gemischte Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie für den Halbraum behandelt in dem Fall, wo die Randbedingungen durch eine Kreislinie getrennt sind. Dabei sind im Innern des Kreises die Komponenten des Verschiebungsvektors gegeben, außerhalb aber die Werte der äußeren Spannungskomponenten. Als Beispiel wird mit der dargelegten Methode die Aufgabe über den symmetrischen Druck einer ebenen kreisrunden Stämpfe auf den elastischen Halbraum bei Anwesenheit von Kupplung gelöst.

T. P. Angelitch.

Flejšman, N. P. und V. N. Gnatykiv: Die Spannungskonzentration um einen kugelförmigen Hohlraum im schweren elastischen Halbraum. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraï. RSR* 1954, 361–364, russ. Zusammenfassg. 364 (1954) [Ukrainisch].

In der vorliegenden Arbeit wird die Aufgabe über das elastische Gleichgewicht eines durch einen kugelförmigen Hohlraum von hinreichend kleinem Radius geschwachten schweren Halbraums gelöst. Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Grilikij, D. V.: Der Druck eines starren Zylinders auf die Innenfläche eines kreiszylindrischen Hohlraums im anisotropen Körper. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraï. RSR* 1954, 212–215, russ. Zusammenfassg. 216 (1954) [Ukrainisch].

Renzulli, Tullio: La sollecitazioni di origine termica di un ponte Maillart. *Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli*, IV. Ser. **20** (92), 89–101 (1954).

Tolokonnikov, L. A.: Endliche symmetrische Deformationen eines Streifens. *Priklad. Mat. Mech.* **18**, 619–626 (1954) [Russisch].

Es werden die Deformationen eines ebenen Streifens untersucht, der einen Teil eines Kreisringes bildet, also durch zwei Kreisbogenstücke von verschiedenem Radius und zwei Radienstücke begrenzt wird. Unter den Voraussetzungen, daß Verschie-

bungen nur in der Ebene des Streifens erfolgen und die äußeren Kräfte in jedem Punkte des Streifens unveränderte radiale und tangential Hauptspannungen aufrechterhalten, wird aus den geometrischen Verträglichkeitsbedingungen für die Deformationen und den Gleichgewichtsbedingungen eine Differentialgleichung für die Verschiebungen abgeleitet. Der Fall des ebenen Verformungszustandes ergibt dabei etwas einfachere Beziehungen als der Fall des verallgemeinerten ebenen Spannungszustandes. Unter der Voraussetzung eines inkompressiblen Materials wird der Spannungszustand bei Deformationen eines dünnen Streifens näher untersucht. Es gelingt, die Tangential- und Radial-Spannungen explizit auszurechnen. Eine dabei zur Erfüllung der Randbedingungen notwendige Quadratur läßt sich sogar auch noch im Falle eines Streifens mit veränderlicher Dicke durchführen. Die erhaltenen Beziehungen erlauben, verschiedene Fälle von Beanspruchungen zu untersuchen, so die reine Biegung, die durch Momente an den Enden des Streifens hervorgerufen wird, ferner Deformationen infolge gegebener tangentialer Deformationen an einer der Kreisbogenkonturen, Deformationen durch Druck an den Kreisbogenflächen und andere Probleme. Der Fall der reinen Biegung wird für verschiedene geometrische Abmessungen des Streifens noch genauer untersucht.

K. Magnus.

Berio, Angelo: Fenomeni elasto-plasto-viscosi nei solidi. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **87** (III. Ser. **18**), 295—355 (1954).

The paper represents an attempt to develop general isothermal stress-strain relations covering the complete range of elastic, viscous and plastic deformation, including a specific type of strain-hardening represented by a simple displacement, as a function of strain of the von Mises yield circle of constant radius in the stress plane of pure distortion ($\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = 0$). The proposed equations are governed by the two elastic constants, the coefficient of shear viscosity and two additional parameters describing the viscous response at high strain rate, which (on a purely empirical basis) is assumed to increase exponentially with the stress, the yield limit and a work-hardening parameter, and finally three parameters described as coefficients of delayed elasticity, that is a total of 10 parameters which are themselves space functions. It is obvious that such a relation between stress, strain and strain rate for a material assumed to be isotropic and only elastically compressible can hardly claim to be more than a rather loose semi-empirical statement. Although indicial tensor notation is used throughout, no serious attempt has been made to discuss the admissibility of the proposed relations on the basis of the conditions of tensor invariance. Thus, while their theoretical validity is problematic, to say the least, they are, on the other hand, so cumbersome as to be rather difficult to use for the practical purposes of either interpretation of tests or solution of boundary-value problems.

A. M. Freudenthal.

Franciosi, Vincenzo: Il procedimento del „limit design“ per carico non proporzionale. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. **5**, Nr. 3, 23—28 (1954).

Franciosi, Vincenzo: Il carico di punta critico in regime elastoplastico. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. **20** (92), 177—185 (1954).

Richiamando risultati di Engesser e dello Shanley, l'A. si pone il problema della ricerca del carico di punta critico in regime elastoplastico e lo affronta mediante metodi di analisi funzionale, attraverso il concetto di punto di diramazione.

G. Grioli.

Franciosi, Vincenzo: Il principio di equivalenza nelle strutture monodimensionali soggette a distorsioni concentrate. Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli, IV. Ser. **20** (92), 279—283 (1954).

L'A. definisce le caratteristiche di una distorsione concentrata in una sezione trasversale di una struttura elastica unidimensionale e mediante l'uso del teorema di Betti dimostra un principio di equivalenza ai fini degli effetti statici a distanza per due distinte distorsioni aventi le medesime caratteristiche.

G. Grioli.

Mirzadzanzade, A. Ch.: Das Eintauchen einer dünnen zylindrischen Röhre in eine zäh-plastische Flüssigkeit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 511—514 (1954) [Russisch].

Le problème se rapporte au mouvement à l'intérieur et à l'extérieur d'un tube cylindrique de rayon R et de l'axe vertical Oz s'enfonçant, avec une vitesse constante verticale V , dans un liquide visqueux et plastique qui se trouve au-dessous d'un plan horizontal. En introduisant les coordonnées cylindriques r, φ, z l'A. suppose que le mouvement est symétrique dans chaque plan vertical passant par l'axe Oz ($v_\varphi = 0$), que la pression reste constante le long de cet axe, que l'influence des forces extérieures est négligeable, que $v_r \ll v_z$ et que les variations de vitesse dans la direction de mouvement sont beaucoup plus faibles que celles dans la direction de rayon r . Le problème se réduit alors à l'étude d'une équation homogène linéaire de type parabolique déterminant la vitesse verticale v_z . La solution de cette équation dans les deux cas considérés (à l'intérieur et à l'extérieur du tube) se présente sous la forme de séries de fonctions de Bessel. L'A. démontre que cette solution satisfait aux conditions sur les frontières et calcule ensuite la résistance du liquide, provenant de frottement sur les surfaces, intérieure et extérieure, du tube.

(C. Woronetz).

Manukjan, M. M.: Bestimmung der Spannungen in einigen Eisenbeton-Elementen mit Berücksichtigung des Kriechens und der Betragsänderungen der momentanen Deformation des Betons. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija fiz.-mat. estest. techn. Nauki 7, Nr. 6, 35—50 (1954) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit ist der Untersuchung des Spannungszustands in Eisenbeton-Elementen mit Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens des Betons gewidmet. In der Arbeit wird gezeigt, daß man unter Verwendung der Methode von N. M. Krylov und N. N. Bogoljubov [N. M. Krylov und N. N. Bogoljubov, Doklady Akad. Nauk SSSR, 1929, 283—288 (1929); L. V. Kantorovič und V. I. Krylov, Näherungsmethoden der höheren Analysis, dies. Zbl. 40, 215] eine Lösung der Grundgleichungen der nichtlinearen Theorie des Kriechens von Beton erhalten kann. Das Wesen der Methode besteht darin, daß die Lösung der Integralgleichung durch die Lösung eines Systems von algebraischen Gleichungen ersetzt wird. Als Beispiel dieser Methode werden untersucht: 1. der Spannungszustand in komprimierten Eisenbeton-Elementen und 2. die Schrumpfspannungen in symmetrisch armierten Eisenbeton-Elementen, unter Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens von Beton. Bei der Lösung dieser Aufgaben wird der allgemeinste Fall betrachtet, der die Alterung, die Nachwirkung und die Veränderlichkeit des Betrages der momentanen Deformation des Betons gleichzeitig berücksichtigt. — Eine allgemeine Lösung dieser Aufgaben über die lineare Theorie des Kriechens von Beton wurde von N. Ch. Arutjunjan (dies. Zbl. 47, 432) und A. V. Švecov [Gidrotechn. stroitel'stvo 8 (1952)] angegeben. Bei der Lösung dieser Aufgaben werden wir die von N. Ch. Arutjunjan (loc. cit.) vorgeschlagene nichtlineare Theorie des Kriechens verwenden.

Übersetzung der russ. Zusammenfassung.

Rozenblum, V. I.: Berechnung des Kriechens von Turbinendiaphragmen der Hochdruckstufen. Inženernyj Sbornik 20, 49—54 (1954) [Russisch].

Blechman, I. I.: Die Untersuchung des Prozesses der vibrierenden Einrammung von Pfählen und Spunden. Inženernyj Sbornik 19, 55—64 (1954) [Russisch].

Bolotin, V. V.: Über die Biegungsschwingungen von Wellen, deren Querschnitte ungleiche Hauptsteifigkeiten besitzen. Inženernyj Sbornik 19, 37—54 (1954) [Russisch].

In this paper the author discusses the problem of the transversal vibrations of a shaft with the different main rigidities ($I_1 \neq I_2$) in the non-linear form. It is assumed that the vibrations of the simply supported beam with constant section and the disk at the middle of the span occur in the vertical plane and are governed by the differential equation:

$$(1) \quad f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t) f = g + \theta^2(e_1 \cos \theta t + e_2 \sin \theta t) = g + \varphi(t).$$

Here are: f the vertical displacement of the elastic curve in the middle of the beam, ε the damping factor, ω the certain middle frequency of the free vibrations, $\mu = (I_2 - I_1) / 2(I_1 + I_2)$ the coefficient of the anisotropy, θ the angular velocity of the

rotating shaft and e_i the excentric distances, the disk's centre from the axis of the shaft. In the case of the homogeneous problem ($g' = q = 0$) (1) reduces to the Mathieu equation solved by Andronow (1927). When $t \rightarrow \infty$ the character of the solutions depends of the ratios $\varepsilon \geq (\theta/\pi) \ln |\varrho_i|$, where ϱ_i are the roots of the characteristic equations of the linear-independent solutions of the Mathieu equation. The periodic solutions, with the periods π/θ , $2\pi/\theta$ are obtained by means of the Fourier series with the inpair or pair coefficients, which reduce the problems to infinite sets of linear homogeneous equations regarding to the coefficients. Then the regions of the excitation of undamped vibrations in the vicinity of the velocities $\theta = \omega/k$, where $k = 1, 3, 5, \dots$, or $2, 4, \dots$ the critical values of θ and corresponding minimal values of μ are determined. The forced vibrations (when $q = 0$ or $g = 0$) are discussed also. It is shown that in these cases the amplitudes increase with the approach to the above regions (with the pair indices for $q = 0$ or with the inpair for $g = 0$). The certain obtained results can be explained following Den Hartog's procedure. Further, the determination of the non-linear factors is shown, supposing that the movable hinged end of the beam has the axial spring. Including the damping of the support, the solution of the governing equation

$$EI \partial^4 v / \partial z^4 + (\partial / \partial z) (N \partial v / \partial z) + m \partial^2 v / \partial t^2 = 0$$

where N is the axial force, is supposed in the form $v(z, t) = j(t) \cdot \sin(\pi z/l)$. Thus the problem is reduced to the equation $f'' + \omega^2 f + \psi = 0$, where $\psi = \gamma f^3 + 2\varepsilon_1 f^2 f' + 2\alpha f [f f'' + f'^2]$ is the non-linear function in the deflection and kinematic elements. The coefficients $\gamma, \varepsilon_1, \alpha$ characterize the influences of the non-linear rigidity, damping and inertia force. Using the approximative method, supposing $j(t) = a(t) \sin \Omega t$, where $a(t)$ is a slowly changing function in t , the natural frequency (Ω) of the non-linear system is determined, which shows that the non-linearity of the system can be rigid or soft, depending of the ratios between the coefficients. The case of the rotating shaft is discussed also, presenting the partial equations in the Euler variables. Using Galerkin's method the non-linear function is determined and included in the left side of (1). Then the vibrations in the regions of the main ($\theta = \omega$) and the second resonance ($\theta = \frac{1}{2} \omega$) are examined and the resonant curves drawn; their forms depend of the coefficient α . One numerical example is given. It is shown that the axial damper at the end of the beam decreases the amplitudes 2.6 times, until the transverse damper is useful only in the case when the damping is very great.

D. Rašković.

Gere, J. M.: Torsional vibrations of beams of thin-walled open section. J. appl. Mech. **21**, 381—387 (1954).

Der Verf. behandelt die freien Torsionsschwingungen von Stäben mit dünnwandigen, offenen Profilen, bei denen der Schubmittelpunkt und Schwerpunkt zusammenfallen. Er entwickelt die speziellen Lösungen für verschiedene Randbedingungen unter besonderer Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung und beschränkt sich da, wo sich das Ergebnis nicht in expliziter Form angeben läßt, auf die Grundfrequenz.

H. Bufler.

Niordson, Frithiof I. N.: Vibrations of a cylindrical tube containing flowing fluids. Tekn. Högskol. Handl. Nr. **73**, 27 p. (1954).

Der Verf. geht zunächst auf das allgemeine Problem der Bestimmung der Eigenfrequenzen ω eines zylindrischen Rohres, das von einer Flüssigkeit mit der konstanten Geschwindigkeit U durchströmt wird, ein. Im Speziellen behandelt er a) den Fall $U = 0$ und teilt die Ergebnisse eines Zahlenbeispiels für verschiedene Schwingungsformen mit, b) den Fall der reinen Biegeschwingung für $U \neq 0$ (hier nimmt ω mit wachsendem U ab). Ferner diskutiert er das Problem eines leeren Rohres, das in einer in axialer Richtung mit U fließenden Flüssigkeit ruht. Abschließend wird ein schwingendes Seil betrachtet, auf dem sich eine gleichmäßig verteilte Last mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

T. Bufler.

Hydrodynamik:

● **Geronimus, J(a). L.: N. J. Shukowski. Ein Pionier der russischen Luftfahrtwissenschaft.** Übersetzt aus: Skizzen über die Arbeiten russischer Koryphäen der Mechanik. Berlin: VEB Verlag Technik 1954, 104 S., 58 Bilder, kart. DM 6,60.

Inhalt: 1. Lebensbeschreibung (7 S.). 2. Anwendung der Theorie der Beschleunigungspole höherer Ordnungen auf den Richtungsmechanismus Tschebyschews (8 S.). 3. Bestimmung der Kraftfunktion für eine gegebene Bahnkurvenschar (9 S.). 4. Vom Schweben der Vögel (4 S.). 5. Feststellung der Auftriebskraft der Luftströmung (19 S.). 6. Shukowskis Profile (21 S.). 7. Shukowskis wissenschaftliche Leistung (19 S.). 8. Literaturverzeichnis (9 S.). Die Abschnitte 2–6 sind sachliche, fast lehrbuchartige Referate, die insbesondere dem historisch Interessierten — nicht zuletzt durch das reiche, keineswegs nur Shukowski betreffende Literaturverzeichnis — wertvolle Hinweise geben können. Dagegen dürfte der weniger sachbezogene Stil der Abschnitte 1 und 7 die Freude und das Vertrauen bei manchen Lesern mindern.

J. Weissinger.

● **Geronimus, J(a). L.: S. A. Tschaplygin. Von der hydrodynamischen Forschung zur Gasdynamik.** Übersetzt aus: Skizzen über die Arbeiten russischer Koryphäen der Mechanik. Berlin: VEB Verlag Technik 1954, 88 S., 35 Bilder, kart. DM 6,—.

Diese Darstellung von Tschaplygins Leben, Werk und Wirkung ist dem gleichen Sammelwerk des Verl. entnommen wie die vorstehende Biographie Shukowskis, der sie in Anlage und Stil sehr ähnlich ist. — Inhalt: 1. Lebensbeschreibung (2 S.). 2. Die Dynamik der nichtholonomen Systeme (18 S.). 3. Die Theorie des unendlichen Tragflügels (18 S.). 4. Über die Bewegung kompressibler Gase (11 S.). 5. Das wissenschaftliche Schaffen Tschaplygins (11 S.). 6. Die Entwicklung der Ideen Shukowskis und Tschaplygins in der Arbeit der sowjetischen Gelehrten (6 S.). 7. Literatur (11 S.).

J. Weissinger.

● **Federhofer, Karl: Aufgaben aus der Hydromechanik.** Wien: Springer-Verlag 1954, V, 221 S., 245 Aufg. nebst Lösungen, 235 Textabb. DM 24,—; Ganzleinen DM 27,—.

Dieses Aufgabenbuch erinnert an das wohlbekannte Wittenbauersche (Aufgaben aus d. techn. Mechanik, Bd. III, Berlin 1921), doch weist es in mancher Beziehung sehr nützliche Vervollkommnungen auf. Es werden allerdings nur inkompressible Flüssigkeiten behandelt. Die Aufgaben sind aber sehr verschiedener Natur, so daß der Fachmann die angenehme Überraschung hat, wertvolle Übungen in seinem eigenen Spezialfach zu finden. — Nach einigen Kapiteln über Hydrostatik (Druck in schwerer und in gepreßter Flüssigkeit, Niveaulflächen, Druck auf ebene und krumme Flächen, Auftrieb und Schwimmen) kommen interessante Übungen und Aufgaben über den Ausfluß aus Behältern, Rohrleitungen und Strömung in offenen Gerinnen. Das Kapitel über laminare Strömung enthält Aufgaben, die sich auf Arbeiten von R. v. Mises und A. Betz beziehen. Die Schwingungen werden unter anderem durch die Bewegung in kommunizierenden Behältern illustriert. Wichtige Aufgaben werden auch in dem Kapitel über Anwendungen des Impuls- und Energiesatzes behandelt, wo Verf. auch die Prandtlische Tragflügeltheorie zur Geltung bringt. Die mathematische Strömungslehre wird ebenfalls berücksichtigt; dort werden die Trefftzschen und die Jukowskischen Profile ziemlich weitgehend behandelt. Besonders wichtig ist das Kapitel über Grundwasserströmung, wo die durchlässigen Wandungen und Schichten sowie die Sickerwassermengen herangezogen werden. Das Buch wird mit einer Auswahl von Modellregeln betreffenden Aufgaben beendet. Die Lösungen werden ausführlich erläutert. Das Verständnis der behandelten Aufgaben wird durch Figuren und sauber gezeichnete Diagramme erleichtert.

V. Válcovici.

● **Moiseev, N. N.: Einige Fragen der Theorie der Schwingungen von Gefäßen mit einer Flüssigkeit.** Inženernyj Sbornik 19, 167–170 (1954) [Russisch].

L'A. poursuit les recherches publiées dans un travail ancien (ce Zbl. 49, 246) sur deux pendules remplis d'eau, et les applique à l'étude de la stabilité statique d'un navire citerne. Le tangage et la roulis sont étudiés dans le cas où le domaine rempli par le liquide est un domaine simplement connexe et où ce domaine est partagé en plusieurs parties par des plans verticaux. Les résultats obtenus permettent de trouver expérimentalement la hauteur de métacentre et donnent quelques corrections des formules habituelles.

C. Woronetz.

● **Carafoli, Elie: Tragflügeltheorie. (Inkompressible Flüssigkeiten.)** Berlin: VEB Verlag Technik 1954. 562 S. DM 50,—.

Inhalt: 1. Grundlagen der klassischen Hydrodynamik (55 S.). 2. Theorie des Eindeckertagflügels mit unendlicher Spannweite (110 S.: Profile von Joukowski, Karman-Trefftz und Carafoli; Laminarprofile; experimentelle Überprüfung; Profile mit gegebenem Umriß bzw. gegebener Druckverteilung, Wirbeltheorie dünner Profile). 3. Theorie des Doppeldeckers von unendlicher Spannweite (34 S.). 4. Die Theorie des Eindeckers von endlicher Spannweite (80 S.: Prandtls Traglinientheorie; numerische Methoden; experimentelle Überprüfung; Feld der induzierten Geschwindigkeiten und Ablenkung der Strömung hinter dem Flügel). 5. Die Theorie der deformierten Tragflügel. — Die Theorie der gleichförmigen, nicht geradlinigen Bewegungen (40 S.: Verwindung; Ruder; Einschnitte und Motorgondeln; rotierende Flügel). 6. Die Verteilung der gebundenen Wirbel auf der Oberfläche und die Potentialtheorie der Bewegung um die Tragflügel (37 S.: Theorie der tragenden Fläche (Blenk, Kinner, Krienes, Bollay); schiebende und gefeilte Flügel). 7. Theorie des Auftriebs bei instationärer Bewegung (26 S.). 8. Doppeldecker mit endlicher Spannweite (47 S.). 9. Einfluß von Trennflächen auf die Strömung um tragende Systeme (58 S.: Spiegelbildmethode; Flügel mit Rumpf; Flügel im Bereiche verschiedener Geschwindigkeiten). 10. Die Korrektur der Versuche in Windkanälen oder mit aerodynamischen Meßfahrzeugen (36 S.). — Das Erscheinungsjahr der Originalausgabe ist unmittelbar nirgends zu ersehen; aus den jedem Kapitel angefügten Literaturangaben würde man auf etwa 1949/50 schließen, aus dem Inhalt mancher Kapitel auf 1937/38. Z. B. werden in Kap. 5 die Verfahren von Trefftz-Glauert, Lotz und Fuchs kurz, ein vom Verf. entwickeltes Verfahren sehr ausführlich beschrieben; Multhopps Methode wird überhaupt nicht erwähnt, insbesondere vermißt man einen Hinweis auf die Möglichkeit, Sprungstellen in der Anstellwinkelverteilung abzuspalten. Auch das Kap. 6 befindet sich auf einem Stand, der für das Erscheinungsjahr 1949 mit den Kriegs- und Nachkriegsverhältnissen zu erklären, für 1954 aber nicht zu entschuldigen ist, jedenfalls nicht durch folgende Sätze aus dem „Deutsches Vorwort“ des Verlages: „Der deutsche Leser wird verschiedentlich ihm vertraute Methoden vermissen, die sich in seiner praktischen Rechenarbeit eingeführt haben. Sie unterscheiden sich aber nicht im Wesen, sondern nur in der Form von den Carafolischen Gedankengängen. Deshalb ist der Versuch unterlassen worden, die Geschlossenheit der Darstellung Carafolis durch Einfügen solcher Verfahren zu unterbrechen“. Den „Studierenden, sowohl angehenden Mathematikern wie auch Versuchs- und Entwurfsingenieuren“, für die das Buch vom Verf. bestimmt ist, wäre mit ein paar Literaturhinweisen mehr gedient als mit diesen Betrachtungen über Wesen und Form. Auch die Übersetzung ist nicht immer glücklich, z. B. wird von der Reihenentwicklung einer Besselfunktion gesagt: „Dieser transzendente Ausdruck ist jedoch weit davon entfernt, die Vorteile eines algebraischen Ausdrucks darzustellen, dessen Lösung mit elementaren Mitteln möglich ist“.

J. Weissinger.

Levin, E.: Note on the circle theorem of hydrodynamics. Quart. appl. Math. 12, 315—316 (1954).

Necessary and sufficient condition for the admissibility of rigid boundaries in the plane of the flow.

A. van Heemert.

Seth, B. R.: Generalized singular points with applications to flow problems. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **40**, 25—36 (1954).

Potentialströmungen können durch eine passende Verteilung von Singularitäten wie Quelle, Wirbel oder Dipol erzeugt werden. Bei Beschränkung auf endlich viele Singularitäten sind allerdings nur verhältnismäßig einfache Probleme in dieser Weise lösbar. Ein wesentlich erweitertes Anwendungsfeld gewinnt man bei Verallgemeinerung der Singularitäten. Z. B. kann durch einen ellipsoidalen Dipol die reibungslose Bewegung eines Ellipsoids und entsprechend im ebenen Fall durch einen elliptischen Dipol die Bewegung eines elliptischen Zylinders beschrieben werden. Allgemein läßt sich zeigen, daß die reibungslose Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit durch einen verallgemeinerten Dipol erzeugt werden kann. Ganz entsprechend kann auch die langsame Bewegung eines Körpers in einer zähen Flüssigkeit beschrieben werden, wobei nur noch eine Einzelkraft hinzugefügt werden muß. Ähnliche Verallgemeinerungen gelten auch für die Rotationsbewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit.

W. Wuest.

Piskin, B. A.: Eine künstliche doppelte Schraubenbewegung in einem breiten Flüssigkeitsstrom. Dopovidi Akad. Nauk Ukraï. RSR 1954, 280—283, russ. Zusammenfassg. 283 (1954) [Ukrainisch].

Cukker, M. S.: Der laminare inkompressible, aus einem radialen Diffusor längs einer Wand austretende Strahl. Priklad. Mat. Mech. **18**, 757—761 (1954) [Russisch].

Sarpkaya, Turgut: Deflection of a jet from a symmetrically placed U-shaped obstacle. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **19**, 166—174 (1954).

Viele ebene rotationsfreie Strömungen, die eine Verformung oder Abbiegung freier Strahlen umfassen, können mit Hilfe eines Verfahrens vollständig berechnet werden, das als die Kirchhoffsche Theorie der freien Flüssigkeitsstrahlen bekannt ist [H. Helmholtz, Monatsberichte Akad. Wiss. Berlin **1868**, 215—228 (1868); G. Kirchhoff, J. reine angew. Math. **70**, 289—298 (1869)]. Die erhaltenen Resultate mögen von Bedeutung sein, nicht nur bei den entsprechenden ebenen Strömungen wirklicher inkompressibler Flüssigkeiten, sondern in gewissen Fällen auch bei deren räumlichen Gegenstücken. Zahlreiche numerische Berechnungen bleiben noch zu tun übrig, weil die theoretischen Hydrodynamiker und die praktischen Hydrauliker ihre gemeinsamen Interessen für eine tatkräftige Ausnutzung dieses wertvollen Hilfsmittels bis jetzt nie zusammengetan haben. — Die Hilfsmittel der Berechnung bestehen in der Anwendung wiederholter konformer Abbildungen in einer Geschwindigkeits- oder Hodographenebene sowie in der Benutzung der Schwarz-Christoffelschen Transformation. Die Übereinstimmung der Ergebnisse, die durch Versuche an Strömungen mit axialer Symmetrie erhalten wurden, mit denen der Theorie der ebenen Strömung scheint auffallend gut zu sein.

R. Gran Olsson.

Slezkin, N. A.: Bemerkung zu den Noten von Ju. V. Rumer: „Das Problem eines unterbenetzten Strahls“ und L. G. Lojejanskij: „Die Ausbreitung eines verdrillten Strahls in einem unbegrenzten Raum, der mit derselben Flüssigkeit erfüllt ist“. Priklad. Mat. Mech. **18**, 764 (1954) [Russisch].

Verf. verweist für ein Ergebnis, das von Rumer (dies. Zbl. **46**, 185) und Lojejanskij (dies. Zbl. **51**, 185) L. D. Landau zugeschrieben worden ist, auf seine Arbeit Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski Nr. 2, 1934.

German, V. L. und M. I. Lomonosov: Über die Entstehung einer Kavitation in der Nähe der vibrierenden Teile von Wasserkraftmaschinen. Dopovidi Akad. Nauk Ukraï. RSR 1954, 111—114, russ. Zusammenfassg. 114 (1954) [Ukrainisch].

German, V. L. und K. Ja. Azbel': Zur Hydrodynamik der kavitationsflüssigkeit. Dopovidi Akad. Nauk Ukraï. RSR 1954, 115—118, russ. Zusammenfassg. 118 (1954) [Ukrainisch].

Fox, J. L. and G. W. Morgan: On the stability of some flows of an ideal fluid with free surfaces. *Quart. appl. Math.* **11**, 439—456 (1954).

The theory of Ablow and Hayes (Techn. Rep. No. 1, Office of Naval Research, Graduate Division of appl. Math., Brown Univ. 1951) on perturbations of 2-dimensional perfect fluid flow in the presence of a free surface without external forces, is extended to a number of other or more general cases. With emphasis laid on stability considerations the following cases are treated (i) a jet impinging on a finite plate, (ii) two equal and opposite jets, (iii) generalized orifices and (iv) a hollow vortex bounded by cylindrical walls.

A. van Heemert.

Morgan, G. W.: On the nonsteady motions of a rigid body in an ideal fluid. *Quart. appl. Math.* **12**, 277—285 (1954).

Verf. untersucht die Frage, ob es möglich ist, in einem starren Körper, welcher sich in einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit befindet, einen Angriffspunkt der Kraft so zu bestimmen, daß nur eine translatorische Bewegung ohne Rotation stattfindet. Dabei wird die wirkende Kraft zeitlich variabel und von konstanter Richtung vorausgesetzt. Mit Hilfe der aus der gesamten kinetischen Energie des Systems Körper und Flüssigkeit abgeleiteten Bewegungsgleichungen für den Körper lassen sich folgende Aussagen machen. Im allgemeinen Falle gibt es einen solchen ausgezeichneten Punkt, der auch als scheinbarer Schwerpunkt bezeichnet wird, nicht. Er läßt sich nur finden, wenn gewisse Symmetriebedingungen erfüllt sind. Hat der Körper die Gestalt eines unendlichen Zylinders und erfolgt die Bewegung senkrecht zu den Erzeugenden, so existiert ein scheinbarer Schwerpunkt. Das gleiche gilt für einen Rotationskörper.

H. Falkenhagen-G. Kelbg.

Gurevič, M. U.: Die adjungierte Masse eines aus ebenen Platten bestehenden Doppelgitters. *Moskovsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski* **172**, *Mech.* **5**, 35—46 (1954) [Russisch].

Es wird die sogenannte adjungierte Masse eines Doppelgitterelements, welches aus ebenen unendlich breiten Platten besteht und sich in der ebenen Strömung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit befindet, bestimmt. Das Ziel wird durch die Anwendung einer etwas komplizierten komplexen Analysis erreicht. Dabei bezeichnet der in der russischen mechanischen Literatur eingeführte Begriff der „adjungierten Masse“ [присоединенная масса; s. z. B. Łojekanski-Lure, Lehrgang der theoretischen Mechanik, Bd. II, 5. Aufl., S. 26; Moskau-Leningrad 1955], der schon von Stokes [Trans. philos. Soc. Cambridge **8**, 105 (1843)] unter dem Namen „Massenvermehrung“ eingeführt wurde, diejenige „Masse“, die einem sich in der Flüssigkeit beschleunigt bewegten Körper bzw. von der Flüssigkeit beschleunigt umströmten Körper, hinzugefügt gedacht werden muß, damit diese Bewegung als nur unter den aktiven, in einem widerstandslosen Medium auf den Körper einwirkenden Kräften stattfindend betrachtet werden kann.

T. P. Angelitch.

Dolidze, D. E.: Die durch eine rotierende Scheibe hervorgerufene instationäre Bewegung einer zähen Flüssigkeit. *Priklad. Mat. Mech.* **18**, 371—378 (1954) [Russisch].

Un plan infini, se trouvant dans un fluide visqueux, est animé de rotation autour d'un axe orthogonal au plan (axe des z). La vitesse angulaire $\omega(t)$ étant une fonction de temps, le mouvement fluide est non permanent et se produit en trois dimensions, car la force centrifuge entraîne les particules fluides dans le sens radial et leur masse doit être remplacée par le courant fluide de vitesse V_z , orthogonale au plan et dirigée vers le disque. En négligeant l'influence des forces extérieures et en utilisant les recherches de Kármán sur le mouvement analogue mais permanent, l'A. réussit à amener le problème à l'analyse d'un système des équations aux dérivées partielles de deuxième ordre dépendant de deux variables. Par un procédé connu ces équations se réduisent à deux équations intégrales dont la solution peut être obtenue par des approximations successives. La convergence des séries est

analysée ainsi que l'existence d'une solution unique. La première approximation ne caractérise que le mouvement purement rotationnel. L'effet des forces centrifuges ne se manifeste que dans la seconde approximation. L'A. est d'avis que les résultats obtenus peuvent être appliqués aussi à un disque de rayon fini, assez grand pour que l'on puisse négliger l'influence des bords. L'A. calcule dans ce cas, en se contentant d'une approximation de deuxième ordre, le moment de résistance de disque et la vitesse v_r qui reste limitée à l'infini. *C. Woronetz.*

Sorokin, V. S.: Über stationäre Bewegungen in einer von unten erwärmten Flüssigkeit. Priklad. Mat. Mech. 18, 197—204 (1954) [Russisch].

Aus den Bewegungsgleichungen der inkompressiblen Strömung im Hohlraum eines starren Körpers wird die wichtige Integralformel

$$\partial/\partial t \frac{1}{2} \int [v^2 + PT^2] dV = - \int [(\operatorname{rot} v)^2 + (\operatorname{grad} T)^2 - 2C\gamma v T] dV$$

(T Temperaturdifferenz zum Gleichgewichtszustand $1/T_0 = -\Delta\gamma$ der erwärmten Flüssigkeit, wo γ senkrecht nach oben gerichteter Einheitsvektor, P Prandtl'sche Zahl: $C = \sqrt{g\Delta l r \chi^{1/2}}$ Quadratwurzel aus der Rayleigh'schen Zahl mit der Temperaturleitfähigkeit χ und der charakteristischen Länge l des Hohlvolumens V) abgeleitet, aus der folgt, daß für $C < C_0$ (C_0 kritischer Wert) jede Bewegung zum Gleichgewichtszustand abklingt, was auch für $C = C_0$ nachgewiesen wird. Für $C > C_0$ werden zur Gewinnung stationärer Lösungen Potenzreihenansätze für v , T und p in $r_l = \frac{1}{2} C - C_0$ gemacht, die formal (die Konvergenz wird nicht nachgewiesen) zu reellen Lösungen führen, so daß für $C > C_0$ neben dem Gleichgewichtszustand zwei (!) stationäre Lösungen existieren müßten. *W. Szablewski.*

Žuchovickij, E. M.: Anwendung der Galerkinschen Methode auf das Problem der Stabilität einer ungleichmäßig erwärmten Flüssigkeit. Priklad. Mat. Mech. 18, 205—211 (1954) [Russisch].

Konvektion einer sich in einem Hohlraum eines homogenen starren Körpers befindlichen Flüssigkeit mit vertikal nach unten gerichtetem konstantem Temperaturgradienten tritt nach V. S. Sorokin (dies. Zbl. 51, 421) erst bei Erreichung eines kritischen Wertes des Temperaturgradienten ein. Werden die Bewegungsgleichungen mittels Störungsansatz linearisiert, so stellt sich die Ermittlung der kritischen Temperaturgradienten mit stationärer Lösung als ein Eigenwertproblem dar, das nach der Galerkinschen Methode approximativ gelöst wird. Behandelt werden die Fälle des unendlich langen vertikalen und horizontalen zylindrischen Hohlraumes. *W. Szablewski.*

● **Shapiro Ascher, H.: The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. Vol. I, II. New York: The Ronald Press Company 1953/54. XIII, 647 p., \$ 16,00. XI, 538 p., \$ 16,00 (Beide Bände zusammen \$ 30,00).**

Das vorliegende zweibändige Werk über Gasdynamik verfolgt in erster Linie den praktischen Zweck, Ingenieure und Physiker in dieses weite Gebiet der angewandten Physik einzuführen. Infolgedessen stehen jeweils die physikalischen Begriffe gegenüber den mathematischen Deduktionen im Vordergrund und theoretische Methoden und empirische Resultate wechseln miteinander ab. Durch eingehende Literaturhinweise wird der Leser in den Stand gesetzt, in einzelnen Gebieten weiter vorzudringen und zahlreiche zum Teil sehr interessante Aufgaben geben ihm die Möglichkeit, den gebotenen Stoff sich durch aktive Mitarbeit anzueignen. Die Darstellung ist breit, entsprechend der Zielsetzung des Buches, das sich ja weniger an Mathematiker als an Ingenieure und Physiker wendet. Durch viele beigegebene Zahlentafeln und Diagramme wird der Wert des Buches für den Praktiker besonders gesteigert. Abschnitt I behandelt die aerodynamischen und thermodynamischen Grundlagen und bringt zur Einführung einige fundamentale Begriffe der Gasdynamik wie Mach-Zahl, Mach-Winkel usw. In Abschnitt II folgt die eindimensionale stationäre Strömung einschließlich des senkrechten Verdichtungsstoßes und mit Berücksich-

tigung der Komplikationen, die bei variablem Querschnitt sowie durch Reibung und Wärmeübergang hervorgerufen werden. Nach Aufstellung der Grundgleichungen für die zwei- und dreidimensionale Strömung in Abschnitt III wird in Abschnitt IV die zwei- und dreidimensionale stationäre Unterschallströmung (Linearisierung nach Prandtl-Glauert, Linearisierung durch Übergang zur Hodographenebene, Entwicklungen nach der Mach-Zahl und nach einem Dickenparameter, Göthertsche Regel für die linearisierte räumliche Strömung) und in Abschnitt V die zweidimensionale Überschallströmung (lineare Theorie, Charakteristikenmethode, schiefer Verdichtungsstoß) näher erörtert. In einem Anhang werden die Grundzüge der Charakteristikentheorie bei zwei unabhängigen Veränderlichen plausibel entwickelt. Abschnitt VI setzt das Studium der Überschallströmung fort (achsensymmetrische Überschallströmung um Drehkörper, Quell-Senken-Methode und Methode der konischen Strömungsfelder für Flügel endlicher Spannweite, Ähnlichkeitsgesetze im hypersonic-Fall, d. h. für Strömungen mit sehr hoher Mach-Zahl). Den besonders entwickelten Problemen bei Strömungen mit Mach-Zahlen nahe bei 1 und bei „gemischten“ Strömungsfeldern, d. h. bei Strömungen mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit, ist Abschnitt VI gewidmet. Hierbei wird naturgemäß die tiefer liegende mathematische Problematik nur an der Oberfläche sichtbar. Abschnitt VII betrifft die nichtstationäre eindimensionale Strömung (Ausbreitung von Druckwellen und Verdichtungsstößen in zylindrischen Rohren). Der mathematisch gebildete Leser vermisst hier wohl einen Hinweis auf Riemanns klassische Arbeit auf diesem Gebiet. Der abschließende Abschnitt VIII bringt Ausblicke auf die Phänomene der laminaren und turbulenten Grenzschichten im Zusammenhang mit den Problemen der Ausbildung von Stoßwellen und der Ablösung.

R. Sauer.

Ghaffari, Abolghassem: On some mathematical aspects of compressible flow. Pakistan J. Sci. 6, 111—113 (1954).

Zweidimensionale, kompressible, reibungsfreie Strömung. Verf. betrachtet in der Hodographenebene Funktionen, die einem Produktansatz genügen und für verschwindende Machzahl in elementare Funktionen übergehen. *K. Nickel.*

Schulz, Werner: Über die Bewegungs- und Störungsgleichungen in einem flugzeugfesten Koordinatensystem. Z. Flugwissenschaften 2, 157—168 (1954).

Es handelt sich um eine zusammenfassende Darstellung unter Benutzung dimensionsloser Größen, Verwendung des Matrizenkalküls und Zuhilfenahme der Laplace-Transformation. *J. Rotta.*

Tipei, N.: Les équations de la lubrification aux gaz. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 4, 699—703, russ. u. französ. Zusammenfassg. 704 (1954) [Rumänisch].

Soient S_1 et S_2 les deux surfaces lubrifiées: S_1 est de courbure très petite par rapport à l'épaisseur $\delta(x_1, x_3)$ de la couche du lubrifiant; on choisit les axes $O x_1$ et $O x_3$ tangents à S_1 en un quelconque de ses points, $O x_2$ étant dirigé suivant la normale. Soient v_i les composantes de la vitesse fluide et $1_{1i}, 1_{2i}, (i = 1, 2, 3)$ celles des vitesses de S_1 et S_2 . Les forces d'inertie et la pesanteur étant négligeables, les équations de mouvement de Stokes entraînent en négligeant encore les dérivées $\partial^2 v_i / \partial x_j \partial x_k$ ($j = 2, k \neq 2$) en présence de celles par rapport à x_2 , que la pression soit de la forme $p = x_2 p_1(x_1, x_3, t) + p_{11}(x_1, x_3, t)$ et l'on déduit les expressions de v_1 et v_3 à l'aide de $p_1(x_1, x_3, t)$ et de $p_{11}(x_1, x_3, t)$, compte tenu des conditions aux limites $v_i = 1_{ji}$ sur S_j ($j = 1, 2$), ($i = 1, 3$), v_2 étant négligeable. En admettant une évolution polytrophique du gaz, l'équation de continuité conduit par l'élimination de v_i et de la densité à l'équation aux dérivées partielles de la pression. Lorsque p est indépendant de x_2 , en posant $P = p^{1/\alpha}$, $d_i = 1_{2i} - 1_{1i}$, $s_i = 1_{2i} \cdots 1_{1i}$, celle-ci prend la forme

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial x_1) [(\partial^3/\mu) \partial P p / \partial x_1] + (\partial/\partial x_3) [(\partial^3/\mu) \partial P p / \partial x_3] = 6(1/\alpha - 1) \\ & \cdot \{ [2 \cdot 1_{22} - (d_1 \partial/\partial x_1 + d_3 \partial/\partial x_3)] P + \delta (\partial P s_1 / \partial x_1 + \partial P s_3 / \partial x_3) + 2 \partial P / \partial t \} \end{aligned}$$

où μ est le coefficient de viscosité et α l'exposant de l'évolution polytrophique.

C. Iacob.

Barua, S. N.: Secondary flow in a rotating straight pipe. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **227**, 133—139 (1954).

Ein gerades Rohr von kreisförmigem Querschnitt werde von einer zähen Flüssigkeit unter Druckgefälle durchströmt. Verf. untersucht den Einfluß einer Rotation des Rohres um eine dazu senkrechte Achse auf die Bewegung der Flüssigkeit. Für kleine Winkelgeschwindigkeiten lassen sich die Bewegungsgleichungen durch eine Störungsrechnung näherungsweise lösen. Daraus folgt, daß die Flüssigkeitsteilchen sich auf Spiralen relativ zum Rohr bewegen. Eine Formel für den Widerstandskoeffizienten wird abgeleitet. *H. Falkenhagen-G. Kelbg.*

● **Pai, S.:** Fluid dynamics of jets. New York: D. van Nostrand Co., Inc. London: Macmillan and Co., Ltd. 1945. XV, 227 p. 37 s. 6d. net.

Castoldi, Luigi: Di una generale alternativa cinematica, per velocità subsoniche e ipersoniche, nel moto stazionario di un fluido comprimibile perfetto in regime adiabatico. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **24**, 46—50 (1954).

Aus den Eulerschen Gleichungen der stationären Bewegung, aus der Kontinuitätsgleichung und aus der adiabatischen Zustandsgleichung wird längs der Stromlinien die (als geometrische Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes bezeichnete) Divergenz des Einheitsvektors u der Geschwindigkeit berechnet:

$$\operatorname{div} u = (M^2 - 1) v^{-1} dv/ds = (M^2 - 1) M^{-1} (1 + \frac{1}{2} (\kappa - 1) M^2)^{-1} dM/ds$$

(v Geschwindigkeitsbetrag, M Machzahl, κ Adiabatenexponent, ds Bogenelement der Stromlinie) und hieraus intuitiv ein Schluß gezogen über die qualitative Gestalt der Schallfläche in einer von Unter- zu Überschall durchströmten Lavaldüse. Die beigelegte Prinzipskizze ist jedoch zumindest für ebene und drehsymmetrische Düsen insofern irreführend, als die Schallfläche in Düsenmitte ihren Scheitel nach der Überschallzone wendet. *H. Behrbohm.*

Dumitrescu, D.: Répartition des vitesses dans le mouvement d'un fluide pesant, à la surface libre. Comun. Acad. Republ. popul. Romine **4**, 705—713, russ. u. französ. Zusammenfassg. 713 (1954) [Rumänisch].

L'écoulement plan et permanent à lieu dans un canal dont le fond rectiligne est incliné de l'angle α sur l'horizontale. La hauteur du fluide est égale à h . Sur la ligne libre $y = h$, la vitesse est u_0 . La vitesse moyenne u , ainsi que la pulsation u' ne dépendant que de y , le système de Reynolds se réduit à l'unique équation

$$d^2V/d\eta^2 + \chi^2 \operatorname{Re} (d/d\eta) [\eta^2 (dV/d\eta)^2] + \operatorname{Re} \sin \alpha / Fr = 0,$$

avec $\eta = y h^{-1}$, $V = \bar{u} u_0^{-1}$, $\operatorname{Re} = u_0 h \nu^{-1}$, $Fr = u_0^2 g^{-1} h^{-1}$; $\chi = 0,38$ est la constante de Nikuradse. L'auteur adopte les conditions aux limites: $V = 0$ pour $\eta = 0$ (adhérence à la paroi) et $dV/d\eta = 0$ pour $\eta = 1$ (composante tangentielle de la tension nulle à la surface libre) et exprime la solution moyennant les transcendentes elliptiques de Weierstrass. Une solution approchée, se prêtant mieux aux calculs numériques, est également donnée. *C. Iacob.*

Legras, J.: La seconde approximation de l'aile élanée en écoulement subsonique. Rech. aéronaut. **42**, 17—21 (1954).

Durch einen ersten Iterationsschritt wird die Jones'sche Lösung für unverwundene, schlanke, dreieckartige Flügel mit gerader Hinterkante verbessert, wobei zur Vereinfachung der Integrationen ein aus vollständigen elliptischen Integralen zusammengesetzter Kern geeignet approximiert wird. In der Nähe der Hinterkante, wo die so erhaltene Lösung unendlich würde, wird durch Entwicklung nach einem Schlankheitsparameter unter Benutzung der asymptotischen Technik von Lighthill eine endliche Lösung erhalten. So ergibt sich für jeden Bereich der Flügeltiefe ein Korrekturfaktor an der Jones'schen Lösung, der mit Messungen im elektrischen Trog gut übereinstimmt. Eine ausführliche Darstellung soll später erscheinen. *J. Weissinger.*

Krjučin, A. F.: Zum Problem der Strömung um ein Profil in der Nähe der Schallgeschwindigkeit. Priklad. Mat. Mech. 18, 547—560 (1954) [Russisch].

L'A. considère l'écoulement permanent d'un gaz parfait et suppose que la vitesse s'approche à celle du son. L'application de la théorie de similitude permet de réduire le problème d'un courant gazeux contournant un coin à l'analyse de l'équation de type Euler-Darboux. $U \mathcal{E}^2 Y / \partial T^2 + \partial^2 Y / \partial T^2 = 0$. L'A. réussit à satisfaire approximativement à toutes les conditions aux limites par des solutions particulières de cette équation. *C. Woronetz.*

Bloch, É. L.: Über den Stoß eines Rotationsellipsoids, das auf der Oberfläche einer sehr schweren Flüssigkeit schwimmt. Priklad. Mat. Mech. 18, 631—636 (1955) [Russisch].

Dans le cas d'un corps solide se trouvant sur la surface liquide et mis brusquement en mouvement, deux mouvements limites peuvent être considérés: celui qui correspond à des accélérations très grandes avec la condition $q = 0$ sur la surface libre et celui d'un liquide très lourd, caractérisé par la condition $\partial q / \partial z = 0$ sur cette surface. (q est le potentiel, l'axe z est vertical.) Connaissant les coefficients des masses associées dans ces deux cas limites on peut se rendre compte de leur variation dans tout le domaine des valeurs de nombre de Froude entre 0 et ∞ . La présente Note se rapporte à un mouvement nommé vertical (translation verticale et rotation autour des axes horizontaux) d'un ellipsoïde de révolution sous la condition que $\partial q / \partial z = 0$ sur la surface libre. L'A. trouve la forme de potentiel q et calcule les coefficients des masses associées dans le cas où l'axe de rotation est vertical et dans le cas où il est horizontal. Les formules se simplifient considérablement dans les cas limites: d'une sphère et d'un ellipsoïde très allongé. *C. Woronetz.*

Nickel, Karl: Der höchstmögliche Auftrieb von Tragflügeln. Z. angew. Math. Mech. 34, 374—385 (1954).

Die Funktionen $c(y)$, $C(y)$, $h(y)$ seien in $a \leq y \leq b$ stückweise stetig mit $c(y) < C(y)$, überdies $h(y)$ stückweise differenzierbar und monoton, M eine gegebene Konstante. Gesucht wird eine stückweise stetige Funktion $\gamma(y)$, welche $A(\gamma) = \int_a^b \gamma(y) dy$ unter den Nebenbedingungen (1) $c(y) \leq \gamma(y) \leq C(y)$, (2) $M(\gamma) = \int_a^b \gamma(y) h(y) dy = M$ zum Maximum macht. Unter gewissen naheliegenden Einschränkungen für M wird die Lösung, die sich stückweise aus $c(y)$ und $C(y)$ zusammensetzt, konstruiert und ihre Einzigkeit bewiesen. Ferner wird gezeigt, daß der Ersatz der Nebenbedingung (2) durch die Forderung $M(\gamma) A(\gamma) = H$ bei geeigneter Zuordnung von M und H zu gleichen Lösungen führt. Anwendung auf Fragen der Tragflügeltheorie. Deutet man z. B. $\gamma(y)$ als Auftriebsverteilung [also $A(\gamma)$ als Gesamtauftrieb], $c(y)$ bzw. $C(y)$ als Minimal- bzw. Maximalauftrieb des Profilschnitts y und $M(\gamma)$ als ein (Roll- oder Längs-) Moment, so wird durch den Satz die Frage nach dem maximalen Auftrieb bei vorgeschriebenem Moment beantwortet. Das etwas formale Resultat wird auf seine physikalische Stichhaltigkeit diskutiert. *J. Weissinger.*

Gliki, L. V.: Theoretische Bestimmung des Koeffizienten der maximalen Hubkraft $C_{y_{\max}}$ für Flügelprofile. Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski 172, Mech. 5, 9—23 (1954) [Russisch].

Im vorliegenden Artikel werden die Grundergebnisse einer theoretischen Untersuchung kurz dargelegt, die der Frage über die Bestimmung von $C_{y_{\max}}$ für eine ebene Platte und eine Serie von symmetrischen Profilen (Rudern) von N. E. Žukovskij gewidmet ist. — Der Grundzweck der Untersuchung besteht in der Ausarbeitung einer Methode für die Bestimmung der Hubkraft eines Flügelprofils unter Angriffswinkeln, die größer als der kritische sind. — Die entwickelte Lösungsmethode der Aufgabe berücksichtigt die Singularitäten der Strömung hinter

dem umflossenen Profil bei großen Angriffswinkeln und ergibt Resultate, die mit den experimentellen Daten übereinstimmen. Bei der Konstruktion der Strömung wird der Fluß einer idealen Flüssigkeit um ein Profil bei Vorhandensein des Kármán'schen stabilen Wirbelweges untersucht und die Methode der konformen Transformationen von Strömungen verwendet. Zur Aufstellung einer Theorie der Hubkraft und des aerodynamischen Widerstands eines Flügels unter großen Angriffswinkeln werden die Resultate einer durchgeführten experimentellen Untersuchung der Wirbelbewegung in der Nähe schlecht umfließbarer Körper ausgewertet.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Aldinio, Giorgio: Il traino aero di resistenza minima. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **87** (III. Ser. **18**), 593—614 (1954).

Die Bedingungen für den minimalen Widerstand eines Flugzeuges; das von einem anderen mit Hilfe eines Schleppseiles geschleppt wird, werden angegeben. Es ergeben sich sehr bemerkenswerte Hinweise für die Praxis insofern, als die günstigste Verbindung beider Flugzeuge durch das Schleppseil von der in der Praxis üblichen beträchtlich abweicht.

Th. Sexl.

● **Schlichting, H.:** Grenzschicht-Theorie. Unveränderte Neuauflage. Karlsruhe: Verlag G. Braun 1954. 483 S., 295 Abb., 32 Tab. Ganzln. 45,- DM.

Squire, L. C.: Boundary layer growth in three dimensions. Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 1272—1282 (1954).

Das Anwachsen der Grenzschicht eines aus der Ruhe heraus plötzlich in Bewegung gesetzten Körpers ist von Goldstein und Rosenhead [Proc. Cambridge philos. Soc. **32**, 322 (1936)] für das ebene Problem untersucht worden. Diese Theorie der sukzessiven Approximation ist hier auf dreidimensionale Probleme in allgemeiner Form übertragen worden, wobei die benötigten Funktionen bis zur 3. Näherung berechnet sind. Die Ergebnisse werden angewandt auf die Berechnung der Grenzschicht an einem Ellipsoid mit dem Achsenverhältnis 30:6:1, welches sich parallel zur mittellänglichen Achse bewegt. Ort und dimensionslose Zeit der einsetzenden Grenzschichtablösung werden angegeben und mit einer Lösung von Hayes [NAVORD-Rep. 1313 (1951)] verglichen.

F. W. Riegels.

Stewartson, K.: Further solutions of the Falkner-Skan equation. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 454—465 (1954).

Nachdem Mangler [Z. angew. Math. Mech. **23**, 241—251 (1943)] bereits früher die Gesamtheit der physikalisch sinnvollen ähnlichen Lösungen der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen eingehend diskutiert hat, versucht der Verf. das Problem weiterer mathematischer Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung $f''' + f f'' - \beta(1 - f^2) = 0$ mit den Randbedingungen $f(0) = f'(0) = 0$ und $f'(\eta) \rightarrow 1$ für $\eta \rightarrow \infty$ erneut anzugreifen, und zwar mit der ausgesprochenen Absicht, zu prüfen „ob diese etwas Licht in die die Ablösung beherrschenden Mechanismen zu bringen vermögen“. Verf. diskutiert als weitere Lösungen: 1. Solche, für die $f''(0) < 0$ im Bereich $-0,1288 < \beta < 0$ ist (für verschiedene β tabelliert), 2. eine Familie von Lösungen im Bereich $-0,5 < \beta < 0$, die — unter Abänderung der Randbedingungen an der Wand in $f(0) = f''(0) = 0$ — zu „Grenzschichten“ gehören, die bei $y = 0$ durch eine freie Stromlinie begrenzt sind. *F. W. Riegels.*

Coles, Donald: The problem of the turbulent boundary layer. Z. angew. Math. Phys. **5**, 181—203 (1954).

Es werden Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Grenzschicht an einer glatten, ebenen Platte mit konstantem Druck rechnerisch untersucht. Dabei werden in bekannter Weise für den äußeren Grenzschichtteil und für die wandnahe Schicht zwei verschiedene Ähnlichkeitsgesetze benutzt, die durch bekannt gewordene Meßergebnisse bestätigt werden. Hieraus lassen sich die örtlichen Größen der turbulenten Grenzschicht durch einfache Gesetze miteinander in Beziehung bringen. Die Integration über die Länge der Platte ergibt dann das Widerstandsgesetz. Die Ergebnisse sind denen der klassischen Arbeit von Prandtl (dies. Zbl. **5**, 36) ähnlich. Die Verfeinerung besteht darin, daß die Abweichung der Geschwindigkeitsverteilung von

dem logarithmischen Gesetz im äußeren Grenzschnittteil berücksichtigt wird. Die Rechnungen stehen in Übereinstimmung mit vorhandenen Versuchsergebnissen der Oberflächenreibung. *J. Rotta.*

Pearson, Carl E: Corrections in hot-wire correlation measurements. *Quart. appl. Math.* **12**, 235—240 (1954).

Messungen mit Hitzdrahtinstrumenten müssen wegen des Einflusses der endlichen Drahtlänge korrigiert werden, besonders wenn Turbulenzerscheinungen zu untersuchen sind. Hier wird eine Integralgleichung hergeleitet, aus der sich unter Verwendung der experimentellen Daten die Korrekturen berechnen lassen. *G. Hämmerlin.*

Hyman, M. A.: On the correlation function in Burgers' model of turbulence. *Appl. sci. Research*, **A 4**, 361—373 (1954).

Die Gleichung der Korrelationsfunktion von Burgers für das Modell einer ein-dimensionalen Turbulenz wurde untersucht. Es wird gezeigt, daß ein dabei auftretender Parameter β stets den Wert Null haben muß. Damit reduziert sich die Gleichung der Korrelationsfunktion auf eine partielle Differentialgleichung 3. Ordnung. Eine numerische Integration ergibt, daß die Lösung der Burgerschen Gleichung sich so verhält, wie es die physikalischen Verhältnisse bei der Turbulenz erwarten lassen. *J. Rotta.*

Malkus, W. V. R.: The heat transport and spectrum of thermal turbulence. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **225**, 196—212 (1954).

Im Hinblick auf geophysikalische Anwendungen wird die stationäre inhomogene turbulente Wärmeübertragung zwischen zwei horizontalen Flächen untersucht. Wenn eine gewisse Mindestgröße von Wirbelelementen wirksam ist, kann eine obere Grenze für die Wärmeübertragung gefunden werden. Das Spektrum der konvektiven Bewegungen und die räumlichen Änderungen der turbulenten Wärmeleitung werden in Abhängigkeit von den kleinsten wirksamen Wirbelelementen bestimmt. Im zweiten Teil der Arbeit wird der Versuch unternommen, die Größe der kleinsten Wirbelelemente zu bestimmen, wobei an eine frühere Arbeit von Pellew und Southwell (1940) angeknüpft wird. Ausgehend vom mittleren Temperaturgradienten zwischen den beiden Flächen wird die Rayleigh-Zahl bestimmt, bei der die $(n_0 + 1)$ -te Bewegungsform zuerst instabil wird, wenn n_0 Bewegungsformen schon vorhanden sind. Abschließend werden die Frequenzspektren und Quadratmittel der Schwankungsgeschwindigkeiten und des Temperaturfeldes ausgehend von der Boussinesq'schen Form der hydrodynamischen Gleichungen ermittelt. *W. Wuest.*

Marris, A. W.: On the Nusselt modulus as a function of friction factor, Reynolds and Prandtl moduli, for heat transfer to a fluid flowing turbulently through a tube of circular section. *Canadian J. Phys.* **32**, 167—189 (1954).

Zur Deutung der Wärmeübertragung in turbulenten Grenzsichten hat man eine formale Analogie mit dem Austausch von Strömungsgrößen (Impuls- oder Wirbelstärke) herangezogen. Die Brauchbarkeit einer solchen Analogie erweist sich daran, ob das Verhältnis des turbulenten Wärmeaustauschkoeffizienten und des Impuls- oder Wirbelstärke-Austauschkoeffizienten konstant ist. Es zeigt sich, daß die Analogie mit dem Wirbelaustausch für Nachlaufströmungen gut geeignet ist, jedoch bei der turbulenten Rohrströmung in der Nähe der Wand versagt. Es werden daher für die turbulente Rohrströmung mit konstantem Temperaturgradienten in Richtung der Rohrachse auf der Grundlage des Impulsaustausches Formeln für das Produkt aus Nusseltscher Zahl und dem Reibungskoeffizienten sowie für die radiale Temperaturverteilung abgeleitet. *W. Wuest.*

Marris, A. W.: The momentum and vorticity transfer theories of turbulent heat transfer. *Canadian J. Phys.* **32**, 419—429 (1954).

Führt man in die turbulente Rohrströmung mit Wärmeübertragung die Wirbeltransporttheorie ein, so ergibt sich mit dem logarithmischen Geschwindigkeits-

gesetz in Wandnähe ein negativer Wirbelaustauschkoeffizient, was physikalisch nicht möglich ist. Berechnet man das Produkt aus Nusseltscher Zahl und Reibungsbeiwert, so führt die Wirbeltransporttheorie, wenn man den erwähnten Randbereich von der Integration ausschließt, zu wesentlich niedrigeren Werten als die Impulstransporttheorie. Messungen deuten darauf hin, daß die wirklichen Werte zwischen beiden Ansätzen liegen, wobei mit wachsender Reynoldsscher Zahl die Wirbeltransporttheorie vorherrschender wird.

W. Wuest.

Chow, Tse-sun: On the average second moment of the energy spectral intensity. Quart. appl. Math. 12, 287—294 (1954).

Im Unterschied zu Kampé de Fériet (dies. Zbl. 29, 425) verwendet Verf. hier für räumliche Strömungen (Ortsvektor im Raume: \mathbf{r}) mit dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ eine reelle Form der Fourierzerlegung: $\mathbf{v} = \sum \mathfrak{A}(\mathbf{f}, t) K(\mathbf{f} \cdot \mathbf{r})$. Das Summenzeichen erstreckt sich hier immer über die (als abzählbar vorausgesetzten) Punkte des Raumes der Wellenzahlen-Vektoren \mathbf{f} (deren Betrag mit k bezeichnet wird). \mathfrak{A} ist der spektrale Amplitudenvektor der Geschwindigkeit \mathbf{v} , $\mathbf{f} \cdot \mathbf{r} = q$ ein Phasenwinkel, $K(q) = \sin q + \cos q$. Aus den Navier-Stokesschen Gleichungen ergibt sich für \mathfrak{A} eine Differentialgleichung $\partial \mathfrak{A} / \partial t + \nu k^2 \mathfrak{A} = \tilde{\mathfrak{F}}[\mathfrak{A}]$, wobei $\tilde{\mathfrak{F}}[\mathfrak{A}]$ aus den Wechselwirkungen zwischen Komponenten mit verschiedenen Wellenzahlen entsteht. Der Kontinuitätsgleichung entspricht die Orthogonalitätsbeziehung $\mathbf{f} \cdot \mathfrak{A} = 0$. Dann ist die Dichte der kinetischen Energie $E(t) = \frac{1}{2} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}$, und es

gilt $E(t) = E(0) \exp \left[-2\nu \int_0^t \{k^2(\tau)\} d\tau \right]$. Hierin ist $\{k^2(t)\} = (\sum k^2 \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}) / (\sum \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A})$

das mittlere zweite Moment der Spektralverteilung der Energie. Verf. untersucht nun besonders die zeitlichen Änderungen von $\{k^2\}$, die nach der für \mathfrak{A} gültigen Gleichung teils auf der Zähigkeit ν , teils auf den Wechselwirkungen beruhen. Für zweidimensionale Strömungen sind dabei schärfere Aussagen möglich als für räumliche, doch vermag Verf. hier wenigstens für kurze Zeiten ebenfalls Schranken für die Dissipation der Energie anzugeben.

U. T. Bödewadt.

Pack, D. C. and S. I. Pai: Similarity laws for supersonic flows. Quart. appl. Math. 11, 377—384 (1954).

Für die Praxis sind Ähnlichkeitsgesetze ein brauchbares Koordinierungsprinzip von Messungen. Seit langem sind die Prandtl-Glauertsche Regel für den linearisierten Unterschall und den linearisierten Überschall, Kármáns transsonisches und Tsiens hypersonisches Ähnlichkeitsgesetz wohlbekannt. Verff. stellen auf dem üblichen Wege (dimensionslose Schreibweise von sowohl Differentialgleichung als auch Randbedingung) für wenig gestörte Überschallanströmung allgemeinere Ähnlichkeitsgesetze auf mit zwei Parametern, $K_1 = M^2 - 1/\tau^n$, $K_2 = M^2 - 1/\lambda$; τ ist das Dickenverhältnis, λ das Seitenverhältnis des Flügels, M die Machzahl der Anströmung. Der Exponent n wird explizit als Funktion von M und τ gegeben. Im gesamten Bereich von $M = 1$ bis $M = \infty$ sind zwei Gebiete zu unterscheiden, getrennt voneinander durch $n = 0$. Zu jedem gehört ein Ähnlichkeitsgesetz. Im Gesetz des unteren Bereiches ($n < 0$) strebt n für alle τ bei $M \rightarrow 1 + 0$ gegen 1/3, so daß dieses Gesetz in das transsonische übergeht. Im Gesetz des oberen Bereiches ($n > 0$) geht n für alle τ bei $M \rightarrow \infty$ gegen 1, so daß sich in der Grenze das hypersonische Gesetz einstellt.

H. Behrbohm.

Behrbohm, Hermann: Zur Theorie der wenig gestörten homogenen Überschallfelder. Jahrbuch wiss. Ges. Luftfahrt 1954, 259—265 (1954).

Unter dem Titel werden kegelige Überschallströmungen der linearen Theorie verstanden, bei denen das Potential eine positiv-ganzzahlige homogene Funktion der Koordinaten ist. Diese Verallgemeinerung einer Theorie von Busemann ist seit längerem bekannt und wird vom Verf. für den interessanten Fall der tragenden Platte mit Unterschallvorderkante behandelt. In Verallgemeinerung des Verfahrens

von Behrbohm-Oswatitsch der Quellbelegung mit unbekannten Quellstärken gelingt dem Verf. eine allgemeine Lösung des Problems, die aus Zeitmangel leider nur in bestimmten Fällen völlig zu Ende gebracht werden konnte. *K. Oswatitsch.*

Aslanov, S. K.: Die Strömung eines idealen Gases um einen dünnen Keil mit schwacher Überschallgeschwindigkeit. Priklad. Mat. Mech. 18, 561—572 (1954) [Russisch].

L'A. mentionne quelques difficultés qui apparaissent dans l'étude d'un courant gazeux contournant un coin dans le cas où la vitesse dépasse peu la vitesse du son. La cause principale de ces difficultés est la distribution non régulière des vitesses et la forme compliquée des conditions aux limites. On peut échapper à ces difficultés en exprimant la résistance ondulatoire par un saut d'entropie et en comparant ce dernier avec les résultats donnés par la théorie de similitude. Les formules obtenues par cette méthode sont comparées avec les résultats des expériences et une correspondance suffisante est constatée. *C. Woronetz.*

Murgulescu, Elena: Le mouvement supersonique autour d'une aile Δ munie d'un fuselage conique. Acad. Republ. popul. Romine. Bul. şti., Sect. şti. mat. fiz. 6, 741—752, russ. u. französ. Zusammenfassg. 752, 752—753 (1954) [Rumänisch].

On considère une aile Δ symétrique, munie d'un fuselage formé par un cône circulaire dont l'axe coïncide avec l'axe de symétrie de l'aile; le cône ainsi que l'aile sont d'ouvertures assez petites par rapport à celle du cône de Mach du sommet. Dans le cas de l'incidence nulle, la solution ne diffère pas de celle correspondant au cône sans ailes latérales. L'A. détermine les corrections à apporter lorsque l'incidence j de l'aile est assez petite; à cet effet sont utilisées les formules données par P. Germain (La théorie générale des mouvements coniques et ses applications à l'aérodynamique supersonique, O. N. E. R. A. Paris 1949), lesquelles exigent la connaissance de la représentation conforme du domaine du plan $z = \xi + i\eta$, dont la frontière est constituée par la circonférence $|\xi| = \varrho$ et les segments $[-\xi_1, -\varrho]$, $[\varrho, \xi_1]$ de l'axe réel, sur l'extérieur de la circonférence $|Z| = r$. Moyennent cette transformation, l'A. détermine les composantes de la vitesse de perturbation sur les ailes latérales et sur le fuselage conique, ce qui lui permet de déterminer la pression aérodynamique, en ne conservant que les termes du premier ordre par rapport à j . *C. Iacob.*

Holt, M.: A vortical singularity in conical flow. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 438—445 (1954).

Verf. diskutiert die von Ferri [NACA Rep. 1045 (1951)] eingeführte singuläre Linie in der Überschallströmung um den schiebenden Kegel. Nach einem Hinweis auf den isentropischen Fall wendet er sich insbesondere der nicht-isentropischen Singularität zu und zeigt, daß die Geschwindigkeit in der Singularität mehrdeutig, die Wirbelstärke unendlich, aber der Druck eindeutig ist. Die Singularität kann an ein allgemeines Feld mit konischer Strömung hinter einem Stoß angepaßt und insbesondere auf das Problem des schiebenden Kegels angewandt werden. Als wahrscheinlich wichtigstes Ergebnis für diesen Fall bezeichnet der Verf. die Tatsache, daß in der Nachbarschaft der Singularität alle abhängigen Variablen in Ausdrücken einer einzigen Unbekannten, nämlich der Entropieverteilung längs des Stoßes, ausgedrückt werden können. *F. W. Riegels.*

Oswatitsch, K. und L. Sjödin: Kegelige Überschallströmung in Schallnähe. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 284—292 (1954).

Wenn auch das Problem der Überschallströmung an axial angeblasenen Kreiskegeln längst gelöst ist, so halten die Verff. eine mit den üblichen transsonischen Approximationen vereinfachte Behandlung für schlanke Kreiskegel im schallnahen Überschall doch für angemessen, da die vorhandenen Tabellen dort nicht ausreichend dicht gerechnet sind. Neben der Herleitung der Näherungsgleichungen werden auch die numerischen Ergebnisse in Tabellenform mitgeteilt. Mit Hilfe des transsonischen Äquivalenzsatzes [F. Keune und K. Oswatitsch, Z. angew. Math. Phys.

7, 49—63 (1956) lassen sich die Resultate auf schlanke Kegel allgemeiner Querschnittsform (z. B. auf die Verhältnisse in der Umgebung der Spitze von Deltaflügeln) übertragen, wenn deren Spannweite im Vergleich zum örtlichen Durchmesser des von der Spitze ausgehenden Machkegels hinreichend klein ist. *H. Behrbohm.*

Leslie, D. C. M. and J. D. Perry: Wave drag of wings at supersonic speeds. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **225**, 213—225 (1954).

Für zur Flugebene symmetrische Flügel ohne Austellung und mit geringer Dicke kann in einem gewissen Überschall-Machzahlbereich der Wellenwiderstand an Hand der linearisierten Tragflächentheorie berechnet werden. Um den hierbei meist verwendeten, aber etwas mühsamen Weg zu vermeiden, der den Wellenwiderstand aus der zuvor bestimmten Druckverteilung des Flügels ermittelt, wird ohne explizite Druckberechnung der Widerstand von vornherein als ein vierfaches Integral geschrieben. Durch geeignete Transformationen gelingt es, dies Integral in eine Form zu bringen, in der es als eine einfache Integration über eine geometrische Verteilungsfunktion erscheint. Für aus ebenen Teilflächen facettenartig aufgebaute Flügel ist die Berechnung dieser Verteilungsfunktion besonders einfach. Dies wird am Puckettischen Deltaflügel und an einem Flügel hexagonalen Grundrisses mit sechs Facetten vorgeführt. — Anhangsweise wird die Anwendbarkeit der Methode auch für den Fall des dünnen tragenden Flügels mit Überschallvorder- und -hinterkanten gezeigt und es werden mit ihrer Hilfe einige einfache und größtenteils bekannte Resultate über den Antrieb solcher Flügel hergeleitet. *H. Behrbohm.*

Miles, John W.: On the transformation of the linearized equation of unsteady supersonic flow. Quart. appl. Math. **12**, 1—12 (1954).

Die linearisierte Gleichung für das Geschwindigkeitspotential φ in instationärer Überschallströmung in einem raumfesten Koordinatensystem (n. a. W. die klassische Wellengleichung (1) $q_{xx} + q_{yy} + q_{zz} = q_{\tau\tau}$, X, Y, Z dimensionslose Raumkoordinaten, $T = t/c$, t wahre Zeit, c Schallgeschwindigkeit, l Bezugslänge) wird durch die modifizierte Lorentztransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} = (M^2 - 1)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & M \\ M & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ T \end{pmatrix}, \quad y = Y, \quad z = Z$$

($M > 1$, Machzahl) auf die Form (2) $\square \varphi \equiv \varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = \varphi_{\tau\tau}$ gebracht. Hier liegt das Koordinatensystem, in dem Flugkörper fixiert, was für die Formulierung der Randbedingungen günstig ist. Setzt man für q eine harmonische Zeitabhängigkeit der Form $\exp(-ik\tau)$ an, so wird aus (2) die „hyperbolische Helmholtzgleichung“ (3) $\square q + k^2 q = 0$, die wegen der Überschallbedingung: $q = 0$ für $x = 0$ ($x = 0$ sei der vorderste Punkt des Störkörpers) mittels der Laplacetrans-

formation $\Phi = \int_0^\infty \tau q d\tau$ auf die Form (4) $\Phi_{xx} - \Phi_{zz} - \lambda^2 \Phi = 0$ ($\lambda^2 = s^2 + k^2$)

gebracht werden kann. Vert. studiert Transformationen der Ortskoordinaten mit diagonalen hyperbolischen Metrik. In Analogie zur klassischen Wellengleichung werden elf Koordinatensysteme angegeben, in denen (2), (3) resp. (4) separierbar ist. Die in bezug auf x zylindrischen Systeme sind dabei die gleichen wie im euklidischen Fall. Für diese, die kartesischen, die zylindrisch polaren, die elliptischen und die parabolischen Zylinderkoordinaten, wird (4) separiert. Für die übrigen, von ihrem euklidischen Gegenstück verschiedenen und resp. als hyperbolische Koordinaten, Koordinaten des „verlangerten“ und des „abgeplatteten“ Hyperboloids, Hyperboloidkoordinaten, Hyperboloid-Kegelkoordinaten, parabolische und paraboloidische Koordinaten bezeichneten Systeme, wird angegeben, wie sich der „hyperbolische Laplaceoperator“ $\square q$ transformiert, und es wird (2) resp. (3) separiert. Einige praktische Anwendungen werden mitgeteilt. *H. Behrbohm.*

Sänger, E.: Zur Thermodynamik des Überschall-Geradstoßdiffusors. Ingenieur-Arch. **22**, 378—399 (1954).

In dieser weitausholenden Arbeit werden grundsätzliche Betrachtungen über die Grundlagen einer quantitativen, thermodynamischen Theorie des Überschallgeradstoßdiffusors gegeben, der als Lufterlauf für Überschalltriebwerke praktische Bedeutung hat. Bei ihm wird die ankommende Überschallströmung durch einen vor dem Diffusormund senkrechten Verdichtungsstoß in Unterschallströmung verwandelt, der Diffusor selbst also mit Unterschallgeschwindigkeit angeströmt und durchströmt. Die dabei auftretenden drei Strömungsphasen 1. gerader Stoß, 2. isentrope Unterschallanströmung zwischen Stoß und Mund, 3. adiabatische Durchströmung von Mund zu Diffusorende werden im einzelnen eingehend behandelt. Zunächst wird zwischen gasdynamischer Strömung (praktisch ideale Gase mit konstanten spezifischen Wärmen), thermodynamischer Strömung (halbideale Gase mit temperaturabhängigen spezifischen Wärmen), thermochemischer Strömung (praktisch nicht-ideale Gase als Gemische von in chemischem Gleichgewicht befindlichen, reagierenden Gasen, mit druckabhängigen spezifischen Wärmen) und thermoelektrischer Strömung (thermisch ionisierende Gase) unterschieden. Mit Luft als strömendem Medium gelten für Flugmachzahlen bis etwa $M = 2$ oder für außerordentlich kurzzeitige Zustandsänderungen (Trägheit der inneren Freiheitsgrade gegenüber dem Translationsfreiheitsgrad) die Gesetze der gasdynamischen Strömung, bei langsameren Zustandsänderungen (Einstellung thermischer Gleichgewichte) bis etwa $M = 6$ die Gesetze der thermodynamischen Strömung; bei höherem M , insbesondere in großen Flughöhen, bedarf es aber der Gesetze der thermochemischen resp. thermoelektrischen Strömung. Trotz allem wird approximativ die Untersuchung auf das herkömmliche Hilfsmittel der Poissonschen Adiabaten Gleichung $p \varrho^{-k} = \text{const}$ zurückführbar (p Druck, ϱ Dichte), indem für die interessierenden Flugbereiche geeignete Mittelwerte der Adiabaten- oder Isentropenexponenten k gewählt werden können. Die Stoßgleichungen werden sowohl in gasdynamischer als auch in thermochemischer Schreibweise gegeben und diskutiert. Die isentrope Unterschallanströmung zwischen Stoß und Diffusormund wird hauptsächlich in Hinsicht auf das Druckverhältnis zwischen Stoßfront und Mund für ideale, halbideale und nichtideale Gase, und auf die daraus resultierende (je nach Querschnittsverhältnis) positive oder negative Schubkraft untersucht. Die Absetzbarkeit dieser Kraft auf die Diffusornase wird besprochen und es wird die Regelbarkeit des Diffusors (Anpassung des Luftdurchsatzes an die Betriebsbedingungen) diskutiert. Für die 3. Phase (adiabatische Durchströmung) wird der Wirkungsgrad ermittelt und der Diffusorschub sowohl in thermochemischer als auch in thermodynamischer und gasdynamischer Strömung berechnet. Schließlich wird auch ein Überblick über die am Diffusorende herrschenden Zustände gegeben.

H. Behrbohm.

Mackie, A. G.: One-dimensional unsteady motion of a gas initially at rest and the dam-break problem. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 131–138 (1954).

Es wird die instationäre Bewegung einer eindimensionalen adiabatischen Gasströmung untersucht unter der Annahme, daß das Gas im Anfangszustand ruht. Die für die Astrophysik wichtige Expansion einer Gaswolke ins Vakuum ist ein Beispiel für dieses Problem. Für den Fall, daß die Dichteverteilung des Gases zur Zeit $t = 0$ als Funktion einer komplexen Variablen aufgefaßt eine gerade, in der Umgebung der reellen Achse analytische Funktion ist, hat E. T. Copson (dies. Zbl. 50, 191) die Lösung der auftretenden partiellen Differentialgleichung in Form eines komplexen Integrales angegeben. Der Verl. erweitert diese Lösung auf allgemeine analytische Funktionen. Die Ergebnisse werden hauptsächlich für das entsprechende hydraulische Problem der Wasseranalogie (Adiabatenexponent $\kappa = 2$) diskutiert. Es handelt sich dabei um die Strömungsvorgänge, wenn sich hinter einem Damm aufgestaute Wassermassen infolge plötzlichen Dammbruches in ein trockenes, horizontales Strombett ergießen. Eine kritische Lösung mit speziellen Eigenschaften ergibt sich, wenn die vorgegebene Form des Dammes eine Parabel mit vertikaler Achse ist, die das Strombett in ihrem Scheitel berührt.

K. Gersten.

● Templeton, H.: Massbalancing of aircraft control surfaces. London: Chapman & Hall Ltd. 1954. X, 214 p. 39 Fig. sh 35.—

Das Massenausgleichen der Steuerorgane hat sich seit seinen ersten Anfängen vor nunmehr dreißig Jahren zu einem wichtigen Hilfsmittel für die Verhütung des Ruderflatterns bei Flugzeugen entwickelt. Daß dieser Sonderzweig der Flatterberechnung in vorliegender Monographie endlich eine in Buchform zusammengefaßte Darstellung gefunden hat, wird daher sowohl der Studierende als auch der praktisch tätige Entwurfsingenieur dankbar begrüßen. — Im 1. Teil des Buches werden die Grundprinzipien des Massenausgleichs von Rudern entwickelt. Von den drei Typen der in den Flattervorgang eingehenden wesentlichen Kräfte, nämlich den elastischen, den Tragheits- und den aerodynamischen Kräften, werden zunächst nur die beiden ersten in Betracht gezogen, und damit die Problemstellung auf ihren rein schwingungsseitigen Aspekt gebracht. Am Beispiel eines aus ungefeiltem Tragflügel mit hinten angelenktem Ruder bestehenden binären Systems werden die Begriffe „statischer“ und „dynamischer“ Ausgleich, Überausgleich, Unterausgleich, Ausgleichsgrad usw. erläutert, die Schwingungsformen und ihre Freiheitsgrade besprochen, und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen aufgestellt. Im Anschluß an die Besprechung des Einflusses der Tragheitskopplung zwischen Flügel und Ruder auf die gekoppelten Eigenschwingungen wird dann die Wirkung einer zur Rudernasse hinzugefügten Masse behandelt. Nun können auch andere binäre Systeme [z. B. Rumpf und Höhen- (oder Seiten-)flosse einerseits, Höhen- (oder Seiten)ruder andererseits] diskutiert werden. — Nach einer kürzeren Ausführung über Fragen der Terminologie folgt (zunehmend natürlich mit Einbeziehung der Luftkräfte) ein Kapitel über die Anwendung des Massenausgleichprinzips zur Flatterverhütung. Hierzu wird u. a. ein binäres konventionelles Flügel-Rudersystem vollständig auf Flattern durchgerechnet. — Teil 2 enthält zunächst eine eingehende Schilderung der historischen Entwicklung des Prinzips mit bewußter Beschränkung auf die englischen Beiträge und aufgeteilt auf Querruder-, Höhenruder-, Seitenruder- und Hilfsruderflattern. In diesem Kapitel wird z. T. unter Einbeziehung historischer Flatterfälle und deren Diskussion in geschickter Weise das Zusammenspiel von experimenteller und theoretischer Forschung geschildert und der Leser in kompliziertere Fragestellungen (ternäre und höhere Systeme) eingeführt. Für den Praktiker am wichtigsten dürften die folgenden vier Kapitel sein über die Einflüsse verschiedener Parameter (geometrischer, elastischer und aerodynamischer Natur) auf den Massenausgleich, über Entwurfskriterien zum Ausgleich, über das Ausgleichsverfahren in der Praxis, und über verschiedene konstruktiv mögliche Ausführungsformen. Doch möge man dabei nicht übersehen, daß eine Übertragung der hier vorgetragenen Resultate auf moderne, noch unkonventionelle Flugzeugformen und auf Bereiche höherer Geschwindigkeiten nur mit größter Vorsicht — wenn überhaupt — vorgenommen werden darf. — Ein kurz gehaltener 3. Teil stellt zukünftige Forschungsaufgaben, behandelt Begrenzungen des Ausgleichprinzips und schildert Möglichkeiten zu anderen Lösungen zur Verhütung des Ruderflatterns. — Zum Abschluß finden sich einige Anhänge, in denen u. a. das Flattern von Hilfsrudersystemen analytisch behandelt und eine Skizze über die Theorie der ebenen instationären Strömung eines reibungsfreien inkompressiblen Gases gegeben wird.

H. Behrbohm.

Kasparjanc, A. A.: Die Ausbreitung von Schallwellen in einem zähen Gase bei Vorhandensein von Wärmeleitung. Priklad. Mat. Mech. 18, 729–734 (1954) [Russisch].

Le présent travail se rapporte à l'étude de la propagation des ondes soniques dans un gaz visqueux. Quelques propriétés physiques du mouvement permettent à l'A. de simplifier les équations classiques et d'analyser les équations approchées

par des méthodes habituelles. Un exemple est donné se rapportant à un champ indéfini des ondes stationnaires provenant d'un oscillateur harmonique.

C. Woronetz.

Rachmatulin, Ch. A.: Lösung des Problems der Reflexion von Schallwellen von einer rauen Ebene mit einem deformierten Teil. Priklad. Mat. Mech. 18, 573—584 (1954) [Russisch].

The paper deals with the problem of the soundwave reflection by a solid wall, having a deformable infinite sheet, moving with velocity $v_z = f(x, t)$, where at rest is $v_{z0} = 0$. For solving this problem it is obligate to solve two problems: the Cauchy's problem of the uniform motion of the falling wave, and the problem of the wavereflection by the hard plane. The first problem gives the velocity-potential $\varphi = \varphi_0(t)$ on the line $z = a t$, and the second $q_1(z, t) = f_1(z - at) + f_2(z + at)$, where a is the velocity of sound. Thus, the presented problem can be reduced to the plane-waveequation with boundary conditions, $\partial^2 \Phi / \partial t^2 = a^2 \Delta$. The solution $\Phi(x, t, z) = q_1(z, t) + \varphi(z, t, x)$ is searched in the region limiting by the planes $z = at$, $z = 0$. The domain of the integration is the portion of the movable plane restricted by hyperboles. The explanation are extended to the reflection of the soundwaves by a piston installed in the infinite undeformed wall. The law of the piston motion is determined for the wave having the constant intensity in the depth of the front. In this case the problem is governed by the nonhomogeneous differential equation with constant coefficients.

D. Rašković.

Rževkin, S. N.: Die Strahler von Schall mit fortschreitender Welle. Vestnik Moskovsk. Univ. 9, Nr. 8 (Ser. fiz.-nat. esrestv. Nauk Nr. 5), 3—17 (1954) [Russisch].

Das Problem der Schallemission durch Wellen, die sich auf einer Kugeloberfläche fortpflanzen, wurde in unserer Arbeit Vestnik Moskovsk. Univ. 4, Nr. 2 (1949) theoretisch erforscht. In dieser haben wir das Schallfeld in einer nahen und einer entfernten Zone des Strahlers untersucht, einen Ausdruck für den Umovschen Vektor erhalten, sowie Fragen der Analogie des Strahlers mit fortschreitender Welle und des Rotationsstrahlers, der den sogenannten „Rotations-schall“ ergibt, besprochen. — In der vorliegenden Arbeit wird eine vollständige Analyse des Schallfeldes des kugelförmigen Strahlers mit fortschreitender Welle durchgeführt, eine Lösung der Aufgabe für den zylindrischen Strahler angegeben und die vollständige Analogie der Strahler mit fortschreitender Welle und der Rotationsstrahler, die den Rotations-schall infolge periodischer Verdrängung des Mediums durch den rotierenden Körper ergeben, festgestellt [L. Ja. Gutin, Žurn. techn. Fiz. 6, 899 (1936)]. — Es werden die Resultate der experimentellen Untersuchung eines zylindrischen Strahlers mit fortschreitender Welle angeführt. Die Ergebnisse des Experiments erweisen sich als qualitativ übereinstimmend mit der Theorie.

Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Šulejkin, V. V.: Die Entwicklung von Wellen von der Luv- zur Leeküste auf einem tiefen Meer. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 381—384 (1954) [Russisch].

Gheorghita, Șt. I.: Quelques mouvements en milieux poreux non homogènes. Acad. Republ. popul. Romine, Bul. Ști., Sect. Ști. mat. fiz. 6, 823—837 russ. u. französ. Zusammenfassg. 837, 838 (1954) [Rumänisch].

D'après l'équation de Darcy on a $\vec{v} = \text{grad } q$: le milieu poreux D est constitué par la réunion de plusieurs milieux D_α , dont les coefficients de filtration sont k_α . Soit $q = q_\alpha$ dans D_α , $q = q_\beta$ dans D_β . A la surface de séparation entre D_α et D_β on a les conditions

$$(*) \quad \varphi_\alpha / k_\alpha = \varphi_\beta / k_\beta, \quad \partial \varphi_\alpha / \partial n = \partial \varphi_\beta / \partial n$$

dont la première exprime la continuité de la pression et la seconde celle du flux. L'A. considère spécialement un milieu infini D_1 , à coefficient de filtration constant k_1 , continu au milieu D_2 , limité par la surface S , à coefficient de filtration constant k_2 . Considérant le potentiel q_0 de l'écoulement dans $D_1 + D_2$, lorsque $k_1 = k_2$, il cherche à exprimer les potentiels q'_1 et q'_2 dans D_1 et D_2 , pour $k_1 \neq k_2$, par $q'_1 = q_0 + q_1$, $q'_2 = q_0 + q_2$, où q_1 et q_2 sont les potentiels de perturbation dus à la présence du milieu D_2 . L'A. résout effectivement le problème aux limites (*) dans

le cas plan, lorsque D_2 est le cercle $|z| = a$, le potentiel q_0 étant celui qui correspond à l'écoulement uniforme ($q_0 = V_0 x$). Utilisant les coordonnées polaires il trouve $q'_1 = V_0 (r + (k_1 - k_2) (k_1 + k_2)^{-1} a^2 r) \cos \theta$, $q'_2 = 2r V_0 (1 + k_1/k_2)^{-1} \cos \theta$. Ce résultat est généralisé pour le cas où D_2 est l'intérieur d'une ellipse. D'une façon plus générale, l'A. considère des domaines limités par des circonférences de rayons $a_1 = \infty$, $a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1}$, le coefficient de filtration étant constant et égal à k_j dans la couronne de rayons a_j, a_{j+1} . Il examine également le cas où la dernière circonférence limite non pas un milieu poreux mais un milieu imperméable. On envisage de même le cas d'une source placée dans le milieu infini D_1 , en présence du domaine poreux circulaire D_2 , à coefficient de filtration $k_2 + k_1$. L'A. résout le problème aux limites (*) pour l'espace, lorsque D_2 est une sphère à coefficient de filtration $k_2 + k_1$. Il y arrive en utilisant la transformation de Kelvin. *C. Jacob.*

Yalin, Selim: Über die Sickerströmung in einem stetig heterogenen Raum. Bull. techn. Univ. Istanbul 7, 59—78 (1954).

Das Problem der Bestimmung der Sickerströmung im Untergrund eines Wehres führt unter der Annahme, daß die Durchlässigkeit des Untergrundes mit der Tiefe linear abnimmt, auf die lineare partielle Differentialgleichung vom elliptischen Typus

$$\mathcal{E}^2 H / \mathcal{E} x^2 + \mathcal{E}^2 H / \mathcal{E} y^2 + (1/y) \mathcal{E} H / \mathcal{E} y = 0.$$

Es wird eine Lösung dieser Differentialgleichung für zwei aneinanderstoßende rechteckige Gebiete gesucht, welche auf dem Außenrand des Gesamtgebietes den bekannten Randbedingungen genügt und außerdem auf der die beiden Rechtecke trennenden Geraden stetig ist und eine stetige erste Ableitung in bezug auf x besitzt. Verf. löst diese Randwertaufgabe, indem er die Bernoullische Methode der Partikularlösungen benützt. Aus der sich so ergebenden Darstellung der Lösung durch eine „Fouriersche Reihe“ folgt unter Benützung der Randbedingungen ein System mit unendlich vielen linearen Gleichungen, das zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten dient. In einem Anhang werden einige numerische Ergebnisse mitgeteilt, zum Teil auch durch Kurven veranschaulicht. *W. Quade.*

Kartvelišvili, N. A.: Die Stabilität im Großen der stationären Zustände in Wasserkraftwerken mit Ausgleichsbecken. Inženernyj Sbornik 20, 25—30 (1954) [Russisch].

Verf. leitet eine hinreichende Bedingung für die Stabilität der durch äußere Störungen bedingten Flüssigkeitsschwankungen in einer Turbinenanlage mit Ausgleichsbecken her. Diese Störungen lassen sich durch zwei nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung beschreiben, wobei die Veränderlichen die relative Höhe und die relative Durchflußmenge im Ausgleichsbecken beschreiben. Diese Gleichungen werden zunächst linearisiert und deren Stabilitätsverhalten untersucht. Auf Grund der Stabilitätsdiskussion des linearisierten Systems wird eine Ljapunovsche Funktion konstruiert, so daß man jetzt mit der zweiten Methode von Ljapunov das Ausgangssystem behandeln kann. Die Grenzen des Stabilitätsgebiets werden diskutiert. *W. Haacke.*

Michajlov, G. K.: Eine Vereinfachung des Verfahrens der Berechnung der Filtration im homogen-anisotropen Grund. Inženernyj Sbornik 19, 159—160 (1954) [Russisch].

Danilov, V. L.: Die Ergiebigkeit von Erdöl-Bohrlöchern bei willkürlicher Form der Speisungs-Kontur. Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR. Ser. fiz.-mat. tech. Nauk 5, 52—69 (1954) [Russisch].

In der Arbeit wird die Äquivalenz der Aufgabe über die Bestimmung der Ergiebigkeit eines einzelnen Bohrlochs in einer Schicht von beliebiger Form und der Aufgabe über die Ermittlung des Parameters des zweifachen Zusammenhangs in der Theorie der konformen Abbildungen festgestellt. Die verallgemeinerte Formel von Dupuits wird erhalten. Die Aufgabe wird auf die

Lösung einer nichtlinearen singulären Integralgleichung reduziert. Die Folgerungen sind auf den Fall von mehrfachen Bohrlochsystemen ausgedehnt.

Übersetzung der Zusammenfassg. des Autors.

Chovanskij, A. N.: Zur Berechnung der Wiederherstellung des Drucks am Stoß des Bohrlochs nach dessen Abdichtung. *Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.-mat. tech. Nauk* **5**, 70—76 (1954) [Russisch].

In der Arbeit werden asymptotische Näherungsausdrücke für einige Wurzelfunktionen von Besselschen und Neumannschen Funktionen erhalten. Diese Ausdrücke werden auf die Vereinfachung der Berechnung der Wiederherstellung des Drucks am Stoß des Bohrlochs nach dessen Abdichtung angewandt.

Übersetzung des Zusammenfassg. des Autors.

Ivanov, N. F., G. S. Salechov und I. V. Svirskij: Über die Bestimmung der optimalen Bedingungen für die Ausbeutung von Erdöl-Bohrlöchern in Schichten mit elastischem Zustand. *Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.-mat. techn. Nauk* **5**, 40—51 (1954) [Russisch].

Salechov, G. S.: Direkte und inverse Aufgaben über das Fortschreiten des Wasser-Erdölkontaktes. *Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.-mat. tech. Nauk* **5**, 3—15 (1954) [Russisch].

Salechov, G. S., V. L. Danilov, N. F. Ivanov und A. N. Chovanskij: Zur Frage über die Bewässerung von Erdöl-Bohrlöchern in Schichten mit Sohlenwasser. *Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.-mat. tech. Nauk* **5**, 16—39 (1954) [Russisch].

Wärmelehre:

Buchdahl, H. A.: Integrability conditions and Carathéodory's theorem. *Amer. J. Phys.* **22**, 182—183 (1954).

Verf. hat früher das physikalische „Prinzip von Carathéodory“ von dem mathematischen „Satz von Carathéodory“ unterschieden (dies. Zbl. **35**, 261). Der „Satz“ besagt: Eine lineare totale Differentialgleichung in $n \geq 3$ Veränderlichen ist genau dann integrierbar, wenn es in der Umgebung eines jeden Punktes Nachbarpunkte gibt, die sich nicht längs Integralkurven erreichen lassen. — Hier zeigt Verf., daß die gewöhnlichen Integrabilitätsbedingungen (die sich im E_3 als Verschwinden der Rotation des zu integrierenden Vektorfeldes darstellen) notwendig und hinreichend für die Unerreichbarkeit nach Carathéodory sind.

U. T. Bödewadt.

Green, Robert B.: A new examination of the laws of thermodynamics. *Amer. J. Phys.* **22**, 191—193 (1954).

Wie Verf. bemerkt, haben die üblichen Fassungen des ersten Hauptsatzes immer eine quantitative Feststellung zum Inhalt, während der zweite Hauptsatz nur eine qualitative Aussage gibt, aus der die zugehörigen quantitativen Behauptungen abgeleitet werden können. Es gelingt ihm, auch für den ersten Hauptsatz eine quantitätsfreie Formulierung aufzustellen: „Jedes System, das einen Kreislauf durchmacht und dabei Wärme oder Arbeit mit der Umgebung austauscht, muß immer beides austauschen.“ Daraus läßt sich schließen, daß die ausgetauschten Mengen in einem universellen festen Verhältnis stehen müssen. — Auch beim Aufbau der Wärmelehre nach Carathéodory, wo man von den Zustandsänderungen eines adiabatisch abgeschlossenen Systems ausgeht, kann man eine quantitätsfreie Form des Hauptsatzes zugrunde legen, wie Verf. ausführt.

U. T. Bödewadt.

Malić, D.: Can classic formulations of the second law of thermodynamics be universally applied? (Abstract.) *Conseil Acad. RPF Yougoslavie, Bull. sci.* **2**, 17—18 (1954).

Landsberg, P. T.: On most probable distributions. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 149—154 (1954).

Verf. untersucht die Frage, wie weit man sich auf diejenige statistische Methode verlassen kann, in der die wahrscheinlichste Konfiguration berechnet wird als Ersatz für die mittleren Besetzungszahlen in der entsprechenden Gibbsschen

Gesamtheit. Er zeigt, daß die (problematische) Benutzung der Stirlingschen Näherungsformel für kleine n umgangen werden kann. Eine bedeutende Verbesserung der Genauigkeit erhält man bei Verwendung der Näherung $(x!) \approx \log(x + \frac{1}{2})$. Ferner wird die Berechtigung für die Ersetzung ganzer Zahlen durch kontinuierliche Variable diskutiert.

G. Süßmann.

Landsberg, P. T.: On Bose-Einstein condensation. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 65—76 (1954).

Es wird gezeigt, daß eine Reihe von strittigen Fragen, welche die Anwendung der Stirlingschen Formel bzw. der Sattelpunktmethode bei der Behandlung eines idealen Bosegases im Gebiet der Einstein-Kondensation mittels mikrokanonischer bzw. kanonischer Gesamtheiten mit sich bringen, entfallen, wenn man mit großen kanonischen Gesamtheiten arbeitet. Dies ist deswegen schon zweckmäßig, weil man sich für Normaleigenschaften interessiert: $q = \lim_{N \rightarrow \infty} (\Phi_N/N)$ (N = mittlere Teilchenzahl,

q eine Intensitätsgröße, Φ_N zu q gehörige aus der statistischen Mechanik gewonnene Quantitätsgröße für N Teilchen). Eine brauchbare Definition für die Temperatur T_c des Beginns der Einstein-Kondensation ist: $\lim_{N \rightarrow \infty} (n_1/N) = 0$ für $T > T_c$, > 0 für

$T < T_c$ (n_1 = mittlere Besetzungszahl des tiefsten Quantenzustandes). Da wegen der endlich bleibenden Dichte stets $V \rightarrow \infty$, wenn $N \rightarrow \infty$, kann man für das ideale Bosegas (kein Wechselwirkungspotential zwischen den Molekülen) mit den asymptotischen Formeln für die Eigenwerte und ihrem Entartungsgrad rechnen, außer beim tiefsten Quantenzustand. Damit läßt sich sehr übersichtlich das von de Groot und Mitarbeitern (dies. Zbl. 39, 217) schon früher untersuchte ideale Bosegas in einem n -dimensionalen Würfel behandeln.

G. U. Schubert.

Landsberg, Peter T.: The continuous spectrum approximation in quantum statistics. Phys. Review, II. Ser. 94, 469—471 (1954).

Es wird gezeigt, daß man bei einem thermodynamischen System von Bose- oder Fermi-Teilchen ohne Wechselwirkung, mit teilweise kontinuierlichem Spektrum rechnen darf und zwar sowohl bei Benutzung von kanonischen als von großen kanonischen Gesamtheiten, weil man sich nur für Normaleigenschaften interessiert (vgl. vorstehend. Referat).

G. U. Schubert.

Ansbacher, F. and P. T. Landsberg: Quantum statistics of closed and open systems. Phys. Review, II. Ser. 96, 1707—1708 (1954).

Einige Beweise, die den Übergang von kanonischen quantenstatistischen Gesamtheiten zu großen kanonischen rechtfertigen, werden verschärft (vgl. auch die beiden vorstehenden Referate).

G. U. Schubert.

Ono, Syu: The quantum-statistical theory of transport phenomena. III. Coarse-grained phase-space distribution functions. Progress theor. Phys. 12, 113—128 (1954).

(Teil II. H. Mori, dies. Zbl. 51, 429.) Verf. befaßt sich wie schon in I (dies. Zbl. 48, 434) mit der Herleitung der Uehling-Uhlenbeck-Gleichung (dies. Zbl. 6, 334) aus den Grundlagen der statistischen Mechanik. Er teilt den Raum in Zellen ein, die groß gegen die Reichweite der zwischenmolekularen Kräfte sind, und benutzt eine Verallgemeinerung der Wignerschen Verteilungsfunktion, bei der an die Stelle der ebenen Wellen Funktionen treten, die innerhalb einer Zelle gleich einer ebenen Welle sind und außerhalb verschwinden. Die Überlegungen gelten nicht für ein entartetes Bosegas, weil auch die mittlere de Broglie-Wellenlänge der Teilchen klein gegen die Dimensionen der Zelle sein muß.

G. Höhler.

Samojlovič, A. G.: Statistik der Elektronen in Halbleitern und kanonische Verteilung mit variabler Teilchenzahl. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 174—177, russ. Zusammenfassg. 177 (1954) [Ukrainisch].

Es wird die kanonische Verteilung mit variabler Teilchenzahl zur Ableitung der Gleichung angewandt, die das chemische Potential im Bemmungs-Halbleiter bestimmt. Es wird gezeigt,

daß die zur Berechnung des chemischen Potentials gewöhnlich angewandten Formeln die Einführung einer Korrektur erfordern, was die Bedingung für das Eintreten der Ausartung des Elektronengases verändert. Die Bedingungen für das Eintreten der Ausartung in Beimengungshalbleitern werden bestimmt. Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Jauho, Pekka: A central theorem of statistical mechanics. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 172, 11 p. (1954).

Verf. stellt den Zusammenhang zwischen der thermodynamischen Definition der Entropie $T dS = dQ_{\text{rev}}$ und der Boltzmannschen $S = k \log W$ dadurch her, daß er für nur endlich viele Energieniveaus die Besetzungszahlen als innere Parameter auffaßt und das Minimum der freien Energie aufsucht. Damit die inneren Parameter voneinander unabhängig sind, muß eine gewisse Determinante von Null verschieden sein. Schwierigkeiten, die der Verf. bei einem Beispiel zu sehen glaubt, verschwinden sofort, wenn man mittels eines Grenzprozesses Normal-Eigenschaften definiert. Übrigens wird auf den wichtigeren Fall, daß die Menge der Energieeigenwerte nicht endlich ist, nicht eingegangen. G. U. Schubert.

Jauho, Pekka: A remark on the definition of entropy in Bose-Einstein and Fermi-Dirac statistics. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 180, 6 p. (1954).

Die Methode der vorangegangenen Arbeit (s. vorstehend. Referat) wird auf Systeme, welche der Bose-Einstein- bzw. Fermi-Dirac-Statistik gehorchen, erweitert. G. U. Schubert.

Ichimura, Hiroshi: A method in quantum statistical mechanics. I. Progress theor. Phys. 11, 374—384 (1954).

Es wird eine Reihenentwicklung für die großkanonische Zustandssumme eines Systems wechselwirkender Fermi- oder Boseteilchen angegeben. Dabei wird der feldtheoretische Formalismus in der Besetzungszahl-Darstellung als wesentliches mathematisches Hilfsmittel benutzt, und es wird von der Feynmanschen Methode der Umordnung einer Exponentialfunktion von Operatoren entscheidend Gebrauch gemacht. Die erhaltene Formel eignet sich zur Berechnung von Quanteneffekten in der Thermodynamik realer Gase und Flüssigkeiten. G. Süßmann.

Ichimura, Hiroshi: A method in quantum statistical mechanics. II. The degenerate Fermi-Dirac assembly. Progress theor. Phys. 11, 385—391 (1954).

Verf. wendet die von ihm in Teil I (vgl. vorstehend. Referat) angegebene statistische Methode auf das Problem eines realen, hochentarteten Fermigas an. Als Wechselwirkungsansatz wird ein für große r exponentiell abgeschnittenes Coulomb-potential benutzt. Es zeigt sich, daß die lineare Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme durch diese Wechselwirkung nicht wesentlich gestört wird. G. Süßmann.

Ichimura, Hiroshi: A method in quantum statistical mechanics. III. Virial expansion for the quantum gas. Progress theor. Phys. 11, 519—527 (1954).

Mit Hilfe der vom Verf. in Teil I (vgl. vorstehende Referate) aufgestellten Reihenentwicklung für große Zustandssummen wird der zweite Virialkoeffizient eines schwach entarteten Gases berechnet. Für die als klein vorausgesetzte Wechselwirkung wird die Differenz zweier Yukawa-Potentiale benutzt (modifiziertes Morse-Potential). Das angegebene Resultat sollte im Limes kleiner Temperaturen gültig sein; doch scheint ein Vergleich mit der Erfahrung wegen des Charakters des benutzten Potentials auf Schwierigkeiten zu stoßen. G. Süßmann.

Chester, G. V.: The quantum-mechanical partition function. Phys. Review, II. Ser. 93, 606—611 (1954).

In der bekannten Form der Zustandssumme (Slater)

$$Z = \text{Spur} [\exp(-\beta H)]; \quad \beta = (kT)^{-1}, H = \text{Hamiltonoperator};$$

wird vorausgesetzt, daß sich $H = H_0 + \lambda V$ schreiben läßt (H_0 = Hamiltonoperator für freie Teilchen, V = Wechselwirkungspotential, λ = ein Parameter). Man entwickelt die Zustandssumme nach Potenzen von λ . Zur Bildung der Spur

werden die zu H_0 gehörigen Eigenfunktionen verwendet, deren Eigenwerte bekannt sind. Der zu λ^n gehörige Anteil der Zustandssumme läßt sich als Mehrfachsumme angeben. Wesentlich ist dabei das Auftreten von Produkten von n Matrixelementen des Potentials V . Zunächst zeigt Verf., daß seine Form der Zustandssumme identisch ist mit einer von Goldberger und Adams angegebenen [J. Chem. Phys. **20**, 240 (1952)]. Von größter Bedeutung ist aber die Untersuchung des Verf. für den Fall, daß V Singularitäten besitzt. Er kann die Zustandssumme so modifizieren, daß auch für derartige Fälle brauchbare Reihen auftreten. So kann man z. B. für den Fall des Modells von harten elastischen Kugeln die zugehörigen Eigenfunktionen benutzen. Diese haben den Vorteil, daß die auf den Kugeloberflächen (unendlich steiler Potentialanstieg) verschwinden und sonst die kinetische Energie der freien Teilchen liefern. Jedoch sind hier die statistischen Gewichte andere als beim üblichen freien Teilchenmodell. Verf. gibt am Schluß der Arbeit eine Diskussion der Konvergenzverhältnisse.

G. U. Schubert.

Chester, G. V.: The theory of liquid helium. Phys. Review, II. Ser. **94**, 246—252 (1954).

In einer früheren Arbeit (vgl. vorstehend. Referat) hat Verf. die Slatersche Zustandssumme nach Potenzen eines Parameters entwickelt. Hier wird dies Verfahren auf die Theorie des Helium II angewendet. Dabei muß aber Verf. gegenüber seiner früheren Arbeit weitere Vereinfachungen vornehmen. Um endliche Matrixelemente des Wechselwirkungspotentials zwischen den Heliumatomen, das in der Form $g[(\sigma r)^{12} - (\sigma r)^6]$ (g = Parameter, nach dem die Zustandssumme entwickelt wird, σ = Reichweite) angenommen wird, zu erhalten, wenn die Eigenfunktionen des freien Teilchenmodells benutzt werden sollen, integriert Verf. von einem Radius r_0 an. Als statistische Gewichte werden aber diejenigen des freien Teilchenmodells benutzt. Daher ergibt sich derjenige Teil der Zustandssumme, welcher zur Potenz g^0 gehört in Übereinstimmung mit der Londonschen Theorie. Man erhält also auch dasselbe T_λ . Das Glied mit g^1 ist im wesentlichen der Mittelwert der Matrixelemente des Wechselwirkungspotentials gebildet mit den statistischen Gewichten und den Boltzmannfaktoren der nullten Näherung. Auch hier müssen weitere Vereinfachungen vorgenommen werden, damit die auftretenden Integrale wenigstens numerisch ausgewertet werden können. Das Glied mit g^1 sorgt aber jetzt dafür, daß der Phasenübergang von 2. Ordnung wird. London mußte dies seinerzeit durch eine willkürlich anmutende Veränderung der Verteilung der Eigenwerte erzwingen. Trotz des Fortschritts hierin, kann die vorliegende Theorie nicht als endgültig betrachtet werden, da sich bei tiefen Temperaturen Schwierigkeiten mit dem Vorzeichen der spezifischen Wärme ergeben, die nur wieder durch neue Zusatzhypothesen behoben werden können.

G. U. Schubert.

Fujita, Shigeichi: Quasistationary process. I. On entropy production. Kumamoto J. Sci., Ser. A **2**, Nr. 1, 51—63 (1954).

Das Prigoginesche Prinzip der minimalen Entropieerzeugung im stationären Zustand wird diskutiert und es wird darauf hingewiesen, daß die Bedingungen für dieses Prinzip nicht immer realisierbar sind. Im übrigen werden Beispiele gegeben, in denen das Prinzip, aus im übrigen bekannten Gründen, nicht gilt. J. Meixner.

Groot, S. R. de and P. Mazur: Extension of Onsager's theory of reciprocal relations. I. Phys. Review, II. Ser. **94**, 218—224 (1954).

Mazur, P. and S. R. de Groot: Extension of Onsager's theory of reciprocal relations. II. Phys. Review, II. Ser. **94**, 224—226 (1954).

Der Beweis der Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen wird in solche Gestalt gebracht, daß er auch für vektorielle und tensorielle Phänomene (Transporterscheinungen) unmittelbar verwendet werden kann. Der wesentliche Punkt ist eine geeignete neue Darstellung der Entropieerzeugung. Die Methode wird im ersten Teil auf Wärmeleitung, Diffusion und Viskosität in anisotropen Körpern angewandt,

während im zweiten Teil die Elektrizitätsleitung in anisotropen Kristallen behandelt wird. *J. Meixner.*

Fano, U.: Note on the quantum theory of irreversible processes. Phys. Review, II. Ser. 96, 869—873 (1954).

Versuche, die Theorie der irreversiblen Prozesse auf quantenmechanischer Basis zu begründen, werden diskutiert. Es wird gezeigt, daß in die angewandte Störungstheorie eine wichtige Voraussetzung eingeht: die von außen auf das System einwirkende Störung muß ständig so schnell durch Dissipation abgebaut werden, daß sich ihre Wirkung nicht in einem Punkt oder in einer kleinen Zahl von Freiheitsgraden anhäuft. Diese Hypothese wird mathematisch mit Hilfe der Relaxationszeit von quantenmechanischen Korrelationsfunktionen oder in gleichwertigen Eigenschaften der Matrizen der Wechselwirkungsoperatoren im Energieschema formuliert. *J. Meixner.*

Mickevič, N. N.: Einige Fragen aus der Theorie der Wärmeleitung anisotroper fester Körper. Žurn. eksper. teor. Fiz. 26, 557—561 (1954) [Russisch].

Es war schon vor einem Jahrhundert von Duhamel und Stokes angegeben worden, wie sich die Gleichungen der Wärmeleitung im homogenen anisotropen Körper, nämlich $\partial u / \partial t = \sum a_{ij} \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j + Q(x_1, x_2, x_3, t)$ mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen, durch Transformation auf die Hauptachsen des Tensors a_{ij} und passende Maßstabsänderungen auf dieselbe Form wie bei isotropen Körpern bringen lassen. Hier zeigt Verf., welche Gestalt die üblichen Lösungen ohne diese Transformation, also in den ursprünglichen Koordinaten, für anisotrope Körper haben. So sind die partikulären Lösungen im Quader bei verschwindenden Randwerten

$$u = \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2 \sin n_3 x_3 \cdot \exp \left(- \sum a_{ij} n_i n_j t \right).$$

Für den unendlichen Raum heißt die Elementarlösung

$$u = (\pi^3/a \, t^3)^{1/2} \exp \left(- \sum b_{ik} x_i x_k / 4 t \right),$$

worin a die Determinante von a_{ik} und b_{ik} der zu a_{ik} inverse Tensor ist. Daraus werden die entsprechenden Integrale für eine gegebene Quellenverteilung hergeleitet, und für begrenzte Räume wird die Lösung durch eine Greensche Funktion angegeben.

U. T. Bödewadt.

Dobryšman, E. M.: Über einen Sonderfall des Problems der Wärmeleitung für zwei Medien. Priklad. Mat. Mech. 18, 219—224 (1954) [Russisch].

Die Anregung zur Aufgabe: zwei Halbräume, eindimensional aufgefaßt — entstammt der Meteorologie: Erdboden, darüber ruhende Luft. An der Trennungsebene $x = 0$ eine etwas seltenere Bedingung (dritter Art, inhomogen): Temperaturgleichheit, ferner eine mit der Zeit t veränderliche Wärmequelle (Sonneneinstrahlung), die nicht nur die beiden Wärmeleitungsströme speist, sondern auch einen der Temperaturproportionalen Wärmeverlust deckt (langwellige Ausstrahlung). Anfangswerte: Überall $T = 0$. Die Temperaturleitzahl k wird als Ortsfunktion angenommen. Übergang zu neuen Veränderlichen $s = 2t^{1/2}$; $z = (1/s) \int dx k$ bringt die Wärmeleitungsgleichung $\partial T / \partial t = (\partial / \partial x) (k \partial T / \partial x)$ nach Multiplikation mit $k s^2$ auf die Gestalt $2k(s \partial T / \partial s - z \partial T / \partial z) = \partial^2 T / \partial z^2$. Hier wird k als Ortsfunktion nach Potenzen von (sz) entwickelt, und für die Temperatur T sowie die Einstrahlung werden Reihen nach s angesetzt. Nach Einführung dimensionsloser Veränderlicher τ, ζ an Stelle von s, z bestimmen sich die Beiwerte $T_n(\zeta)$ von $T = \sum T_n \tau^n$ rekursiv aus Differentialgleichungen $T_n'' + 2\zeta T_n' - 2n T_n = f_n(\zeta, T_0, \dots, T_{n-1})$. Verf. stellt fest, daß sich die Lösungen mittels der Fehlerfunktion ausdrücken lassen, und berechnet T_0 bis T_3 . Erläuterung am Beispiel eines linear mit der Höhe x veränderlichen k .

U. T. Bödewadt.

Avramescu, Aurel: Contributions au calcul du refroidissement des blocs en béton. Acad. Republ. popul. Romine, Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz. 6, 407—421, russ. u. französ. Zusammenfassg. 421—422, 422 (1954) [Rumänisch].

La théorie analytique de la chaleur permet de calculer les variations de la température en fonction du temps et de l'espace. On remarque que les variations adiabatiques de la chaleur d'hydratation peuvent être remplacées par une exponentielle et l'on déduit les expressions analytiques de la température relative pour un corps plan en contact avec la roche ou avec l'atmosphère. On indique les solutions pour des sections rectangulaires. Toutes les équations sont, au préalable, ramenées à la forme adimensionnelle et, en appliquant la théorie de la similitude, les paramètres sont concentrés en des critères. On déduit les solutions à l'aide de la transformation de Laplace. Certaines intégrales implicites sont calculées d'une manière graphique, à partir des équations différentielles, en appliquant la méthode des isoclines.

Franz. Zusammenfassg.

Šaichin, A.: Répartition des températures dans les plaques de béton épaisses, après la coulée. Acad. Republ. popul. Romine, Bul. ști. Sect. Ști. mat. fiz. 6, 423—434, russ. u. frantzös. Zusammenfassg. 434, 434—435 (1954) [Rumänisch].

Dans cet article, on résout le problème de la répartition des températures dans l'épaisseur d'une plaque de béton de surface infinie et des variations de la température, lorsque sont données toutes les constantes physiques nécessaires, ainsi que la température $U = F(t)$ que le béton, mis en des conditions adiabatiques, attendrait, grâce à la chaleur de prise. On suppose que la plaque est posée sur le sol, ayant l'air au-dessus d'elle.

Französ. Zusammenfassung.

Elektrodynamik. Optik:

Belatini, Paul de: Elektromagnetische Grundgrößen. Bull. techn. Univ. Istanbul 6, 11—28 (1954).

Durch Einführung von gewissen neuen elektrischen und dielektrischen Größen und Gesetzen wird gezeigt, daß die elektrische Ladung als Urbegriff des Elektromagnetismus nicht ausreicht, da sie eine noch nicht identifizierte duale Größe besitzt. Der Verf. schlägt daher die Energie an ihrer Stelle vor und erreicht damit eine symmetrischere Form, welche die richtige Paarung der vier elektromagnetischen Feldvektoren liefert. Außerdem schlägt der Verf. statt der Dualität von Magnetismus und Elektrizität eine Triplizität von Magnetismus, Elektrizität und Dielektrizität vor.

P. Urban.

Gürsey, Feza: Dual invariance of Maxwell's tensor. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 19, 154—160 (1954).

Als „duale Rotation“ bezeichnet der Verf. eine Transformation der Form $\tilde{f}_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \cdot \cos \vartheta - \tilde{f}_{\mu\nu} \cdot \sin \vartheta$, wo $\tilde{f}_{\mu\nu}$ das zu dem schiefsymmetrischen Tensor $f_{\mu\nu}$ duale Feld und ϑ eine reelle Zahl ist. Unter Benutzung der Quaternionendarstellung zeigt er dann, daß der Maxwell'sche Energie-Impulstensor im Vakuum invariant gegen solche Transformationen ist. Schließlich stellt er einen allgemeineren „dual-invarianten“ Tensor auf, der den Maxwell'schen Tensor als Spezialfall enthält.

F. Penzlin.

Lipmanov, É. M.: Eine relativistisch invariante Form der Elektrodynamik ohne longitudinale und skalare Felder. Žurn. eksper. teor. Fiz. 27, 135—141 (1954) [Russisch].

In dieser 1953 ausgeführten Arbeit zerlegt der Verf. die elektromagnetischen Potentiale $A_\mu(x)$ in der folgenden Weise: $A_\mu(x) = a_\mu(x) + n_\mu q(x)$, $\partial a_\mu(x)/\partial x_\mu = 0$, $n_\mu a_\mu(x) = 0$. Hier ist n_μ ein zeitartiger Einheitsvektor. Hiernach werden sowohl klassische als auch quantentheoretische Rechnungen mit einem „verallgemeinerten Coulombfeld“ und einem „verallgemeinerten transversalen Feld“ in formal kovarianter Weise durchgeführt. Wenn man speziell $n_\mu = (0; 0; 0; 1)$ setzt, erhält man genau die wohlbekannte, sogenannte „Coulombsche Eichung“ des elektromagnetischen Feldes.

G. Källén.

Mariot, Louis: Le champ électromagnétique singulier. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1189—1190 (1954).

Scopo della Nota è di completare una Nota precedente (questo Zbl. 56, 216) e cioè di dimostrare una proprietà di permanenza dei campi elettromagnetici che l'A. chiama singolari. Precisamente se il campo è singolare su di una ipersuperficie S orientata nello spazio, allora il campo resta singolare all'esterno di S . In tal modo

resta dimostrata, sulla base delle sole equazioni di Maxwell, la possibilità dell'esistenza di un fluido di fotoni, le cui traiettorie sono le geodetiche isotrope dello spazio-tempo, soddisfacente al „determinismo relativistico“. *G. Lampariello.*

Graffi, Dario: Su una legge di minimo della magnetostatica. *Ann. Univ. Ferrara*, n. Ser., Sez. VII 3, 25—29 (1954).

Considerato un campo elettromagnetico stazionario, siano le funzioni scalari $p(\mathfrak{H})$, $q(\mathfrak{H})$ tali che, essendo \mathfrak{B} funzione di \mathfrak{H} , sia $dp = \mathfrak{H} d\mathfrak{B}$, $p(0) = 0$, $q(\mathfrak{H}) = \mathfrak{B} \mathfrak{H} - p(\mathfrak{H})$. L'integrale di q esteso all'intero spazio $U = \int_{\tau_0}^{\tau_{\infty}} q(\mathfrak{H}) d\tau$ è minimo.

Scopo della Nota è la dimostrazione di codesto teorema enunciato con tutte le necessarie condizioni. *G. Lampariello.*

• **Snow, Chester:** Formulas for computing capacitance and inductance. (National Bureau of Standards Circular 544.) Washington: The Government Printing Office 1954. 37 figs., 69 p. 40 cents.

Es werden explizite Formeln für Kapazitäten, Koeffizienten der Selbstinduktion und der gegenseitigen Induktion, den Skineffekt und ähnliche elektromagnetische Konstanten angegeben, und zwar für eine große Zahl verschiedener geometrischer Konfigurationen. *G. Süßmann.*

Tsang, N. F.: On electrical network determinants. *J. Math. Physics* 33, 185—193 (1954).

In einem zusammenhängenden Netzwerk mit k nicht miteinander gekoppelten Zweigen, l linear unabhängigen Stromkreisen und n Knotenpunkten (also $k = l + n - 1$) seien Z_1, \dots, Z_k die Zweigimpedanzen, und Y_1, \dots, Y_k seien ihre reziproken Werte (Admittanzen). Durch Elimination gewinnt man einerseits l linear unabhängige Stromkreisgleichungen, deren Koeffizienten Linearkombinationen der Z sind; ihre Determinante sei J . Andererseits gewinnt man $n - 1$ linear unabhängige Knotenpunktgleichungen, deren Koeffizienten Linearkombinationen der Y sind; ihre Determinante sei J' . Beide Determinanten sind von der Auswahl der linear unabhängigen Gleichungen unabhängig. Die Impedanz des Netzwerks, gemessen an der bei Auftrennen des Zweiges α entstehenden Trennstelle, sei Z'_α . Die Admittanz des (nicht aufgetrennten) Netzwerks, gemessen zwischen den Endpunkten des

Zweiges α , sei Y'_α . Dann beweist Verf. die Relationen $\sum_1^k \frac{Z_\alpha}{Z'_\alpha} = l$, $\sum_1^k \frac{Y_\alpha}{Y'_\alpha} = n - 1$ sowie mittels einer Nullstellenbetrachtung (*) $1 - Z_1 Z_2 \cdots Z_k J'$ oder $J' - Y_1 Y_2 \cdots Y_k J$. Die Relation (*) gilt im allgemeinen nicht mehr bei wechselseitiger Kopplung irgendwelcher Zweige. Jedoch behauptet Verf., daß (*) bestehen bleibt, wenn nur eine „einseitige Transimmittanz“ vorliegt (z. B. ein Strom in Zweig α ruft eine Spannung in Zweig β hervor, aber nicht umgekehrt) oder wenn ein System mehrerer solcher Transimmittanzen vorliegt, das jedoch keine „Schleifen“ (z. B. α wirkt auf β , β auf γ , und γ wieder auf α) enthält. Diese Behauptung wird nicht bewiesen, sondern nur durch einige Beispiele belegt. *A. Stöhr.*

Sestakov, V. I.: Eine algebraische Methode zur Synthese von Mehrtakt-Relais-systemen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 99, 987—990 (1954) [Russisch].

Eine Schaltung (beispielsweise eine digitale Rechenmaschine) enthalte einige Relais, die je zweier stabiler Zustände (in Ruhe bzw. erregt) fähig sind. Die Zustände mögen von $m + n$ Parametern abhängen, die je der beiden Werte 0 und 1 fähig sind; dabei sollen x_1, \dots, x_m unabhängige, der Schaltung von außen aufgeprägte Parameter sein, während y_1, \dots, y_n selbst innere Zustände der Schaltung beschreiben. Zu Vektoren zusammengefaßt, werden die Parameter mit \mathbf{x} und \mathbf{y} bezeichnet. (An Stelle der Vektoren kann man auch ganze Zahlen als Variable benutzen, indem man z. B. dem Vektor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ die Zahl $\sum a_i 2^{i-1}$ zuordnet). Alle Relais

mögen die gleiche Ansprechzeit aufweisen, die o. B. d. A. gleich 1 sei; dann besteht also eine Gleichung $\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$, wobei die Funktion \mathbf{f} aus der Schaltung bestimmt ist. [Wenn auf der rechten Seite $\mathbf{x}(t)$ nicht vorkommt, heißt die Schaltung autonom; wenn $\mathbf{y}(t)$ nicht vorkommt, heißt sie völlig nichtautonom oder eintaktig.] Mit Hilfe dieser Gleichung kann man bei gegebenen $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots$ sowie gegebenen Anfangszustand $\mathbf{y}(0)$ die $\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots$ sukzessiv berechnen. Dieser „Analyse“ der Schaltung steht die umgekehrte Aufgabe der „Synthese“ gegenüber, aus Folgen $\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots$ (die gewissen naheliegenden Bedingungen genügen müssen) die Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zurückzugewinnen. Hierfür gibt Verf. eine Formel an.

A. Stöhr.

Bastin, H., P. Hontoy et P. Janssens: Sur l'application des méthodes topologiques de Poincaré au circuit non linéaire de Frühauf. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 1199—1208 (1954).

Das Verhalten der Schaltung von Frühauf (einer schwingfähigen Schaltung, die aus zwei Trioden, zwei Widerständen und einem Kondensator symmetrisch aufgebaut ist) wird mit Hilfe der zugehörigen Differentialgleichungen untersucht. Für den Fall, daß die Röhren Wolframkathoden besitzen, wird die Röhrencharakteristik (die dann eine Sättigung aufweist) für die Rechnung durch eine Arcustangenskurve ersetzt. Die Differentialgleichungen lassen sich dann auf die Gestalt

$$-du/(u-v) [(D+1) \sin^2 v + a] \sin^2 u = dv/(u-v) [(D+1) \sin^2 u + a] \sin^2 v \\ = d\tau / [(D^2 - 1) \sin^2 u \sin^2 v + a D (\sin^2 u + \sin^2 v) + a^2]$$

transformieren. Die Lösung $u(\tau), v(\tau)$ wird in der (u, v) -Ebene verfolgt. Sie verläuft von ihrem Anfangspunkt aus im allgemeinen bis zu einem Punkt derjenigen Kurve T_0 , die durch Nullsetzen des Nenners von $d\tau$ entsteht, springt dann in einer angebbaren Weise, wird abermals von der Kurve T_0 angezogen usw.; eine Skizze veranschaulicht den Verlauf. — Besitzen die Röhren dagegen Oxydkathoden (die keine Sättigung zeigen), so wird die Röhrencharakteristik für die Rechnung durch eine Parabel ersetzt. Die Differentialgleichungen lassen sich dann auf die Gestalt

$$-du/(u-v) [1 + (1+D)\sqrt{v}] \sqrt{u} = dv/(u-v) [1 + (1+D)\sqrt{u}] \sqrt{v} \\ = d\tau / [(1+D\sqrt{v})(1+D\sqrt{u}) - \sqrt{uv}]$$

transformieren; der Verlauf der Lösungen wird in entsprechender Weise diskutiert. — Die gefundenen Ergebnisse wurden auch experimentell durch Oszillogramme der Kipperschwingungen bestätigt.

A. Stöhr.

Reza, F. M.: Conversion of a Brune cycle with an ideal transformer into a cycle without an ideal transformer. J. Math. Physics 33, 194—198 (1954).

O. Brune (dies. Zbl. 3, 85) hat ein Verfahren angegeben, eine positive Funktion durch ein Zweipol-Netzwerk zu realisieren, das jedoch im allgemeinen ideale Transformatoren enthält. Wie man bereits wußte, ist es möglich, auch ohne ideale Transformatoren auszukommen. Hierzu gibt Verf. ein Verfahren an, das zunächst der Brunescen Netzwerksynthese folgt, diese jedoch bei denjenigen Rechenschritten, die auf einen idealen Transformator führen würden, in bestimmter Weise abändert. Bei solchen Rechenschritten tritt an Stelle der Brunescen leiterförmigen Anordnung eine im Gleichgewicht befindliche Brückenschaltung auf.

A. Stöhr.

Chakrabarty, Nirmal Baran: Synthesis of a network for a prescribed time function. Indian J. Phys. 28, 473—484 (1954).

Für ein Netzwerk wird bei gegebenem Input $\delta(t)$ (Diracfunktion) ein als Funktion der Zeit gegebener Output $f(t)$ gewünscht. Um ein solches Netzwerk durch endlich viele Schaltelemente angenähert zu realisieren, muß man im allgemeinen $f(t)$ oder seine Laplace-Transformierte durch geeignete Funktionen approximieren. Verf. gibt dazu mehrere Methoden an und erläutert sie durch Beispiele.

A. Stöhr.

Pipes, Louis A.: Matrix analysis of linear time-varying circuits. J. appl. Phys. 25, 1179—1185 (1954).

Die Behandlung von linearen Netzwerken, in denen irgendwelche Schaltelemente periodische Funktionen der Zeit sind, führt auf lineare Differentialgleichungen mit periodischen Funktionen als Koeffizienten. Verf. untersucht insbesondere den Fall eines Stromkreises mit konstantem R und L und variablem C . Die zugehörige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung wird in bekannter Weise auf die Normalgestalt $\ddot{x} + F(t)x = 0$ gebracht, wobei $F(t)$ eine periodische Funktion ist (Mathieu-Hillsche Gleichung). Indem Verf. die Werte von x und \dot{x} am Ende einer Periode linear durch die Werte zu Beginn der Periode ausdrückt und dies Verfahren iteriert, führt er die Untersuchung der Lösung auf das Potenzieren einer zweireihigen Matrix zurück. Für den Fall, daß $F(t)$ eine „rechteckige Welle“ (periodisch und stückweise konstant) ist, ist die Rechnung vollständig durchführbar, und auch die Stabilität der Lösung kann diskutiert werden. Der Fall einer „sägezahnförmigen“ Abhängigkeit der Kapazität von der Zeit, der auf Zylinderfunktionen der Ordnung $1/3$ führt, wird in ähnlicher Weise behandelt. A. Stöhr.

Poincelot, Paul: Remarques sur la notion de vitesse de groupe; applications diverses. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 33, 329—364 (1954).

Bremmer, H.: The extension of Sommerfeld's formula for the propagation of radio waves over a flat earth, to different conductivities of the soil. Physica 20, 441—460 (1954).

Durch Anwendung des Greenschen Satzes kann die Wellen-Funktion (II Hertz-scher Vektor) als Flächenintegral über die Erdoberfläche unter Ausschluß von Sender T und Empfänger P geschrieben werden. Statt II wird der Schwächungsfaktor W (Verhältnis zum entsprechenden Wert im freien Raum) eingeführt. Im Flächenintegral für W gibt die Umgebung der Verbindungslinie TP den überwiegenden Beitrag, so daß „quer“ zu TP die Sattelpunktmethode angewandt werden kann. So bleibt schließlich nur ein Linien-Integral längs TP zu berechnen, unter dem die variablen Boden-Konstanten als Faktor μ stehen. In der Sattelpunkts-Näherung sind also nur deren Werte auf der direkten Verbindung von Bedeutung. Das wird auf den Fall zweier in sich homogener Bereiche mit verschiedenen μ angewandt. Zur Auswertung der Integrale wird ein Operatoren-Kalkül benutzt. Aus der allgemeinen Formel für die Bild-Funktion im zweiten Medium wird die Wellenfunktion II in verschiedener Weise (näherungsweise) erhalten, je nachdem ob der Empfänger nahe bei der Grenze oder weit davon entfernt liegt. Bei besserer Leitfähigkeit des zweiten Mediums erhält man auch den beobachteten Feldstärke-Anstieg jenseits der Grenze. Die von Clemmow (dies. Zbl. 50, 419) angegebene Formel wird ebenfalls erhalten. Schließlich wird noch der Fall dreier Bereiche behandelt.

K. Rawer.

Budden, K. G.: A reciprocity theorem on the propagation of radio waves via the ionosphere. Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 604—613 (1954).

Das Reziprozitätstheorem wird für von der Ionosphäre reflektierte Wellen in der speziellen Form geschrieben:

$$(1) \quad ||R||^+ = ||R||^-; \quad ||R||^+ = \perp R||^-; \quad \perp R||^+ = ||R||^-; \quad \perp R||^+ = \perp R||^-$$

(R Reflexionskoeffizienten, wobei der erste Index die Polarisierung der einfallenden, der zweite die der reflektierten Welle bezeichnet; die oberen Indizes geben an, ob die einfallende Welle nach Norden oder nach Süden lief). Der gesamte Reflexionsvorgang wird so durch einen R -Tensor beschrieben. Wird das tatsächliche Feld durch vier Teil-Wellen ($||$ und \perp polarisiert, auf- und absteigend) ausgedrückt, so können die Gleichungen (1) in Amplituden dieser Teilwellen ausgedrückt werden. (1) bedeutet, daß die Determinante verschwindet; der entsprechende Feldausdruck ist

$$Z_0^{-1} W = E_x^+ H_y^- - E_y^+ H_x^- - H_x^+ E_y^- - H_y^+ E_x^-$$

(wobei E elektrisches Feld, H magnetisches Feld, Z_0 Impedanz des leeren Raums, x in Einfallsebene, y senkrecht dazu). Da oberhalb der Ionosphäre keine absteigenden Wellen bestehen, muß dort $W = 0$ sein. Andererseits kann $k^{-1} \partial W / \partial z$ aus dem Dielektrizitätstensor der Ionosphäre (nach Clemmow und Heading, folgendes Ref.) berechnet werden. Das Ergebnis enthält als Faktor den Richtungs-Cosinus m des Erdmagnetfeldes zur y -Richtung. In den Fällen, wo m verschwindet, ist also $W' = 0$, damit verschwindet W auch unterhalb der Ionosphäre. Man hat also bei Ausbreitung in der magnetischen Nord-Süd-Ebene eine gewisse (in der Arbeit genauer formulierte) Reziprozität. In der Ost-West-Ebene dagegen besteht im allgemeinen keine Reziprozität.

K. Rawer.

Clemmow, P. C. and J. Heading: Closed forms of the differential equations governing radio propagation in the ionosphere. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 319—333 (1954).

Die Maxwell'schen Gleichungen bedeuten im allgemeinen Fall 6 Differentialgleichungen erster Ordnung für die Komponenten von E und H . Bei horizontaler Schichtung (Medium nur längs z -Achse variabel) treten aber E_z und H_z nicht in Ableitung auf, nach Eliminierung hat man, auch bei schiefem Einfall, ein System von 4 Gleichungen erster Ordnung. Dieses kann in Matrizenform geschrieben werden mittels des Vierer-Vektors $e = (E_x, -E_y, Z_0 H_x, Z_0 H_y)$ als $de/dz = -ikT e$. Der Tensor T ergibt sich aus dem Dielektrizitätstensor des Mediums. Nun wird eine Transformation $e = Rf$ auf die neue Vierer-Variable f eingeführt, die auf $f' = ikR^{-1}TRf = -R^{-1}R'f$ führt. Wird R nun so gewählt, daß $R^{-1}TR$ eine Diagonal-Matrix ist, so steht im neuen Gleichungssystem auf der linken Seite nur je eine Feldkomponente, es sind also die Kopplungsglieder auf der rechten Seite isoliert. Diese Wahl von R ergibt eine Diagonal-Matrix Δ mit den Diagonalelementen q_1, q_2, q_3, q_4 , wobei die q_i Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\det(T - qI) = 0$ sind (I Einheitsmatrix). Die q_i sind die von Booker eingeführten Parameter. Das so erreichte Vierer-System erster Ordnung kann durch sukzessive Approximation überall gelöst werden, wo $R^{-1}R'$ klein ist. Dort ist die Ausbreitung der vier Hauptwellen voneinander unabhängig. Wo dagegen $R^{-1}R'$ groß ist, tritt Reflexion oder Kopplung ein, z. B. wenn zwei der q_i gleich werden. Eine numerische Behandlung gelang bisher nicht. Die charakteristische Gleichung vierten Grades in q entartet zu einer zweiten Grades in q^2 , wenn die q_i paarweise bis aufs Vorzeichen gleich werden. (Das ist nach Booker der Fall, wenn die Einfallsebene senkrecht zur erdmagnetischen Meridian-Ebene liegt oder das Erd-Magnetfeld horizontal ist.) In diesen Spezialfällen bekommt man für die neue Vierer-Variable $h = (j_1 - j_2, j_1 + j_2, j_3 - j_4, j_3 + j_4)$ Separierung in zwei Paare erster Ordnung, die durch Eliminieren auf je eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung gebracht werden. Diese beiden sind gekoppelt, sie entsprechen bei senkrechter Inzidenz den von Försterling 1942 erhaltenen. Jede betrifft eine der beiden Hauptpolarisationen und das Vorzeichen der q_i unterscheidet aufwärts und abwärts laufende Welle.

K. Rawer.

Hurd, R. A.: The propagation of an electromagnetic wave along an infinite corrugated surface. Canadian J. Phys. **32**, 727—734 (1954).

Der Verf. behandelt die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle längs einer unendlichen gezahnten Oberfläche unter Benutzung einer Methode aus der Theorie der Resonanzen. Er gibt Ausdrücke für die Amplituden und Phasengeschwindigkeiten an, welche sehr genau sind, wenn die Zahl der Zähne pro Wellenlänge größer als ungefähr 5 ist.

P. Urban.

Piefke, Gerhard: Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Pyramiden-Trichter. Z. angew. Phys. **6**, 499—507 (1954).

Es wird die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Pyramidentrichter mit quadratischem Querschnitt theoretisch untersucht. Letzterer wird durch einen

Ausschnitt aus einer Kugel (Kugelsektor-Trichter) angenähert. Bei einem Öffnungswinkel $2\varphi < 53^\circ$ kann man im elektrischen Verhalten den Unterschied zwischen Kugelsektortrichter und Pyramidentrichter vernachlässigen, während bei einem Öffnungswinkel von $2\varphi = 2 \cdot 26,57^\circ$ für die H_{10} -Welle die Feldkomponenten E_φ , H_φ und H_r im Kugelsektor-Trichter exakt angegeben werden. Im Trichter hat man keine Grenzwellenlänge. Die longitudinalen Komponenten wachsen mit abnehmendem Öffnungswinkel oder höher werdendem Wellentypus. Je kleiner der Öffnungswinkel des Trichters, um so größer wird das Nahfeld und die Amplituden der Feldstärken in diesem. *P. Urban.*

Wait, James R. and Sidney Kahana: Radiation from a slot on a cylindrically tipped wedge. *Canadian J. Phys.* **32**, 714—721 (1954).

Die Verf. geben eine Lösung für das elektromagnetische Feld einer gegebenen Verteilung von Strömen und Ladungen in einem Volumen an, das durch einen unendlichen Keil mit zylindrischer Begrenzung eingeschlossen wird. Dabei untersuchen sie Öffnungswinkel von 90° , 180° und 270° für verschiedene Radien der Zylinderfläche. Die Ergebnisse werden auf das Antennenproblem angewendet und die Beugungsbilder in Form von Polardiagrammen angegeben. *P. Urban.*

Gutman, A. S.: Modified Luneberg lens. *J. appl. Phys.* **25**, 855—859 (1954).

Der Verf. diskutiert kugelsymmetrische optische Instrumente und ihre Verwendung für Kurzwellen. Die Anwendung der Hamiltonschen Optik zur Analyse der Strahlenwege in der Luneberg-Linse führt zu Formeln für eine neue Linse mit Kugelsymmetrie und einem in der Nähe des Zentrums gelagerten Brennpunkt. *P. Urban.*

Combe, René: Bande passante et dispersion des guides d'ondes chargés par des iris circulaires. *C. r. Acad. Sci., Paris* **238**, 1697—1699 (1954).

Der Verf. leitet Näherungsformeln ab, welche die Berechnung der Dispersion geladener Wellenleiter gestatten. Die Ergebnisse lassen eine Anwendung auf die Theorie linearer Elektronenbeschleuniger zu. *P. Urban.*

Hurd, R. A. and H. Gruenberg: H-plane bifurcation of rectangular waveguides. *Canadian J. Phys.* **32**, 694—701 (1954).

Die Verf. untersuchen das Problem der Teilung eines rechteckigen Wellenleiters und verwenden eine Methode der Residuen zur Aufstellung einer strengen Lösung. Sie geben Ausdrücke für die Amplituden der reflektierten und durchgehenden Wellen an und vergleichen die Ergebnisse mit den auf Grund der Transformationsmethode von Wiener und Hopf gefundenen. *P. Urban.*

Stark, Louis: Lower modes of a concentric line having a helical inner conductor. *J. appl. Phys.* **25**, 1155—1162 (1954).

Der Verf. behandelt die ungedämpften Grundsicherungen in einem Hohlleiter mit schraubenförmigem Innenleiter. Dabei werden im Falle passender Näherungen geschlossene Ausdrücke für die Ausbreitungsfaktoren hergeleitet und numerische Beispiele diskutiert. *P. Urban.*

Papadopoulos, V. M.: Propagation of electromagnetic waves in cylindrical wave-guides with imperfectly conducting walls. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **7**, 326—334 (1954).

Es wird der Einfluß eines unvollkommen leitenden Mediums auf die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in zylindrischen Wellenleitern beliebigen Querschnittes untersucht. Dabei bedient sich der Verf. einer Störungsrechnung unter Benutzung angenäherter Randbedingungen an den Wänden. Die Ergebnisse zeigen, daß die Entartung der Eigenwerte durch die Berücksichtigung eines unvollkommen leitenden Mediums aufgehoben wird. Außerdem liefert die Störungsmethode auch den Wert der Phasengeschwindigkeit und die entsprechenden Feldkomponenten. *P. Urban.*

Chevalier, Alfred et Erseo Polacco: Propagation des ondes électromagnétiques du type électrique transversal (TE) dans un guide contenant des ferrites. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 692—693 (1954).

Es wird die Ausbreitung elektromagnetischer Schwingungen vom elektrisch-transversalen Typ (TE) in einem Hohlleiter untersucht, welcher Ferrite enthält.

P. Urban.

Chambers, Ll. G.: An approximate method for the calculation of propagation constants for inhomogeneously filled wave-guides. Quart. J. Mech. appl. Math. **7**, 299—316 (1954).

Der Verf. entwickelt eine Variationsmethode zur Berechnung der Ausbreitungskonstanten in inhomogen ausgefüllten Wellenleitern, wobei dieselbe besonders für die Anwendung auf jene Feldkomponenten geeignet erscheint, die sich aus einem skalaren Potential ableiten lassen. Außerdem werden die Bedingungen für das Auftreten reiner TE- oder reiner TM-Wellen in einem solchen Wellenleiter betrachtet.

P. Urban.

Ginzburg, M. A.: Der gyrotrope Wellenleiter. Doklady Akad. Nauk SSSR, a. Ser. **95**, 489—492 (1954) [Russisch].

Der Verf. untersucht die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem begrenzten gyotropen Medium (Elektronenplasma), welches in einem Magnetfeld gelagert ist. Die dabei abgeleiteten Beziehungen können für ein Verfahren zur Bestimmung der Tensorkomponenten des Mediums herangezogen werden (ϵ_{ik} und μ_{ik}).

P. Urban.

● Sommerfeld, Arnold: Optics. (Lectures on Theoretical Physics, Vol. IV.) Translated by O. Laporte and P. A. Moldauer. New York: Academic Press, Inc. 1954. XI, 383 p.

Arntmann, Kurt: Unter welchen Bedingungen ist der Amplitudenverlauf einer zeitlich begrenzten Welle komplex? Ann. d. Phys., VI. F. **15**, 1—5 (1954).

Verf. zeigt, daß die von C. v. Frangstein und Cl. Schäfer gegen seine Behauptung — daß die zweidimensionale Wellengleichung durch eine Funktion $\psi = A(l, b) e^{ikl}$ mit reeller Amplitudenfunktion $A(l, b)$ nur dann befriedigt werden kann, wenn A die spezielle Form $A = \text{const} \cdot b = \text{const}$ besitzt — erhobenen Einwände unbegründet, also falsch sind bzw. nur unter Bedingungen gelten würden, die praktisch nicht erfüllt bzw. erfüllbar sind.

J. Picht.

Ingelstam, Erik: An optical uncertainty principle and its application to the amount of information obtainable from multiplebeam interferences. Ark. Fys. **7**, 309—322 (1954).

Verf. behandelt ausführlich an Hand verschiedener Einzelfälle den (mehr oder weniger bekannten) engen und inneren Zusammenhang der wellenmechanischen Unbestimmtheitsrelation mit den Fragen der optischen Beugungs- und Interferenzerscheinungen. Er erwähnt zunächst die Beugung an einem Spalt kleiner Breite oder einem schmalen Schirm sowie die Wirkung eines phasenändernden schmalen Plättchens, wie es in dem Phasenkontrastverfahren benutzt wird. Hinweis auf Zusammenhang mit der Abbeschen Sinusbedingung. Mit Bezug auf das Unbestimmtheitsprinzip werden anschließend die Mehrfachinterferenzen behandelt, insbesondere, mit welcher Genauigkeit (theoretisch) aus der Lage der Intensitätsmitte der Interferenzstreifen die tatsächliche Dicke bzw. die Dickenänderungen einer dünnen Schicht bestimmt werden können. Verf. kommt zu dem Ergebnis, daß die Genauigkeit um so geringer ist, zu je höherer Ordnung der Interferenzen man übergeht, da sie dann entsprechend unsicherer wird, welcher Stelle der Platte die betreffende Interferenzerscheinung zuzuordnen ist. Verf. diskutiert weitere Methoden zur Steigerung der Genauigkeit der zu erlangenden Informationen und wendet auf sie die abgeleiteten, die natürliche Begrenzung der Genauigkeit angehenden Formeln an. Hinweis darauf, daß es wohl möglich sei, für eine zu messende Größe die Genauig-

keit — wenigstens prinzipiell — beliebig zu steigern, wenn damit die zu ihr kanonisch konjugierte Größe nur mit entsprechender Ungenauigkeit angegeben wird — wie dies ja der Aussage der Ungenauigkeitsrelation entspricht. *J. Picht.*

Vouk, B.: The extinction cross-section coefficient of large perfectly absorbing spherical particles. Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Sér. 12 (Cl. Sci. math. phys. techn. 4), 65—71 (1954).

Die Messung des Extinktions-Querschnitts eines beugenden Objekts wird dadurch verfälscht, daß das Meßinstrument neben der geschwächten Primärstrahlung auch einen Teil der gebeugten Strahlung auffängt. Dieser Anteil soll in der vorliegenden Arbeit für eine sehr große beugende Kugel berechnet werden. Hierzu wird von der Mieschen Reihe nur ein Glied beibehalten, für welches Index und Argument der Zylinderfunktion übereinstimmt. Als Begründung wird angegeben, daß nur dieses Glied einem die Oberfläche streifenden Photon entsprechen soll.

Walter Franz.

Magnus, W.: Infinite matrices associated with a diffraction problem. Proc. Sympos. appl. Math. 5, 71—74 (1954).

Diskussion der Eigenschaften des unendlichen linearen Gleichungssystems, welches Levine und Schwinger (dies. Zbl. 32, 231) nach der Variationsmethode für das Feld in der kreisförmigen Öffnung in der unendlichen Ebene, auf die senkrecht eine skalare Welle einfällt, aufgestellt haben.

J. Meixner.

Gandy, R. O.: Out-of-focus diffraction patterns for microscope objectives. Proc. phys. Soc., Sect. B. 67, 825—831 (1954).

Es wird beugungstheoretisch für die Intensitätsverteilung im Bilde eines punktförmigen bzw. linsenförmigen Objektes der Formel Ausdruck abgeleitet, wenn das Objekt durch ein bildfeldgeebnetes anastigmatisches Mikroskopobjektiv abgebildet wird, das Objekt sich aber nicht exakt in der eigentlichen Objektebene, für die das Objektiv korrigiert ist, befindet, als Bildebene aber die der eigentlichen Objektebene konjugierte Bildebene benutzt wird, so daß also das Objekt nicht „scharf“ eingestellt ist. Verf. weist darauf hin, daß dies — natürlich — nicht gleichbedeutend damit sei, daß sich das Objekt zwar in der richtigen Objektebene befindet, die Intensitätsverteilung aber in einer zur richtigen Bildebene parallelen Ebene betrachtet wird. Bei der Ableitung der Formel werden verschiedene Annahmen gemacht, deren Berechtigung der Verf. anschließend diskutiert. Desgleichen diskutiert er, in welchem Sinne sie die Ergebnisse seiner Arbeit beeinflussen.

J. Picht.

Suchy, Kurt: Gekoppelte Wellengleichungen für inhomogene anisotrope Medien. Z. Naturforsch. 9a, 630—636 (1954).

Die aus den Maxwell'schen Gleichungen für periodische Wellen folgende Wellengleichung für \mathfrak{E} bringt Verf. unter Einführung der Dyade $\tilde{\epsilon} = \epsilon + i\sigma/\omega$ für anisotrope inhomogene Medien in die Form $-\nabla[\nabla\mathfrak{E}] - (k_0^2\epsilon_0)\tilde{\epsilon}\mathfrak{E} = 0$, wobei im allgemeinen Fall in jeder der drei Komponentengleichungen alle drei \mathfrak{E} -Komponenten E auftreten, in Sonderfällen aber jede der drei Gleichungen nur eine der abhängigen Variablen E_k enthält. Verf. betrachtet zwei solcher Fälle. Der erste Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß für die — gekrümmten — Koordinatenlinien bestimmte „Krümmungsbedingungen“ bestehen (vgl. K. Suchy, dies. Zbl. 48, 207), der zweite dadurch, daß der Term $\nabla\nabla\mathfrak{E}$ verschwindet (vgl. K. Suchy, dies. Zbl. 51, 434). Im ersten Fall geht die Wellengleichung über in $-\nabla[\nabla\mathfrak{E}] = \{\Delta\mathfrak{E} - \nabla\nabla\mathfrak{E}\}$, $e_k = \text{const}$, $g_k = \text{const}$, wobei das benutzte Koordinatensystem durch e_ν, μ_ν, g_ν gekennzeichnet ist. Im zweiten Fall geht $-\nabla[\nabla\mathfrak{E}]$ über in $(\Delta\mathfrak{E})_{e_k, g_k}$. Weiter legt Verf. ein „wellenfestes“ Koordinatensystem zugrunde, bei der eine Koordinatenrichtung in die Richtung der Wellennormalen fällt, was indessen nur beschränkt ausführbar ist, nämlich dann, wenn man aus physikalischen Gründen einfache Annahmen über den Wellennormalenverlauf machen kann, z. B. bei senkrechtem Einfall der Welle in ein zur Eintrittsfläche parallel geschichtetes Medium. — Es wird weiter angegeben,

in welchen 2 Spezialfällen $\tilde{\mathfrak{T}} = \tilde{\mathfrak{E}} \mathfrak{E}$ nicht in jeder Komponentengleichung alle drei E -Komponenten enthält. — Es wird das Wellengleichungssystem in wellenfesten Koordinaten aufgestellt, in dem zwei Koordinatenrichtungen ja noch frei wählbar sind. Dies liefert zwei Möglichkeiten für die Behandlung, die Verf. durchführt. In einem Fall werden die beiden zur Wellennormalen e_1 senkrechten Koordinatenrichtungen so gewählt, daß $\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\varepsilon}_{23} - \tilde{\varepsilon}_{21}\tilde{\varepsilon}_{13} = 0 = \tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\varepsilon}_{32} - \tilde{\varepsilon}_{31}\tilde{\varepsilon}_{12}$ ist, im zweiten Fall so, daß sie in die beiden zu e_1 senkrechten Richtungen fallen, in denen die Projektionen des \mathfrak{E} -Vektors mit denen des dazugehörigen $\tilde{\mathfrak{T}}$ -Vektors zusammenfallen und dabei noch

$$\{w \varepsilon_0 [e_2 e_2 + e_3 e_3] - \tilde{\varepsilon}\} \mathfrak{E} = 0 \text{ ist, wo } w = \tilde{D}_2/\varepsilon_0 E_2 = \tilde{D}_3/\varepsilon_0 E_3.$$

— Verf. behandelt dann 1. die Transformation des Koordinatensystems auf orthogonale Teilisotropierichtungen, 2. die Transformation des „Wellengleichungssystems in wellenfesten Koordinaten“ auf die Teilisotropierichtungen und 3. seine Transformation auf orthogonale Teilisotropierichtungen. Die „Teilisotropierichtungen“ sind definiert durch die beiden Lösungen der Matrixgleichung

$$f(w) = \begin{pmatrix} 0 - \tilde{\varepsilon}_{11} & -\tilde{\varepsilon}_{12} & -\tilde{\varepsilon}_{13} \\ -\tilde{\varepsilon}_{21} & w \varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_{22} & -\tilde{\varepsilon}_{23} \\ -\tilde{\varepsilon}_{31} & -\tilde{\varepsilon}_{32} & w \varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = 0. \quad J. Picht.$$

Suchy, Kurt: Schrittweiser Übergang von der Wellenoptik zur Strahlenoptik in inhomogenen isotropen absorbierenden Medien. III. Ann. der Physik, VI. F. **14**, 412—425 (1954).

In Fortsetzung der früheren Untersuchungen (dies. Zbl. **48**, 207; **51**, 434) leitet Verf. aus dem Ausdruck einer Welle den einer Wellengruppe ab, indem er für den Ortsanteil der Welle einen als „Eikonalansatz“ bezeichneten Ansatz macht:

$$E(r) = E_0 e^{ik_0 L(r)} = E_0 e^{i(i/c) \omega L(r)}, \text{ so daß } E = E_0 e^{-(\omega/c) \operatorname{Im} L} e^{(i/c) \omega (\operatorname{Re} L - ct)},$$

woraus sich durch Multiplikation mit zwei langsam veränderlichen Funktionen $f(l, l_0, \vartheta)$ und $g(\omega, \omega_0, \varepsilon)$ und Integration über einen kleinen Bereich $(l_0 - \vartheta, l_0 + \vartheta)$ und $(\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon)$ der Ausdruck der Wellengruppe ergibt. Dabei ist $\mathbf{l} = \nabla L / |\nabla L| = n / |n|$ komplexe Wellennormale, $n = |n|$ Brechungsindex. Durch Abspaltung der „Gruppenphase“ $e^{i(i/c) \omega_0 (\operatorname{Re} L_0 - ct)}$ ergibt das Vierfachintegral die „Gruppenamplitude“. Als „Gruppenfortpflanzung“ wird die Fortpflanzung der Gruppenamplitude definiert, die ihrerseits durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der „stationären Phase“ näher bestimmt wird

$$\omega \operatorname{Re} L(r) - \omega_0 \operatorname{Re} L_0(r) - (\omega - \omega_0) ct = \text{const.}$$

Die Flächen konstanter Gruppenamplitude sind so bestimmt durch

$$(\partial/\partial \omega) \{ \omega \operatorname{Re} L(r) - \omega \operatorname{Re} L(r_A) \} = c(t - t_A),$$

worin A Anfangswerte bezeichnet. — Es wird ein Vergleich der Gruppenfortpflanzung mit der Phasen- und Amplitudenfortpflanzung durchgeführt und es werden Ausdrücke für die Flächen 1. konstanter Wellenphase, 2. konstanter Wellenamplitude, 3. konstanter Gruppenphase, 4. konstanter Gruppenamplitude angegeben, und zwar sowohl für absorbierende als auch für nichtabsorbierende inhomogene anisotrope Medien. Es wird eine Erweiterung des Fermatschen Prinzips vorgenommen, nämlich bez. Wellenamplitude und Gruppenamplitude. Die Wegelemente der Gruppenamplitude fallen in absorbierenden inhomogenen anisotropen Medien im allgemeinen nicht mit den Wegelementen der Wellenphase und Wellenamplitude zusammen. Anschließend referiert (und diskutiert) Verf. analoge Untersuchungen von Poeverlein [dies. Zbl. **34**, 432; Z. angew. Phys. **3**, 135 (1951)], Bremmer [Terrestrial Radio Waves, Amsterdam 1949, S. 307] und Hines [J. Geophys. Res. **56**, 197 (1951)]. Für die Gruppengeschwindigkeit v_g bzw. für v_g^{-1} mit $v_g v_g^{-1} = 1$ findet Verf. $v_g^{-1} = c^{-1} \partial(\omega \mathfrak{P})/\partial \omega$ mit $\mathfrak{P} = \operatorname{Re} n$. Verf. weist darauf hin, daß bei vor-

handener Absorption im Gebiet anomaler Dispersion $|\nu_g| > 1$ wurde, wie von Brillouin [Ann. der Physik, IV. F. **44**, 203 (1914)] bemerkt wurde, was nicht der Fall ist, wenn man nach Sommerfeld [Ann. der Physik, IV. F. **44**, 177 (1914)] die „Gruppenparameter“ ϑ und ε so fortsetzt, daß $\vartheta = 0$ und $\varepsilon \rightarrow \infty$, ferner

$$f = \delta(e - e_0) \text{ und } g = 1/2\pi(\omega - \omega_0) \text{ ist und als „Signal“ } \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} \mathcal{E}$$

definiert, woraus in geeigneter Weise eine Signallaufzeit und eine Signalgeschwindigkeit folgt, die stets, auch in Gebieten anomaler Dispersion, $\leq c$ bleibt. — Die Überlegungen werden angewandt auf elektromagnetische Wellengruppen. Es wird gezeigt, wann die Richtung der Gruppenfortpflanzung mit der des Poyntingschen Vektors \approx übereinstimmt.

J. Picht.

● **Gramatzki, H. J.: Probleme der konstruktiven Optik und ihre mathematischen Hilfsmittel.** Berlin: Akademie-Verlag 1954. 139 S. 82 Abb. DM 21.—

In dem vorliegenden Buche werden einige dem Verf. wohl besonders wichtige Spezialfragen der geometrisch-optischen Abbildung behandelt (Numerische und trigonometrische Durchrechnung von Linsen und Linsensystemen, von Strahlen durch ein System zentrierter Linsen, graphische Durchrechnung, Astigmatismus und seine Sonderfälle, Blenden und Schneiden). Weiter behandelt Verf. die Farbfehlerkorrektur, um dann einige „Sonderlinsen und Spiegellinsen“ mehr oder weniger kurz zu besprechen. Es folgen Abschnitte über den „optischen Ausgleich“, über „Transfokatoren“, also Systeme mit stetig veränderlicher Brennweite, über Konstruktion eines Anastigmaten. Verf. stellt dann der „geometrischen Optik“ und der „Wellenoptik“ den Begriff der von ihm als „synthetische“ bezeichneten Optik gegenüber, die Konstrukteuren von mit optischen Systemen arbeitenden Geräten und Apparaturen helfen soll, Fehlkonstruktionen dieser Geräte zu vermeiden, zu denen sie eventuell geführt werden, wenn sie nur den Raum als von Licht erfüllt betrachten, der von den Strahlen begrenzt bzw. ausgefüllt erscheint, die man etwa zwecks Konstruktion der Lage des Bildes eines Objektes zu zeichnen pflegt. — Das Buch enthält zweifellos manches Nützliche, Wissenswerte und Anregende. Leider aber enthält es auch manches Falsche oder durch Interpunktionsfehler und unexakte Formulierung der Sätze Mißverständliche.

J. Picht.

Kuščer, L.: Diffusion of radiation in an infinite scattering medium. (Abstracts of a Thesis Univ. Ljubljana 1951.) Conseil Acad. RPF Yougoslavie, Bull. sci. **2**, 15—16 (1954).

Straškevič, A. M.: Mehrfachsymmetrische und mehrfachantisymmetrische elektronenoptische Systeme. Žurn. techn. Fiz. **24**, 274—286 (1954) [Russisch].

Es werden zunächst die allgemeinen Eigenschaften eines ebenen Feldes mit 4 Symmetrieebenen und 4 Antisymmetrieebenen untersucht, also eines Feldes, das durch ein System von 8 gleichen Elektroden bestimmt wird, die symmetrisch um die z -Achse angeordnet sind und längs der z -Achse so lang gestreckt sind, daß man die Änderung des Potentials längs der z -Achse (näherungsweise) vernachlässigen kann. Dabei haben die Elektroden abwechselnd entgegengesetzt gleiches Potential gegen die Achse des Korrektorsystems. $\Phi(r, \vartheta)$ wird als Potenzreihe von r angesetzt, woraus für die Koeffizienten $f_n(\vartheta)$ der Potenz r^n nach Einsetzen in die Laplacegleichung die Differentialgleichung $d^2 f_n/d\vartheta^2 + n^2 f_n = 0$ folgt. Dabei müssen die $f_n(\vartheta)$ den aus der Symmetrie bzw. Antisymmetrie folgenden Bedingungen genügen.

Verf. kommt zu der Darstellung $\Phi(r, \vartheta) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r r^{4(2r-1)} \cos 4(2r-1)\vartheta$ bzw. bei N -facher Symmetrie und N -facher Antisymmetrie:

$$\Phi(r, \vartheta) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r r^{N(2r-1)} \cos N(2r-1)\vartheta.$$

Im allgemeinen Fall — also bei Berücksichtigung der Änderung von Φ längs der z -Achse — findet er die Gleichung

$$\Phi(r, z, \vartheta) = 4^2 4! \cos 4 \vartheta [4^{-2} (r^4/0! 4!) g_{21}(z) - 4^{-3} (r^6/1! 5!) g_{31}(z) + \dots] + 4^6 12! \cos 12 \vartheta [4^{-6} (r^{12}/0! 12!) g_{62}(z) - 4^{-7} (r^{14}/1! 13!) g_{72}(z) + \dots],$$

worin die g_{ik} Funktionen (unendliche Potenzreihen) von z sind, die angegeben werden, die sich aber im Arbeitsbereich des betreffenden Korrektors auf jeweils ein einziges Glied beschränken lassen. — Weiter geht Verf. darauf ein, wie sich bei beliebiger Elektrodenform durch Messungen bestimmter Art im elektrolytischen Trog die Potentialverteilung ermitteln läßt. Ferner wird eingehend die Bestimmung der Potentialverteilung durch konforme Abbildung der einzelnen Gebiete auf die Halbebene $u > 0$ [mit $u + i v = (x + i y)^2$] behandelt. Bei 8 linearen Elektroden, die sternförmig um die Achse angeordnet sind und sich abwechselnd auf dem Potential $+U$ bzw. $-U$ befinden, ergibt sich so

$$\Phi(r, \vartheta) = (2U/\pi) \arcsin \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^4 \right] r^8 - r_0^8 - \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^8 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^8 \right] \cos^2 4 \vartheta,$$

wenn sie sich von $r = r_0$ bis $r \rightarrow \infty$ erstrecken. Für $\vartheta = k\pi/2$ mit $k = 0, 1, 2, 3$ liefert dies $\Phi(r) = (2U/\pi) \arcsin (r/r_0)^4$ für $0 \leq r \leq r_0$ und $\Phi(r) = U = \text{const}$ für $r \geq r_0$. Bei endlicher Länge l der sternförmig angeordneten Elektroden ergibt sich durch konforme Abbildung $r^4 e^{i 4 \vartheta} = r_0^4 \operatorname{sn}(KW/U)$, wo W das (komplexe) Potential bedeutet. K ist das vollständige elliptische Integral, sn die elliptische Jacobi-Funktion. Dabei ergibt sich wieder für $r_0 < r < r_0 + l$ der Wert $\Phi(r) = U$, während

$$\Phi = UK^{-1} F \left[\left(\frac{r_0}{r_0 + l} \right)^4, \arcsin (r/r_0)^4 \right] \quad \text{für } 0 \leq r \leq r_0 \quad \text{und}$$

$$\Phi = UK^{-1} F \left[\left(\frac{r_0}{r_0 + l} \right)^4, \arcsin [(r_0 + l)/r]^4 \right] \quad \text{für } r_0 + l \leq r$$

ist. Dabei bedeutet F das unvollständige elliptische Integral erster Art. — Verf. behandelt weiter den Fall, daß die Elektroden achsenparallele Teile der Mantelflächen von Kreiszylindern darstellen, sowie den Fall, daß die Elektroden als zur Achse des Systems parallel, um die Achse herum symmetrisch angeordnete Vollzylinder sind, die wieder abwechselnd auf entgegengesetzt gleichem Potential liegen. Hierfür wird die Feldverteilung auch graphisch angegeben. Formelmäßig findet Verf. hierfür

$$\Phi(r, \vartheta) = - \frac{U}{\ln C_0} \operatorname{Arth} \left[\frac{1 + C_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^4 \cos 4 \vartheta}{1 - C_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^4} \right] \left/ \left[\frac{1 + C_0}{1 - C_0} + \left(\frac{r}{r_0} \right)^8 \right] \right|$$

mit $C_0 = 2 R_0 (r_0 + R_0) / (r_0^2 - 2 R_0 (r_0 + R_0))$, wenn $2 R_0$ den Durchmesser der zylindrischen Elektroden, r_0 den Abstand der Zylinderachse von der Achse des elektronenoptischen Abbildungssystems bezeichnet. — Verf. behandelt weiter die Bahnbewegung der Elektronen in derartigen Korrektorsystemen in 1., 2. und 3. Näherung und gibt die Formeln für die in den x - und y -Ausdrücken (endliche Summen der Potenzen von z) auftretenden Koeffizienten explizite an. Für die 2. Näherung ergeben sich 10, für die 3. Näherung 34 Koeffizienten. Ferner wird eine Abschätzung des Restfehlers der Bahnberechnung vorgenommen. Die Ergebnisse wurden mit Modellmessungen nach dem Gravitationsverfahren verglichen.

J. Picht.

Chandrasekhar, S.: Examples of the instability of fluid motion in the presence of a magnetic field. Proc. Sympos. appl. Math. 5, 19–27 (1954).

While the stability of two-dimensional plane flows has only recently been settled beyond dispute (cf. Lin, preceding review), there have been two other examples of hydrodynamic stability which though they have attracted much less attention have been fully understood and are probably of even greater practical significance. The two examples are the thermal instability of a horizontal layer of fluid heated below and the rational instability of viscous flow between rotating cylinders. In this paper we shall consider these two classical problems in the framework of hydromagnetics, i. e., when the fluid considered is an electrical conductor and a magnetic field is present.

(Aus der Einleitung.)

Relativitätstheorie:

Battig, A.: *Allgemeine Resultate bezüglich der Beschreibung eines Photons in einem materiellen Medium.* Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A **10**, 111—135 (1954) [Spanisch].

Impuls und Energie einer ebenen Lichtwelle in einem brechenden Medium werden mit den relativistischen Beziehungen für ein Korpuskel verglichen. Schreibt man dem Photon eine von c verschiedene Korpuskulargeschwindigkeit (= Gruppengeschwindigkeit der Welle) zu, so ergibt sich eine von Null verschiedene Ruhmasse. Eine dabei auftretende potentielle Energie des Photons wird als Wirkung des Mediums beim Eintritt des Photons aus dem Vakuum interpretiert. *Walter Franz.*

Galli, Mario: *Osservazioni critiche circa nuove soluzioni del paradosso degli orologi.* Atti. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **16**, 356—363 (1954).

Scopo della Nota è di segnalare l'inconsistenza di alcuni ragionamenti esposti in lavori recenti aventi lo scopo di sostituire la spiegazione del cosiddetto paradosso relativistico degli orologi, dovuta ad Einstein e Tolman, con altre meglio fondate. L'A. mostra anche come si possa spiegare il paradosso senza ricorrere ai principi della teoria della relatività generale. Poichè il problema per sua natura non appartiene al dominio della teoria della relatività speciale, sembra preferibile accogliere la classica trattazione del Tolman che, com'è noto, non presenta nulla di artificiale.

G. Lampariello.

● **Gomes, Ruy Luís:** *Relativitätstheorie. Raum-Zeit-Schwerkraft.* Lissabon 1954. 87 p. [Portugiesisch].

Questa Monografia trae origine da lezioni dell'A. sulla teoria della Relatività. Il punto di vista che domina l'esposizione si oppone alla esagerata influenza (come dice l'A.) esercitata dalla celebre conferenza di Minkowski del 1908 sullo spazio e sul tempo e cioè l'A. cerca di rafforzare la concezione classica dello spazio e del tempo come realtà indipendenti. In Relatività generale, dice l'A., la relatività dello spazio e del tempo significa dipendenza dalla distribuzione della materia esistente nell'Universo. In realtà lo spazio e il tempo in un determinato sistema di riferimento vengono concepiti ed utilizzati nelle questioni concrete della Fisica come se avessero esistenze indipendenti l'una dall'altra. Mentre nella meccanica classica e nella relatività speciale la gravitazione si considera come una tra le possibili forze agenti sulla materia, in relatività generale Einstein ha separato la gravitazione da tutte le altre forze e ha considerato inerzia e gravitazione legate direttamente alla materia e determinanti della metrica dell'Universo. Questa è la ragione, dice l'A., per cui la teoria della Relatività generale è una teoria della gravitazione e non della relatività del moto. Il principio di covarianza che domina la teoria della relatività generale non esprime alcunchè di caratteristico, ma piuttosto qualcosa che è comune ad ogni teoria che „non sia visibilmente assurda“ al contrario di ciò che generalmente si opina a tale riguardo. In codesta affermazione l'A. si ispira al lavoro di V. A. Fock, *Les systèmes de Ptolomée et de Copernic à la lumière de la théorie générale de la relativité*, Questions scientifiques, t. 1 (1952).

G. Lampariello.

Gomes, Ruy Luís: *Über den Begriff des starren Körpers in der speziellen Relativitätstheorie.* Gaz. Mat., Lisboa **15**, Nr. 58, 9—11 (1954) [Portugiesisch].

Scopo della Nota è la ricerca delle condizioni matematiche che esprimono la rigidità del moto di un sistema di punti in relatività speciale muovendo dalla definizione data da Max Born [Ann. der Physik, IV. F. **30**, 1—56, 840 (1909)].

G. Lampariello.

Syngé, J.L.: *Relativistically rigid surfaces.* Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises, 217—226 (1954).

Als „relativistisch starr“ wird hier ein Kontinuum von Teilchen (einen Körper

bildend) definiert, für welches alle benachbarten Weltlinien, die durch die Punkte des Körpers bestimmt sind, parallel sind. Um den schwierigen Fragen der Bestimmung des metrischen Tensors für den Körperraum aus den Feldgleichungen sowie der Bestimmung von Weltlinien, die durch die inneren Körperpunkte bestimmt sind, auszuweichen, beschränkt sich der Verf. nur auf die Betrachtung der Geschichte der Körperoberfläche, wobei diese einen 3-Zylinder Σ im Raum-Zeit-Kontinuum darstellt und die Körperoberfläche selbst als ein zweidimensionales Kontinuum behandelt wird. Da außerhalb des Körpers keine Spannungen vorhanden sind, so befriedigen die Weltlinien auf Σ die verlangte Starrheitsbedingung, wenn das Gravitationsfeld vernachlässigt wird. Aus diesen Voraussetzungen ergibt sich dann, daß außerhalb von Σ unsere Welt eben ist, und wir haben nur die Bewegung von dieser relativistisch starren Fläche in einer solchen Welt zu betrachten. Für diese Fläche werden dann allgemeine Bewegungsgleichungen hergeleitet. Gesondert werden die Deformationen längs der Parameterlinien betrachtet und am Beispiel einer sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehenden Kugel gezeigt, daß die Bogenlänge des Meridians ungeändert bei dieser Rotation bleibt, während der Äquator sich zusammenzieht und die Polarachse verlängert. Der Verf. beweist nur für (im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit) kleine Geschwindigkeiten, daß eine solche relativistisch starre Fläche sechs Freiheitsgrade besitzt, aber er vermutet, daß es auch im Falle von beliebigen Geschwindigkeiten so sein wird. *T. P. Angelitch.*

Širokov, M. F.: Über das Trägheitszentrum in der allgemeinen Relativitätstheorie. *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **27**, 251—256 (1954) [Russisch].

Für eine beliebige Materiemenge, aus geladenen oder ungeladenen Teilchen bestehend, die ein begrenztes Raumgebiet ausfüllt, in welchem der Energietensor der Materie $T^{\mu\nu} = 0$ ist, definiert der Verf., unter der Voraussetzung der Isolierung, das relativistische Trägheitszentrum durch $Y^\mu = M^{\mu\nu} P_\nu P_\lambda P^\lambda$. Dabei bezeichnet $M^{\mu\nu}$ wie üblich den totalen Drehimpuls-Tensor und P_ν den totalen Impuls-Vektor des betrachteten Systems. Dieser Begriff wird dann auf eine isolierte Materieanhäufung mit schwachem Gravitationsfeld angewandt, und für ein solches Feld wird eine entsprechende Formel für das Trägheitszentrum abgeleitet. Es wird dann gezeigt, daß dieser Ausdruck als Masse des Systems neben der Ruhmasse der Teilchen noch die Massen enthält, die ihren kinetischen und potentiellen Energien entsprechen. *T. P. Angelitch.*

Koškarev, V. P.: Über die Bewegungsgleichungen eines Systems endlicher Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **27**, 563—570 (1954) [Russisch].

Das Problem der Bewegung von rotierenden, nicht kugelsymmetrischen Körpern in ihrem Gravitationsfeld ist nach der Methode von Fock behandelt. Es wird gezeigt, daß in der ersten Näherung aus den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie sowohl für die Schwerpunkte der verschiedenen Körper wie auch für ihre Drehimpulse die Newtonschen Bewegungsgleichungen folgen.

A. Papapetrou.

Buchdahl, H. A.: Reciprocal static solutions of the equations $G_{\mu\nu} = 0$. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **5**, 116—119 (1954).

Scopo della Nota è la dimostrazione del seguente teorema: Se

$$ds^2 = g_{ik}(x^j) dx^i dx^k + g_{aa}(x^j) (dx^a)^2$$

dove gli indici i, j, k assumono i valori $1, \dots, n$ eccetto a , è un elemento lineare statico di una V_n ($n \geq 4$), soluzione delle equazioni di Einstein del campo gravitazionale nel vuoto, allora è anche soluzione l'elemento lineare (reciproco)

$$ds^2 = (g_{aa})^{2/n-3} g_{ik} dx^i dx^k + (g_{aa})^{-1} (dx^a)^2.$$

G. Lampariello.

Ueno, Yoshio: *On the wave theory of light in general relativity. II. Light as the electromagnetic wave.* Progress theor. Phys. **12**, 461—480 (1954).

Questo lavoro è la continuazione delle ricerche che già l'A. ha esposte riguardo alla propagazione della luce in teoria della relatività generale (questo Zbl. **52**, 442). Qui viene sistematicamente studiata per la prima volta la propagazione della luce come fenomeno governato dalle equazioni del campo elettromagnetico in uno spazio-tempo statico a simmetria sferica (in particolare nello spazio-tempo di Schwarzschild o di de Sitter).

G. Lampariello.

Clauser, Emilio: *Sui fronti d'onda nella teoria unitaria einsteiniana.* Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **87** (III. Ser. **18**), 473—492 (1954).

V. Hlavaty a mis en évidence un type de solution de la théorie unitaire d'Einstein, par lequel les autoparallèles de longueur nulle coïncident avec les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne définie par les $h_{\alpha\beta}$ (notations de Hlavaty). Il existe un autre type analogue où l'on substitue aux $h_{\alpha\beta}$ les $l_{\alpha\beta}$. Pour la version de 1950 et pour celle de 1953, l'A. détermine les fronts d'onde à la traversée desquels peuvent se produire des discontinuités des dérivées secondes soit des $h_{\alpha\beta}$ soit des $l_{\alpha\beta}$. Dans le second cas, les résultats coïncident avec ceux du rapp. (ce Zbl. **56**, 440), dans le premier l'A. met en évidence le cône défini par $h_{\alpha\beta}$, mais il semble au rapporteur que ce cas correspond au „cas exceptionnel" réservé par lui et traité ultérieurement par Madame Maurer-Tison [C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 1127—1129 (1956)]. Le traitement est clair et élégant.

A. Lichnerowicz.

Quantentheorie:

● Ludwig, G.: *Die Grundlagen der Quantenmechanik.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 70.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. XII, 460 S., 52 Abb. DM 49,—.

Es handelt sich um eines jener Bücher, dem der Leser erst dann mit Verständnis folgen kann, wenn er das behandelte Gebiet bereits kennt: dann aber wird er es mit großem Gewinn und Genuß lesen. Das Buch besitzt eine in der physikalischen Literatur ganz ungewöhnliche mathematische Gründlichkeit und Strenge und wird daher bei den Mathematikern Zustimmung und Anerkennung finden. Die Physiker werden es mit großer Bewunderung ansehen, aber oft bald wieder aus der Hand legen. Trotz der Warnungen Hilberts, v. Neumanns und anderer bedeutender Mathematiker interessieren sie sich für Konvergenzfragen meist nur im äußersten Notfall. (Ref. möchte dazu bemerken, daß Logiker wie Brouwer oder Lorentzen die meisten üblichen Begriffsbildungen und Beweise der heutigen Mathematiker in einer ähnlichen Weise für unklar und bedenklich halten wie die Mathematiker es mit denen der Physiker tun.) — Das I. Kapitel zeigt einen recht plausiblen induktiven Weg zur Quantenmechanik (über die Teilchen und über die klassischen Wellen). — Das II. Kapitel enthält eine axiomatische Grundlegung der neueren Quantentheorie nach dem Vorbilde v. Neumanns. Die beiden nächsten Kapitel behandeln die statistische Transformationstheorie und die Bewegungsgleichungen in den drei Dirac-Bildern. Im V. Kapitel findet man einen Beweis des quantenmechanischen Ergodensatzes, eine daran anschließende Definition des Begriffs einer makroskopischen Observablen und eine ausführliche Erörterung des Meßprozesses. Ref. glaubt, daß die damit zusammenhängenden Fragen noch nicht durchdiskutiert sind. (Der Leser wird es hier, wie auch an anderen Stellen, unbequem finden, daß die Literaturangaben so spärlich sind und insbesondere auf den v. Neumannschen Beweis des *H*-Theorems nicht verwiesen wird; vgl. auch Pauli und Fierz, dies. Zbl. **17**, 139). Das VI. Kapitel behandelt einige naturphilosophische Fragen (Komplementarität, Ganzheit, Determinismus und Wahrscheinlichkeit, Reversibilität). — Unter den Anwendungen der Quantentheorie (Kapitel VII bis XII) überwiegt stark die

Physik der Elektronenhüllen. Die Darstellung zeugt wieder von dem großen mathematischen Können des Verf.s und enthält manchen neuen Gedanken. Kapitel XI erläutert die Grundbegriffe der Streutheorie. — In zwei längeren Anhängen wird eine Einführung in die Theorie des Hilbertraumes und in die Darstellungstheorie gegeben, letzteres im wesentlichen nach v. d. Waerden. (Auf S. 427, 12 Z. v. u., ist eine Beweislücke.) — Ref. begrüßt es, daß wir in diesem Buch ein so gutes Beispiel für die Bemühung haben, die Beziehungen zwischen Physik und Mathematik nicht abreißen zu lassen und den physikalischen Theorien eine solide mathematische Grundlage zu geben.

G. Süßmann.

Foldy, Leslie L.: Operators and observables in isotopic spin space. *Phys. Review*, II. Ser. **93**, 1395—1400 (1954).

Es wird das von Wick, Wightman und Wigner [*Phys. Review*, II. Ser. **88**, 101 (1952)] vorgeschlagene „Superauswahlprinzip“ für die elektrische Ladungsvariable diskutiert. Danach sind nur die Zustandsvektoren mit einer „scharfen“ Ladung physikalisch sinnvoll; die anderen sind aus dem Formalismus auszuschließen. Dementsprechend stellen nur solche hermiteschen Operatoren wirklich observable Größen dar, die mit der Gesamtladung vertauschbar sind (natürlich müssen sie außerdem gegenüber Teilchenvertauschungen symmetrisch sein). Dies hat zur Folge, daß viele Operatoren, die sich formal voneinander unterscheiden, in Wirklichkeit miteinander gleichwertig sind. Verf. konstruiert für den Ladungsspinraum von A Nukleonen alle wirklich voneinander verschiedenen Operatoren und zeigt, daß sie sich alle durch T^2 und T_z ausdrücken lassen, wo T der gesamte Ladungsspin-Vektor ist. Ferner wird der im wesentlichen eindeutige Charakter der von Kroll und Foldy eingeführten „Ladungsparität“ festgestellt. Verf. führt aus, daß das Superauswahlprinzip die physikalischen Unbestimmtheiten des Ladungsspinraums (orthogonal zur T_z -Richtung) eliminiert. Durch diese Einschränkung wird der T -Formalismus im wesentlichen identisch mit der ursprünglichen elementaren Beschreibung, in der das Neutron und das Proton als wesentlich verschiedene Teilchen behandelt werden.

G. Süßmann.

Takabayasi, Takehiko: The formulation of quantum mechanics in terms of ensemble in phase space. *Progress theor. Phys.* **11**, 341—373 (1954).

Verf. diskutiert die von Wigner (dies. Zbl. **4**, 382) eingeführte Darstellung des quantenmechanischen statistischen Operators ρ im Phasenraum (wobei negative Wahrscheinlichkeiten auftreten), vor allem in Verbindung mit der Darstellung durch eine Madelung-Flüssigkeit.

G. Süßmann.

Franke, Herbert W.: Ein Strömungsmodell der Wellenmechanik. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **4**, 163—172 (1954).

Die Deutung der Wellenmechanik eines Teilchens durch eine Madelungflüssigkeit wird diskutiert (Bernoullische Gleichung, Ehrenfest'sches Theorem, Virialsatz).

G. Süßmann.

Aeschlimann, F.: Sur la représentation fonctionnelle des corpuscules. *J. Phys. Radium* **16**, 752—756 (1954).

Die Darstellung der Schrödingergleichung durch eine Madelung-Flüssigkeit wird nach dem Vorbild der üblichen Hydrodynamik verallgemeinert, wodurch eine nichtlineare Wellengleichung entsteht.

G. Süßmann.

Bohm, D. and J. P. Vigier: Model of the causal interpretation of quantum theory in terms of a fluid with irregular fluctuations. *Phys. Review*, II. Ser. **96**, 208—216 (1954).

Die bekannte Bohmsche Interpretation der Wellenmechanik (dies. Zbl. **46**, 210; **51**, 205) wird verschärft zu der Annahme, daß das reale q -Feld in Wirklichkeit eine Madelung-Flüssigkeit ist, in der das Teilchen schwimmt. Mit Hilfe der Annahme zusätzlicher statistischer Schwankungen der Flüssigkeitsbewegung um die Madelung'schen Mittelwerte wird eine Begründung für die a-priori-Wahrscheinlichkeit

$P = |\psi|^2$ gegeben. Anschließend wird eine Verallgemeinerung auf die Diracgleichung und auf Mehrteilchensysteme angegeben. Die Behandlung des Meßprozesses wird mit diesen Vorstellungen in Einklang gebracht. *G. Süßmann.*

Frankl, F. I.: *Zu den Grundlagen der Quantenmechanik.* Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 215—221 (1954) [Russisch].

Es wird eine kausale Deutung der Wellenmechanik vorgeschlagen, die mit der von Weizel (dies. Zbl. 51, 204) gegebenen praktisch übereinstimmt. D. h. Verf. führt die von Bohm eingeführte „quantenmechanische Kraft“ auf Stöße unbekannter Teilchen zurück. Im Unterschied zu Weizel wird auch der quantenmechanische Kreisel behandelt und eine relativistische Verallgemeinerung angegeben. Die Analyse ist jedoch nicht so gründlich wie bei Weizel. Die Erweiterung auf Teilchen mit Spin wird als unmöglich bezeichnet. Ref. möchte vor allem einwenden, daß das Pauliprinzip sowie die Reduktion der Wellenpakete auf diese Weise nicht erklärt werden können. *G. Süßmann.*

Schönberg, M.: *Simple solution of the generalized Schrödinger equations.* Nuovo Cimento, IX. Ser. 12, 300—303 (1954).

Verf. gibt eine einfache Klasse von Lösungen der von ihm (vgl. folgendes Referat) und Takabayasi [Progress theor. Phys. 9, 187—222 (1953)] verallgemeinerten Schrödingergleichung an. *G. Süßmann.*

Schönberg, M.: *A non-linear generalization of the Schrödinger and Dirac equations.* Nuovo Cimento, Ser. IX 11, 674—682 (1954).

Verf. verallgemeinert die Wellenmechanik, indem er nicht wirbelfreie Madelungströmungen zuläßt. Ähnliche Gedanken finden sich bereits bei Takabayasi [Progress theor. Phys. 9, 187—222, 681—683 (1953)]. *G. Süßmann.*

Schönberg, M.: *A non-linear generalization of the Schrödinger and Dirac equations.* II. Nuovo Cimento, IX. Ser. 12, 649—667 (1954).

Die Überlegungen der vorstehend referierten Arbeit werden auf eine allgemeinere Klasse von Feldern ausgedehnt. Wesentliche Voraussetzung ist die Eichinvarianz der Lagrangefunktion. Anschließend werden Analoga der Wirbelsätze von Helmholtz, Kelvin u. a. abgeleitet. *G. Süßmann.*

Brachman, Malcolm K.: *Spacetime representation in wave mechanics. Illustration of the method.* Phys. Review, II. Ser. 96, 516—518 (1954).

Verf. gibt eine heuristische Ableitung der eindimensionalen Schrödingergleichung in der von ihm und Hellmann [Phys. Review, II. Ser. 92, 822 (1953)] angegebenen Zellen-Darstellung der Quantenmechanik und bestimmt damit näherungsweise die Energie des Grundzustandes eines Teilchens in einem Potentialtopf endlicher Höhe. *G. Süßmann.*

Fényes, L.: *Über das Divergenzproblem der W. K. B.-Methode.* Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 4, 133—147 (1954).

Verf. analysiert das Versagen der WKB-Methode an den klassischen Umkehrpunkten und modifiziert sie zu einem konvergenten Verfahren. *G. Süßmann.*

Bailey, V. A.: *Reflection of waves by an inhomogeneous medium.* Phys. Review, II. Ser. 96, 865—868 (1954).

Die WKB-Näherung geht von der Lösung einer Wellengleichung mit näherungsweise räumlich konstanten Koeffizienten aus. Verf. geht entsprechend von einer Differentialgleichung erster Ordnung aus, die er aus der Ricattischen der Wellengleichung erhält. Die entsprechende Approximation der primären Wellengleichung ist dann

$$u_1 = \exp\left(\int^x q dx\right); \quad u_2 = u_1 \int^x u_1^{-2} dx; \quad q = -\frac{p'}{2p} \left[1 - \left\{1 - \frac{4p^4}{p'^2}\right\}^{1/2}\right],$$

wobei p den Brechungsindex bedeutet. Im Gegensatz zu den WKB-Lösungen bleiben die u bei den Nullstellen von p im allgemeinen stetig und endlich. Der Reflexionskoeffizient wird in dieser Näherung bestimmt. Beispiele. *K. Rawer.*

Fogel, Karl-Gustav: On the p - and d -phase of the Yukawa potential. Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. 19, Nr. 7, 10 p. (1954).

Der Verf. studiert die Lösungen der Differentialgleichung

$$\psi'' - (k^2 + l(l+1)x^2 - b e^{-x}/x) \psi = 0$$

mit $k^2 < 0$, $l = 1$ oder 2 und verschiedenen Werten von b zwischen $-5,12$ und $2,7$. Speziell wird die asymptotische Phase der im Ursprung regulären Lösung berechnet. Diese Größe schreibt der Verf. als ein Verhältnis von zwei Funktionen, die sich im Prinzip in konvergenten Reihen nach b entwickeln lassen. Für numerische Anwendungen werden alle Glieder bis zur Größenordnung b^2 berücksichtigt und die asymptotische Phase in dieser Weise numerisch ausgewertet. Das Ergebnis wird erstens mit den Ergebnissen numerischer Integrationen der Differentialgleichung und zweitens mit den Ergebnissen einer direkten Entwicklung der Phase in Potenzen von b verglichen. Es stellt sich dabei heraus, daß die in der vorliegenden Arbeit benützte Methode keine wesentlich größere Genauigkeit liefert als die direkte Entwicklung der Phase – wenigstens nicht, wenn Glieder mit b^3 und höheren Potenzen von b vernachlässigt werden.

G. Källén.

Chochlov, Ju. K.: Eine Formulierung der Wechselwirkung eines Systems von Teilchen mit einem elektromagnetischen Feld. Žurn. éksper. teor. Fiz. 26, 576–584 (1954) [Russisch].

Durch eine Eichtransformation wird aus der Schrödinger-Gleichung des Mehrteilchen-Problems das Viererpotential eliminiert; an seiner Stelle treten Linienintegrale über die Feldstärken auf, welche von einem willkürlichen Nullpunkt geradlinig zum Aufpunkt zu erstrecken sind. In dieser Darstellung wird der elektromagnetische Wechselwirkungsanteil der Hamilton-Funktion nach Multipolen entwickelt; die Koeffizienten der elektrischen Feldstärke werden als elektrische Multipole, die der magnetischen Feldstärke als magnetische Multipole erster und zweiter Art der Strom-Ladungs-Verteilung angesprochen. (Anm. des Ref.: Die „magnetischen Momente 2. Art“ sind jedoch mit den elektrischen identisch; Verf. scheint die Verknüpfung zwischen elektrischem und magnetischem Feld durch die Maxwell'schen Gleichungen übersehen zu haben.) Im Anschluß daran wird die Multipoldarstellung für die Absorption eines Photons angegeben, und geschlossen, daß man in guter Näherung bei strahlenden Übergängen der Atomkerne vom Austausch-Strom absehen kann.

Walter Franz.

Gürsey, Feza: One-dimensional motion of the electron in relativistic wave mechanics. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 19, 161–165 (1954).

Der Verf. betrachtet ein (relativistisches) Elektron in einem elektrostatischen Feld. Speziell wird das Potential (nicht unbedingt die Bewegung, wie der Titel sagt) als nur von einer Koordinate abhängig vorausgesetzt. Die vierdimensionale vierkomponentige Diracsche Gleichung wird zunächst in eine eindimensionale vierkomponentige Gleichung überführt, die dann auf zwei und schließlich auf eine einzige Gleichung reduziert wird.

F. Penzlin.

● **Broglie, L. de:** Théorie générale des particules à spin. 2. éd. Paris: Gauthier Villars 1954. VI, 209 p. 7 fig. 2,500 fr.

Die zweite Auflage des bekannten de Broglieschen Buches über Spinwellengleichungen bringt nur geringfügige Abänderungen und Verbesserungen. Abgesehen von den einführenden Kapiteln über Wellenmechanik, Impulsoperatoren und Diracgleichungen steht über den weiteren Kapiteln als Leitgedanke de Broglies ureigenste Methode der Fusion. Man versteht, daß die anderswo üblichen Schreibweisen, Auffassungen und damit auch manche Ergebnisse in dem Buch auch neuerdings nicht Platz finden konnten.

F. L. Bauer.

Kohn, Walter: On the convergence of Born expansions. Reviews modern Phys. 26, 292–310 (1954).

Verf. behandelt die nichtrelativistische Streuung an einem statischen kugelsymmetrischen Potential. Nach der Zerlegung in Partialwellen wird der Konvergenzradius der Entwicklung von $\tan \eta_l$, $\exp 2i\eta_l$ und η_l sowie der Fehler beim Abbrechen der Entwicklung diskutiert. (η_l = Phasenverschiebung der l . Partialwelle.)

G. Höhler.

Green, H. S.: Integral equations of quantized field theory. Phys. Review, II. Ser. **95**, 548—556 (1954).

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, die „Integralgleichungen einer quantisierten Feldtheorie“ allgemein aufzustellen und zu renormieren. Als Beispiel seiner Methode diskutiert der Verf. am Anfang der Arbeit die Gleichung

$$[i \nabla - m - f \gamma a(x)] K(x, x_0) = \delta_+(x - x_0),$$

wo $a(x)$ ein äußeres, nicht-quantisiertes Feld sein soll. Diese Gleichung wird mit Hilfe des Ansatzes $K(x, x_0) = \sum_p K(p) \exp[-ip(x - x_0)]$ diskutiert, d. h. der

Verf. nimmt an, daß die Funktion $K(x, x_0)$ nur von der Differenz $x - x_0$ abhängt. Damit er mit diesem Ansatz keine Widersprüche erhält, muß der Verf. für das äußere Feld $a(x) = \sum_k a(k) \exp[-ik(x - x_0)]$ schreiben, d. h. das äußere Feld wird als von x_0 abhängig betrachtet! Dies muß als eine recht originelle Voraussetzung angesehen werden. Der Ref. hat nicht untersucht, ob die mit diesen Voraussetzungen erhaltenen Ergebnisse irgendeine Beziehung zu der normalen Theorie haben.

G. Källén.

Gel'fand, I. M. und R. A. Minlos: Eine Lösung der Gleichungen quantisierter Felder. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 209—212 (1954) [Russisch].

Die Verff. behandeln zunächst die Lösung der Thirring'schen Gleichung: $\square \psi(x) - \kappa^2 \psi(x) = \lambda \psi^2(x) + J(x)$, wobei $J(x)$ der äußere Strom $\psi(x)$ Feldoperator des Teilchens, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ein Punkt des vierdimensionalen Zeitraums ist. Durch Einführung des mittleren, normierten Operatorwertes und der Lagrangeschen Feldfunktion L erhält man die lineare Gleichung

$$-i(\square - \kappa^2) \delta z / \delta J(x) + \lambda \delta^2 z / (\delta J(x))^2 = J(x) \cdot z,$$

wobei $z = \langle e^{-iL} \rangle^{-1}$. Die Lösung dieser Gleichung ergibt endgültig:

$$z = c \int \exp \left[\left(\sum t_k J_k - \lambda \sum \frac{t_k^2}{3} + \frac{i}{2} \sum R_{ik} t_i t_k \right) \omega \right] dt_1 \cdots dt_n.$$

Für eine beliebige relativistisch invariante Gleichung erster Ordnung

$$L_{\alpha\beta}^{\mu} (\partial \psi_{\beta} / \partial x_{\mu}) - i e A_{\mu} L_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{\beta} + i \kappa \psi_{\alpha} = \eta_{\alpha},$$

mit $\square A_{\mu} = S_{\mu} + I_{\mu}$, mit dem Strom $S_{\mu} = \frac{1}{2} (\psi^{\dagger} L_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{\beta} - \psi_{\alpha} L_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{\beta}^{\dagger})$, den Quellen η_{α} , und den äußeren Strömen I_{μ} erhält man analog

$$z = \int \exp [i \sum S_{\alpha,k} \eta_{\alpha,k}^{\dagger} + S_{\alpha,k}^{\dagger} \eta_{\alpha,k} + J_{\mu,k} t_{\mu,k} + L] H ds_{\alpha,k} dt_{\mu,k}.$$

Die Endresultate sind teilweise vorweggenommen durch R. P. Feynman, dies. Zbl. **40**, 280.

P. Sagirow.

Supek, Ivan et Ivo Babić-Gjalski: La correspondance entre l'électrodynamique classique et l'électrodynamique quantique. Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Ser. **12**, (Cl. Sci. math. phys. techn. **4**), 13—18 (1954).

Quelques exemples de „correspondance“ en électrodynamique.

O. Costa de Beauregard.

Lee, T. D.: Some special examples in renormalizable field theory. Phys. Review, II. Ser. **95**, 1329—1334 (1954).

Der Verf. konstruiert ein einfaches Modell einer Feldtheorie, das einerseits explizite Lösung gestattet, andererseits aber doch eine Reihe charakteristischer Züge einer realistischen Feldtheorie aufweist, und untersucht sie insbesondere hinsichtlich einer Renormierung. Die dabei auftretenden merkwürdigen Erscheinungen

sind neuerdings von Källén und Pauli [Danske Vid. Selsk., mat.-fis. Medd. **30**, Nr. 7 (1955)] eingehend untersucht worden.

F. Penzlin.

Kiržnic, D. A.: Zur Frage der Meson-Nukleon-Wechselwirkungen. Žurn. éksper. teor. Fiz. **27**, 6—18 (1954) [Russisch].

Im Rahmen der neutralen pseudoskalaren Mesonentheorie untersucht Verf. die allgemeinste Form der Wechselwirkung mit dem Nukleon und kommt zum Schluß, daß neben den bisher betrachteten bekannten Wechselwirkungen noch eine „Impulswechselwirkung“ möglich ist. Diese führt zu einer Abstoßkraft, die erst in sehr kleinen Entfernungen wirksam wird. Diese neue Wechselwirkung ist physikalisch äquivalent einer mit dem Feld zunehmenden effektiven Nukleonenmasse. Bemerkenswert ist, daß in der Elektrodynamik eine solche Impulswechselwirkung nicht auftreten kann. Die feldabhängige Masse des Nukleons führt in der Mesonentheorie zu Nichtlinearitäten, die Verf. mit der Mehrfacherzeugung von Mesonen in Zusammenhang bringt. — Verf. untersucht dann die Bewegung eines Teilchens mit der elektrischen Ladung e , dem magnetischen Moment m und der Impulswechselwirkungskonstanten k in einem statischen elektrischen, magnetischen und mesonischen Feld. Diese Untersuchung gibt interessante Einblicke in die Dynamik solcher Teilchen. Wichtig ist hierbei, daß eine „Schwelle der Impulswechselwirkung“ auftritt. — Weitere Folgerungen (Ableitung von Kernkraftpotentialen u. a.) werden nicht gezogen.

F. Cap.

Enatsu, Hiroshi: Mass spectrum of elementary particles. I. Eigenvalue problems in spacetime. Progress theor. Phys. **11**, 125—142 (1954).

Es wird versucht, das Divergenzproblem der Quantentheorie der Wellenfelder und das Problem des Massenspektrums der Elementarteilchen in Verbindung zu bringen. Zu diesem Zweck ordnet der Verf. dem Elementarteilchen innere Variable zu und interpretiert die übliche feldtheoretische Selbstenergie als ein Selbstpotential in diesen Variablen, wodurch ein Eigenwertproblem für die Masse definiert wird.

R. Haag.

Enatsu, Hiroshi: Mass spectrum of elementary particles. II. Progress theor. Phys. **12**, 363—379 (1954).

Im 1. Teil der Arbeit wird ein Beispiel des oben geschilderten Eigenwertproblems (s. vorst. Referat) bis zu numerischen Ergebnissen durchgeführt. Der 2. Teil beschäftigt sich mit der Idee der gemischten Felder, d. h. mit der Frage, ob man ein System von Feldern finden kann, bei dem sich die Divergenzen kompensieren. Verf. versucht, die Aussagen, die er mit den beiden Ansätzen enthält, den experimentellen Erfahrungen zuzuordnen.

R. Haag.

Bau der Materie:

Gilvary, J. J.: Thermodynamics of the Thomas-Fermi atom at low temperature. Phys. Review, II. Ser. **96**, 934—943 (1954).

Brachman's results allow one to expand the energy as an asymptotic series in T^2 . Hence the thermodynamics of the Thomas-Fermi atom model can be shown explicitly for first-order temperature perturbation. The thermodynamic functions are made directly accessible by fitting semi-empirically published parameters of the Thomas-Fermi equation. As exchange is neglected the results apply only at high Z and high compression.

J. Jacobs.

Gilvary, J. J.: Solution of the temperature-perturbed Thomas-Fermi equation. Phys. Review, II. Ser. **96**, 944—948 (1954).

An analytic solution of the temperature-perturbed Thomas-Fermi equation of n^{th} order in terms of quadratures on the unperturbed solution for zero-temperature is given. The boundary parameters can be written as explicit integrals on the basis of fixed volume boundary conditions. Hence all basic thermodynamic functions

can be expanded in asymptotic series, in even or odd powers of T . Application is made to zero-temperature solutions of Feynman, Metropolis and Teller to obtain accurate boundary parameters for the corresponding 1st-order temperature-perturbed cases based on a fixed atom volume.

J. Jacobs.

Jucis, A. P., V. V. Kibartas und I. I. Glembockij: Die Lösung der vereinfachten Fockschen Gleichungen in doppelt-konfiguratorischer Annäherung für Atome vom Beryllium-Typus. *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **27**, 425—430 (1954) [Russisch].

Bei der Anwendung der Fockschen Methode zur Bestimmung der Eielektronenfunktionen in der mehrfach-konfiguratorischen Annäherung erhält man Gleichungen, die sich von den gewöhnlichen Fockschen Gleichungen durch Zusatzglieder unterscheiden, die Konfigurationsglieder genannt werden. Es zeigt sich am Beispiel des Be, daß in den Gleichungen für die Konfiguration $(1s)^2(2s)^2$ das Konfigurationsglied und für $(1s)^2(2p)^2$ das Austauschglied weggelassen werden kann, ohne daß sich Energie und Verteilung sehr ändern. Der Rechenaufwand ist dagegen wesentlich geringer. Die damit erhaltenen Lösungen werden mit der strengen zweifach-konfiguratorischen Näherung für Be verglichen und in der vereinfachten Form noch für B^+ und C^{++} bestimmt und mit den experimentellen Daten verglichen. Es zeigt sich, daß im Falle des Be-Atoms die Änderung der Energie 0,001 at. E. beträgt. Ferner ergibt sich, daß die Energieverbesserung mit Hilfe der zweifach-konfiguratorischen Näherung gegenüber der einfachen Methode etwa die Hälfte der Energiedifferenz zwischen experimentellem Werte und einfacher Näherung beträgt. Tabellen der Wellenfunktionen sind beigelegt.

H. Preuß.

Isiguro, Eiichi und Shoichiro Koide: Magnetic properties of the hydrogen molecules. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 350—357 (1954).

Mittels Variationsmethoden werden die magnetischen Konstanten des Wassermoleküls berechnet, und zwar die diamagnetische Suszeptibilität χ , das magnetische Moment μ_r , die Abschirmungskonstante σ , die den Einfluß der chemischen Bindungsart auf das magnetische Moment wiedergibt, und die Wechselwirkungskonstante zwischen Spin und magnetischem Moment H_r . Die Energie des in einem äußeren Feld rotierenden Moleküls wird mittels einer $7 - 2$ Term-Funktion berechnet. Der Vergleich der errechneten Termwerte mit den experimentellen Daten der Versuche von Ramsay ergibt eine sehr gute Übereinstimmung.

H. J. Kopineck.

• **Jeans, J. H.:** The dynamical theory of gases. Fourth edition. New York: Dover Publications, Inc. 1954. 444 p. 27 Fig. \$ 2,00.

This Dover Publication is an unabridged republication of the fourth Cambridge University Press edition, which dates from 1925. The book was drafted several years earlier, only minor changes having been made since the second edition of 1916. About the first half of the book is devoted to the equilibrium state and it gives a lucid account of such matters as the Maxwell distribution and the Boltzmann H -theorem. In the second half a thorough treatment is given of viscosity, heat conduction and diffusion based on Boltzmann's equation and Maxwell's theory of transport phenomena. Despite its age the book can be recommended as a first mathematical introduction into the subject.

B. R. A. Nijboer.

Winter, Jacques: Considérations sur la théorie des liquides. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **14**, 1—33 (1954).

Vorliegende Theorie stützt sich auf einen verallgemeinerten Ordnungsbegriff, welcher auf der Annahme vorhandener quantisierter Schwingungszustände von Molekülgruppen beruht. Verf. gibt Anwendungen auf Viskosität, laminare Strömung, biologische Makromoleküle und Erscheinungen an Oberflächenschichten.

H. Falkenhagen-G. Kelbg.

• **London, Fritz:** Superfluids. Vol. II. Macroscopic theory of superfluid helium. New-York: John Wiley & Sons, Inc. 1954. XVI, 217 p. 56 Fig. \$ 8,00.

Das Buch gibt eine wertvolle Übersicht über den Stand der Theorie des flüssigen Helium II, sowohl nach der quantentheoretischen als nach der phänomenologischen Seite hin. Nach einer einleitenden Besprechung der wichtigsten experimentellen Ergebnisse wird die Quantentheorie des kondensierten Heliums am absoluten Nullpunkt behandelt. Dann werden der Begriff der Bifluid, der für eine phänomenologische Beschreibung des Helium II heute unentbehrlich erscheint, und ihre Eigenschaften ausführlich erläutert. Im Zusammenhang damit erscheinen die Begriffe des Rotonen- und Phononenfeldes und die Quantisierung der Hydrodynamik. Abschließend wird auf die Eigenschaften des He_3 und seiner Mischungen mit He_4 bei tiefen Temperaturen eingegangen und die phänomenologische dynamische Theorie dieser Mischungen dargestellt.

J. Meixner.

Gel'kman, B. T.: Zur Theorie der Superfluidität der Quantenflüssigkeit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 199–202 (1954) [Russisch].

Verf. führt im Gegensatz zu anderen Autoren (z. B. Ziman, dies. Zbl. **51**, 227) bei der Quantisierung der Hydrodynamik nur ein Paar von kanonisch konjugierten Variablen ein und untersucht das Spektrum eines Bosegases mit Wechselwirkung.

G. Höhler.

Marziani, Marziano: Su un principio di minimo dell'elettrodinamica stazionaria dei superconduttori ciclici. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **9**, 409–412 (1954).

Nell'elettrodinamica di London dei superconduttori, quando il campo è stazionario, si dimostra che i periodi del potenziale di superconduzione di un superconduttore moltiplicamente connesso determinano univocamente il campo magnetico e la supercorrente. In questa Nota si interpreta codesto teorema come una proprietà di minimo dell'energia totale, somma dell'energia magnetica e dell'energia libera di superconduzione.

G. Lampariello.

Fester Körper:

Kranje, Katarina: The collimation error of circular apertures in small-angle X-ray scattering. Soc. Sci. natur. Croatica. Period. math.-phys. astron., II. Ser. **9**, Nr. 3/4, 179–188, kroatische Zusammenfassg. 188–190 (1954).

Bestrahlt man ein kolloides System mit Röntgenstrahlen, so beobachtet man oft bei kleinen Streuwinkeln eine sog. „kontinuierliche“, d. h. monoton mit wachsendem Beugungswinkel abnehmende Kleinwinkelstreuung J . Sind x_1, x_2 die orthogonalen Koordinaten eines Vektors x , der in dem in den Strahlengang geschobenen Beobachtungsschirm liegt und ist $J_0(x_1, x_2)$ der gebeugte Intensitätsverlauf bei Benutzung streng monochromatischer Strahlung (Wellenlänge λ) und unendlich feiner Kollimatorlöcher, so tritt bei endlicher Öffnung dieser Löcher eine Verschmierung der J_0 -Kurve zu J auf, die gegeben ist durch das zweidimensionale Faltungsprodukt von J_0 mit G : (1) $J(x) = J_0 * G = \int J_0(y) G(x-y) dy$. Dabei ist $G(x)$ die Intensitätsverteilung des Primärstrahles auf dem Schirm bei entferntem kolloiden System, y ein über den Schirm laufender Vektor und dy ein Flächenelement des Schirmes. Verf. errechnet J für den folgenden Fall: 1. Zwei kreisförmige Kollimatorlöcher mit den Radien a, b , die von einer Lichtquelle konstanter Flächenhelligkeit ganz ausgeleuchtet sind, voneinander den Abstand d und vom Schirm den Abstand D bzw. $d-D$ haben, 2. J_0 ist für kugelförmige Teilchen, deren Radien R einer Maxwell'schen Massenstatistik

$$(2) \quad VH(R) = [2/\Gamma(\tfrac{1}{2}n+1)] z^n \exp(-z^2); \quad z = R/R_0$$

gehören, nach der Guinierschen Näherung gegeben durch

$$(3) \quad J_0(u) \sim [1 + (uR_0/5)^2]^{-(n+4)/2}; \quad u = 4\pi\lambda^{-1} \sin(|x|/D).$$

Für $n = \infty$ (alle Teilchen sind gleich groß, $R = R_0$) und $n = 1, 2$ (relative Schwankung der Teilchenradien beträgt 48% .) wird J mit J_0 bei verschiedenen Werten von

a, b, R_0 verglichen. Nur im homodispersen Fall ($n = \infty$) wird mittels eines Diagramms eine einfache Korrektur des Kollimatorfehlers 'gefunden. *R. Hosemann.*

● Klug, H. P. and L. E. Alexander: X-ray diffraction procedures. London: Chapman and Hall 1954. XIII, 716 pp. 120 s.

Rumanova, I. M.: Bestimmung der Vorzeichen der „Anhalts“-Strukturamplituden durch statistische Gleichungen. Trudy Inst. Kristallogr. 10, 25—29 (1954) [Russisch].

Kitajgorodskij, A. I.: Theorie der Bestimmung der Vorzeichen der Strukturamplituden. Trudy Inst. Kristallogr. 10, 10—24 (1954) [Russisch].

Stručkov, Ju. T. und B. V. Nenart: Ein Nomograph zur Berechnung der Strukturamplituden. Trudy Inst. Kristallogr. 9, 317—320 (1954) [Russisch].

Poraj-Košić, M. A.: Über die Reduktion der Beträge der Strukturamplituden auf die absolute Skala. Trudy Inst. Kristallogr. 9, 305—312 (1954) [Russisch].

Belov, N. V.: Nomographische Rechenverfahren in der Röntgenstrukturanalyse. Trudy Inst. Kristallogr. 9, 277—286 (1954) [Russisch].

Bell, Dorothy G.: Group theory and crystal lattices. Reviews modern Phys. 26, 311—320 (1954).

Verf. behandelt die Berechnung der Winkelanteile der Eigenfunktionen für ein Elektron im starren Gitter und gibt Tabellen für kubische und dicht gepackte hexagonale Gitter. *G. Höhler.*

Klinger, M. I.: Untersuchung des Energiespektrums eines Elektrons in einem Ionen-Halbleiter bei Vorhandensein eines elektrischen und eines magnetischen Feldes. Žurn. eksper. teor. Fiz. 26, 159—167 (1954) [Russisch].

Ein polarer Kristall befindet sich in einem elektrischen und einem senkrecht dazu gerichteten magnetischen Feld. Verf. berechnet für schwache Elektron-Gitter-Kopplung (nur longitudinale optische Gitterschwingungen) nach einem Verfahren von Tjablikov [Žurn. eksper. teor. Fiz. 21, 16 (1951)] das Energiespektrum eines Überschußelektrons. Insbesondere findet er einen Näherungsausdruck für die effektive Masse. Abschließend wird diskutiert, in welchem Bereich es erlaubt ist, für die Besetzungszahlen der Zustände der (modifizierten) Schallquanten die Boseformel zu verwenden. *G. Höhler.*

Klinger, M. I.: Untersuchung eines Polaron-Halbleiters bei Vorhandensein eines elektrischen und eines magnetischen Feldes. Žurn. eksper. teor. Fiz. 26, 168—172 (1954) [Russisch].

Das in vorsteh. Referat genannte Problem wird mit der Methode der adiabatischen Näherung von Bogoljubov (dies. Zbl. 41, 588) und Tjablikov [Žurn. eksper. teor. Fiz. 21, 377 (1951)] behandelt. Speziell wird untersucht, bei welcher Stärke des elektrischen Feldes der Potentialtopf des Polarons wesentlich verändert wird. *G. Höhler.*

Samojlovič, A. G.: Berechnung der magnetischen Suszeptibilität des Elektronengases in Beimengungs-Halbleitern. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 256—258, russ. Zusammenfassg. 259 (1954) [Ukrainisch].

Smirnov, A. A.: Über den Einfluß der Löcher in den Knoten eines Kristallgitters auf den Elektrowiderstand einer Legierung. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1954, 250—255, russ. Zusammenfassg. 255 (1954) [Ukrainisch].

Gourary, Barry S. and Robert W. Hart: Spherical model of an antiferromagnet. Phys. Review, II. Ser. 95, 676—686 (1954).

Verff. behandeln einen Antiferromagneten mit Austausch-Wechselwirkungen zwischen nächsten und übernächsten Nachbarn mittels des sphärischen Modelles. Letzteres wird durch die Nebenbedingung $\sum_j \mathcal{S}_j^2 = N S(S+1)$ eingeführt. (\mathcal{S}_j = Spinvektor-Operator des j ten Atoms; N = Zahl der Atome; S = vor-

gegebene, feste Zahl). Die Zustandssumme kann dann exakt ermittelt und das makroskopische Verhalten der Substanz in dieser Näherung diskutiert werden.

G. Heber.

Eleock, E. W.: Antiferromagnetism and ferrimagnetism of non-stoichiometric compounds. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **227**, 102—114 (1954).

Verf. entwickelt eine Theorie nichtstöchiometrischer magnetischer Verbindungen vom Typ $A_{1-x} \cdot B$ (es ist an Eisen- und Chrom-Sulfide, -Selenide und -Telluride gedacht). Die magnetischen Wechselwirkungen nächster Nachbarn werden durch eine der Molekularfeldtheorie ähnliche Näherung beschrieben. Ferner wird in gewisser summarischer Weise die nichtmagnetische Energie der atomaren Ordnung der Verbindung eingeführt. Die Durchrechnung dieses Modelles zeigt, daß eine solche Substanz unter gewissen Bedingungen (besonders $x \neq 0$) ferrimagnetisch werden kann, wenn sie für $x = 0$ antiferromagnetisch ist. Diese und andere Einzelheiten diskutiert Verf.

G. Heber.

Grass, Günther: Zur Anwendung der Drudeschen Theorie der freien Elektronen auf das optische Verhalten der Metalle im Sichtbaren und Ultraviolett. Z. Phys. **139**, 358—364 (1954).

Ginzburg, V. L.: Über die optischen Eigenschaften der Metalle. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 999—1002 (1954) [Russisch].

Verf. kritisiert das bisherige Vorgehen in der Metalloptik und zeigt, wie man mit Berücksichtigung des anomalen Skineffekts aus Ergebnissen von Reflexionsmessungen auf die Elektronenkonzentration schließen kann. In deutscher Sprache liegt ein ausführlicher Bericht vor: V. L. Ginzburg und G. P. Motulewitsch, Fortschr. d. Physik **3**, 309—370 (1955).

G. Höhler.

Schmidt, Helmut: Lichtabsorption in klassischer und quantentheoretischer Beschreibung. Z. Phys. **139**, 433—439 (1954).

Verf. leitet durch quantenmechanische Störungsrechnung zweiter Ordnung eine allgemeingültige Absorptionsformel her, die im Grenzfalle $\hbar \nu \ll kT$ mit der klassischen und für $\hbar \nu \gg kT$ mit der Fröhlichschen (Semiconducting Materials, London 1951, S. 132) übereinstimmt.

H. Haken.

Leibfried, Günther und Ernst Schlömann: Wärmeleitung in elektrisch isolierenden Kristallen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. **1954**, 71—93 (1954).

Die Peierlssche Theorie der Wärmeleitung von Kristallen wird am Modell des flächenzentrierten Gitters, in welchem nur Zentralkräfte zwischen den nächsten Nachbarn in Betracht gezogen werden, näherungsweise quantitativ durchgeführt. Das Ergebnis ist $\kappa = \kappa_0 f(\theta/T)$, wo κ_0 in guter Näherung die Wärmeleitfähigkeit bei der Debye-Temperatur θ ist, und $f(\theta/T)$ bei hohen Temperaturen $\approx \theta/T$, bei tiefen Temperaturen proportional $(T/\theta)^3 e^{\theta/bT}$ ist. Die Konstante b ergibt sich aus dem Modell zu $\sqrt{5/3} = 1,3$, während Messungen Werte zwischen 2,1 und 2,7 liefern. Bei festem He sollte κ_0 etwa proportional zu θ^2 sein; das Experiment zeigt, daß sich in der Tat κ_0 etwa wie θ^2 verändert, wenn durch Druckvariation θ um einen Faktor 4 vergrößert wird. Der Verlauf des Wärmewiderstandes mit der Temperatur stimmt bei Karborund und festem He gut mit den theoretischen $f(\theta/T)$ überein, beim Diamant ist die Übereinstimmung weniger gut, was möglicherweise auf die Einwirkung von Störstellen zurückzuführen ist.

Walter Franz.

Herring, Conyers: Role of low-energy phonons in thermal conduction. Phys. Review, II. Ser. **95**, 954—965 (1954).

Die Stoßzeiten von Phononen kleiner Energie werden unter Annahme eines elastisch anisotropen Kontinuums und unter Berücksichtigung von Gliedern dritter Ordnung in der potentiellen Energie untersucht. Die Ergebnisse sind von den bei elastischer Isotropie erhaltenen Resultaten stark verschieden. Verf. erhält so in einigen Fällen aus der Kontinuumstheorie eine endliche Wärmeleitfähigkeit. (Be-

merkung des Ref.: Hier scheint ein Versehen vorzuliegen, da Peierls völlig allgemein gezeigt hat, daß bei Vernachlässigung der Umklappprozesse, d. h. Annahme der Kontinuumstheorie, keine Wärmeleitfähigkeit existiert!) *G. Leibfried.*

Homilius, Joachim: Theorie der inneren Feldemission in isolierenden Einkristallen. Diss. math.-naturw. Fakultät Münster 4, 8—9 (1954).

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Sen, K. K.: On the problem of softening of radiation by multiple Compton scattering in stellar atmospheres containing free electrons. Proc. nat. Inst. Sci. India 20, 530—541 (1954).

Das Problem war von Chandrasekhar [Proc. Roy. Soc. London, 192, 508 (1948)] in erster Näherung behandelt worden (Taylor-Entwicklung der Intensität nach Potenzen der Compton-Verschiebung). Hier wird auch das quadratische Glied dieser Entwicklung mit berücksichtigt und das Randwertproblem mit Hilfe trigonometrischer Reihen gelöst, was sich als vorteilhafter als das Chandrasekhar'sche Verfahren erweist. Es ergeben sich merkbliche Abweichungen von den Rechnungen in erster Näherung. *G. Burkhardt.*

Prokof'ev, V. A.: Zur Frage über die Berücksichtigung der Emission bei eindimensionaler stationärer Bewegung eines einatomigen Gases. Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski 172, Mech. 5, 79—124 (1954) [Russisch].

Der Verf. weist darauf hin, daß, während die klassische Hydrodynamik bei der Lösung ihrer Aufgaben verschiedene physikalische Eigenschaften der Materie (wie z. B. die Fähigkeit, jederzeit Energie zu emittieren resp. zu absorbieren) ignorieren konnte, die moderne Astrophysik und dynamische Meteorologie die Strahlungsprozesse nicht übersehen dürfen. Es handelt sich dabei in erster Linie um Wärmeübertragung durch Strahlung und bei höheren Temperaturen auch um die direkte mechanische Einwirkung der Strahlung. Die mathematische und physikalische Erfassung dieser Vorgänge ist mit großen Schwierigkeiten verbunden. In Ergänzung zu einer Arbeit Kuznecovs [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geograf. geofiz. 1941, 3—28 (1941)], der die Grundgleichungen der Hydrodynamik mit Berücksichtigung der durch Strahlung erzeugten Wärmeübertragung behandelte, betrachtet der Verf. den Einfluß nichtstationärer Strahlungsfelder und die mechanische Wirkung der Strahlung. Es wird dabei eine eindimensionale stationäre Bewegung eines einatomigen, im hydrodynamischen Sinne idealen Gases angenommen. Die Betrachtung ist eine makroskopische, da auf die Einzelwirkung der Elementarstrahler verzichtet wird. Der Verf. bringt zunächst die einzelnen Charakteristiken der Strahlungsvorgänge (Intensität, Absorptionskoeffizient usw.) und die Bewegungsgleichungen des Gases mit Berücksichtigung der Strahlung. Dann werden diese allgemeinen Gleichungen auf den betrachteten Fall spezialisiert, wobei angenommen wird, daß die Bewegung in Richtung der Strahlung erfolgt, so daß alle Größen nur von einer Koordinate x , im nichtstationären Fall von x und t abhängen. Bei der Betrachtung ionisierter Gase wird die Photoionisation vernachlässigt, da sie nur bei sehr geringem Druck dominant wird. Die thermodynamischen Gleichungen für ionisierte Gase werden mit statistischen Methoden gewonnen. Als Beispiel wird die Stoßwelle betrachtet. Eine stationäre Stoßwelle bewirkt ein Ansteigen der Temperatur, des Druckes und der Dichte. Sie trennt das Gas in zwei Teile mit verschiedenen Bedingungen. Es sind dabei 3 Fälle möglich: 1. Das Anwachsen der Temperatur und des Druckes bewirkt keine Zustandsänderungen (es treten keine Dissoziation, Ionisierung oder chemische Reaktionen auf), 2. der Wechsel der Temperatur und des Druckes führt zu physikalisch-chemischen Veränderungen, die aber im Vergleich zur Kompressionsgeschwindigkeit langsam erfolgen, 3. die physikalisch-chemische Reaktion erfolgt schon im Augenblick der Kompression und muß also bei der Betrachtung

tung des Prozesses (der Stoßwelle) mit berücksichtigt werden. Für die Behandlung des letztgenannten Falles mußte man durch Berechnung der Relaxationsprozesse und Berücksichtigung der chemischen Kinetik sich weit in das Gebiet der statistischen Mechanik begeben. Zur Vereinfachung nimmt der Verf. ein lokales Gleichgewicht der Temperatur und des Druckes in jedem Augenblick des Prozesses an. Das ermöglicht zumindestens eine qualitative Vorstellung des betrachteten Vorganges. Bei schwacher Stoßwelle ist der Einfluß der Strahlung gering. Es wird deswegen eine intensive Stoßwelle betrachtet, bei der die Erhitzung die ausschlaggebende Rolle spielt, da ja die Wärmeübertragung durch Wärmeleitung der ersten, durch Strahlung aber der vierten Potenz des Temperaturgradienten proportional ist. Für Berechnungen benutzt der Verf. die Formeln von Sahá und Chandrasekar. Er beschränkt sich auf eine ebene Welle und stellt bei der Diskussion der erhaltenen Beziehungen und Resultate unter anderem fest: 1. die adiabatische Kurve des betrachteten Vorganges liegt über der des homogenen Gases, 2. die Veränderung der Entropie genügt dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik, 3. die Ionisierung führt zur Vergrößerung der Geschwindigkeit hinter der Welle und zum Sinken der Temperatur und des Absolutwertes des Strahlungsstroms, 4. die kritische Geschwindigkeit ist kleiner als die kritische Geschwindigkeit des homogenen Gases. Die erhaltenen Resultate werden durch zahlreiche Zeichnungen illustriert.

P. Sagirow.

Tárczy-Hornoch, A.: Über die Bestimmung der durchschnittlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei der seismischen Reflexionsmethode. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 9, 223—240, russ., engl. u. französ. Zusammenfassg. 240—241 (1954).

Verf. knüpft an das graphische Verfahren von Bugaljo an, bei dem die der Laufzeitmessung dienenden Geophone in gleichen Abständen auf einer Geraden liegend und in derselben Höhe wie der Sprengpunkt angenommen werden. Mit Hilfe der fehlertheoretischen Methoden der Geodäsie werden für diesen Spezialfall geeignete, fehlertheoretisch günstige Näherungsverfahren zu Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus den an zahlreichen Stellen ermittelten Laufzeiten (bis zu 25 Geophone) entwickelt. Die Diskussion ergibt allgemein gültige Anhaltspunkte für eine Genauigkeitssteigerung durch entsprechende Wahl der Geophonabstände unter Berücksichtigung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Gestein und der Reflexionstiefe. Der allgemeine Fall soll in einer weiteren Veröffentlichung des Verf. demnächst behandelt werden.

W. Hofmann.

Adachi, Ryuzo: On a proof of fundamental formula concerning refraction method of geophysical prospecting and some remarks. Kumamoto J. Sci., Ser. A 2, Nr. 1, 18—23 (1954).

Beim Refraktionsschießen senkrecht zur Streichrichtung von n geneigten Schichten erhält man die Laufzeit des seismischen Impulses nach folgender Formel

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{v_i} (\cos \alpha_i + \cos \beta_i) + \frac{\sin \beta_1}{v_1} x;$$

dabei bedeuten h_i die Schichtdicken unter dem Schußpunkt, v_i die Geschwindigkeiten, α_i und β_i die Winkel der Strahlabschnitte gegen das Lot und x den Abstand zwischen Schußpunkt und Beobachtungsort. Diese Formel wird in der vorliegenden Arbeit bewiesen und Anwendungen werden aufgezeigt.

W. Kertz.

Gulotta, Beniamino: Per una più precise definizione delle deviazioni angolari locali del geoide dell'ellissoide. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 17, 26—32 (1954).

Im Anschluß an die geodätischen Arbeiten von Kohlschütter und Pizzetti untersucht der Verf. die Verhältnisse des Verlaufs der Lotlinien und weist darauf hin, daß die Messungen in der Natur auf dem Geoid ausgeführt werden, während die Berechnungen auf Landesellipsoiden erfolgen. Es entstehen verschiedene Dif-

ferenzen von der Größenordnung der Beobachtungsfehler im Zusammenhang der gesamten Netze auf ein einheitliches Ellipsoid für die ganze Erde. Der Verf. will mit Hilfe zweier Hypothesen versuchen, die Abweichungen auf Größen höherer Ordnung zu reduzieren. Die 1. Hypothese führt zur Gleichung von Villarceau, während die zweite Hypothese zur Theorie von Mineo führt; s. dessen *Lezioni di Geodesia* (Palermo 1952). K. Mader.

Brjunelli, B. E.: Über eine mögliche Ursache der sonnentäglichen Variation des erdmagnetischen Feldes. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser 99, 741—743 (1954) [Russisch].

Köhler, Hilding: Meteorological turbulence. Some consequences of the power law applied to the exchange coefficient. *Nova Acta Soc. Sci. Upsal.*, Ser. IV 16, Nr. 1, 20 p. (1954).

In Fortsetzung früherer Untersuchungen (Köhler, dies. Zbl. 9, 95, 429) wird die Bewegungsgleichung einer gleichmäßigen turbulenten Strömung längs der Erdoberfläche (d/dz) ($\eta \, dc/dz$) = $C + i \lambda \varrho c$ (z Vertikale, η Austauschkoeffizient, $c = u + i v$ mittlere Windgeschwindigkeit, $\lambda = 2\omega \sin \varphi$ Term der Coriolisbeschleunigung) unter der Annahme eines Potenzgesetzes für den turbulenten Austausch $\eta = \eta_0 (z/z_0)^{p/p+1}$ mittels Besselfunktionen integriert. Aus der erhaltenen Lösung werden die Bedingungen dafür gewonnen, daß das Geschwindigkeitsprofil durch ein Potenzgesetz darstellbar ist, und Tabellen zur Ermittlung des entsprechenden Höhenintervalls angegeben. W. Szablewski.

Hinkelmann, Karl und Rudolf Schwarzenberger: Charakteristikenverfahren in der numerischen Wettervorhersage. *Berichte des Deutschen Wetterdienstes* 2, Nr. 14, 26 S. (1954).

Die Arbeit umfaßt 2 Hauptteile. Im ersten, theoretisch-mathematischen Teil werden ausgehend von den früheren Arbeiten die Grundlagen für Verfahren mit mehr als 2 abhängigen und unabhängigen Veränderlichen besprochen. Dabei wird stets ein quasilineares Differentialgleichungssystem angenommen, wie es in den Strömungsproblemen aufzutreten pflegt. Begonnen wird mit den bekannten Verfahren mit 2 Unabhängigen, um den außenstehenden Leser auch in diese einzuführen. Dann wird zu Methoden mit 3 und 4 Unabhängigen, letzteres wohl zum ersten Male in der Literatur übergegangen. Außer der erwähnten Arbeit von Sauer für 3 Dimensionen möchte der Ref. noch A. Ferri (*Elements of aerodynamics of supersonic flows*, London 1949, S. 282—291), Courant-Friedrichs (*Supersonic flow and shock waves*, S. 75—78, dies. Zbl. 41, 113) und eine noch nicht im Druck erschienene, aber bereits vorgetragene Arbeit von W. Haack erwähnen. Abschließend werden die Verträglichkeitsbedingungen explizit formuliert. Im zweiten, theoretisch-meteorologischen Teil wird auf die speziellen Bedingungen in der Meteorologie eingegangen. In dem allgemeinen hydrodynamischen Gleichungssystem mit Schwerkraft und Corioliskräften sind die Grenzen von Abhängigkeits- und Einflußgebiet durch die Schallausbreitung gegeben. Das würde jedoch bedeuten, daß für den meteorologischen Zustand auf einem Ort der Erde der meteorologische Zustand des Vortages auf der ganzen Erdoberfläche verantwortlich wäre. Dies widerspricht allen Erfahrungen, weshalb man in der Meteorologie bestrebt ist eine Reduktion der Gleichungen auf die wesentlichen Parameter vorzunehmen. Dazu gehört das Streichen vor allem der Vertikalbeschleunigungen aber auch unter Umständen der Horizontalbeschleunigungen. Eine andere wesentliche Vereinfachung wird durch Einführen des Druckes an Stelle der Vertikalachse als Unabhängige gewonnen. Im Zusammenhang damit werden die sich daraus ergebenden Formen der Abhängigkeitsverhältnisse und der Verfahren besprochen. Damit ist eine erste ausführlichere Darstellung und Behandlung einer mathematischen Methode gegeben, welche auf dem Gebiete der Meteorologie in zunehmenden Maße an Bedeutung gewinnen dürfte.

K. Oswatitsch.